Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Г. Умаров, Явный вид решения задачи Коши для
линеаризованной системы уравнений фазового поля,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки,
2012, выпуск 1(), 256–260

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu977>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:36:58

УДК 517.95+517.986.7

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

Х. Г. Умаров

Чеченский государственный университет,
364907, Россия, Грозный, ул. Шерипова, 32.

E-mail: umarov50@mail.ru

Для линеаризованной системы уравнений фазового поля получен явный вид решения задачи Коши сведением её к абстрактной задаче Коши в банаховом пространстве.

Ключевые слова: линеаризованная система уравнений фазового поля, сильно непрерывные полугруппы операторов в банаховых пространствах.

Рассмотрим в области $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, задачу Коши для системы уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} v_t = \Delta v - \Delta w, \\ \Delta w + (\alpha - 1)w + v = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad (2)$$

которая является, с точностью до линейной замены, линеаризацией в нуле квазистационарной системы уравнений фазового поля [1, с. 24], моделирующей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода. В системе (1) искомые функции $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$ характеризуют распределение температуры и параметр порядка; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — дифференциальный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$; α — постоянная, зависящая от характеристик среды.

В работе [1] система (1) исследуется в ограниченной области методами теории уравнений соболевского типа с относительно секториальными операторами.

Наша цель — получить для системы (1) явный вид решения задачи Коши в $\mathbb{R}^3$. Явный вид решения задачи Коши (первой начально-краевой задачи в полупространстве и смешанной задачи в пространственном слое в предположении анизотропии среды) получен в [2].

Будем искать решение системы (1) в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < +\infty$. В этом пространстве оператор Лапласа с областью определения $\mathcal{D}(\Delta) = \{\psi \in L_p(\mathbb{R}^3) : \Delta\psi \in L_p(\mathbb{R}^3)\}$ является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной (более того — аналитической) полугруппы $U(t; \Delta)$ класса C_0 [3, с. 228; 4, с. 58]:

$$U(t; \Delta)\psi(x, y, z) = (4\pi t)^{-3/2} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 / (4t)} \psi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (3)$$

и его область определения является пространством Соболева: $\mathcal{D}(\Delta) = W_p^2(\mathbb{R}^3)$.

Исключим из системы (1) одну из неизвестных функций. Для этого воспользуемся тем, что положительная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора Лапласа в пространстве $L_p(\mathbb{R}^3)$: предполагая, что $\alpha < 1$, из второго уравнения системы (1) выводим

$$w = ((1 - \alpha)I - \Delta)^{-1} v. \quad (4)$$

Хасан Галсанович Умаров (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. дифференциальных уравнений.

Подставляя полученное значение w в первое уравнение системы (1), имеем

$$v_t = \Delta v + v - (1 - \alpha)((1 - \alpha)I - \Delta)^{-1}v. \quad (5)$$

Таким образом, обозначая в уравнении (5) операторы $\Delta = A$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = W_p^2(\mathbb{R}^3)$ и $I - (1 - \alpha)((1 - \alpha)I - \Delta)^{-1} = B$ с областью определения $\mathcal{D}(B) = L_p(\mathbb{R}^3)$, приходим к абстрактному дифференциальному уравнению первого порядка в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{R}^3)$:

$$v_t = (A + B)V \quad (6)$$

относительно функции $V = V(t) : [0, +\infty) \xrightarrow{V} L_p(\mathbb{R}^3)$ по правилу: для любого $t \geq 0$ $V(t) = v(x, y, z, t) \in L_p(\mathbb{R}^3)$. Начальным условием для уравнения (6) будет являться равенство

$$V|_{t=0} = \phi, \quad (7)$$

где $\phi = V(0) = v(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$ — заданный элемент пространства $L_p(\mathbb{R}^3)$ в соответствии с условием (2).

Оператор $B = I - (1 - \alpha)((1 - \alpha)I - \Delta)^{-1}$ — линеен и ограничен на всём пространстве $L_p(\mathbb{R}^3)$, поэтому является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы (более того — группы) класса C_0 : $U(t; B)\psi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \psi$, для которой справедливо представление

$$U(t; B)\psi = e^t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k (1 - \alpha)^k}{k!} ((1 - \alpha)I - \Delta)^{-k} \psi,$$

где ψ — произвольный элемент пространства $L_p(\mathbb{R}^3)$. Для полугруппы $U(t; B)$, $t \geq 0$, справедлива оценка нормы:

$$\|U(t; B)\| \leq e^t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 - \alpha)^k t^k}{k!} \|((1 - \alpha)I - \Delta)^{-1}\|^k \leq e^{2t}.$$

Выражая степени резольвенты $((1 - \alpha)I - \Delta)^{-k}$ через полугруппу (3), находим представление полугруппы, порождаемой оператором B :

$$U(t; B)\psi = e^t \left[\psi - \sqrt{(1 - \alpha)t} \int_0^{+\infty} e^{-(1 - \alpha)s} J_1 \left(2\sqrt{(1 - \alpha)ts} \right) U(s; \Delta) \psi \frac{ds}{\sqrt{s}} \right],$$

где $J_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ — функция Бесселя.

Из полученных представлений полугрупп $U(t; A)$ и $U(t; B)$ через полугруппу, порождаемую оператором Лапласа, следует их коммутирование.

При возмущении производящего оператора A сильно непрерывной полугруппы $U(t; A)$ класса C_0 линейным ограниченным оператором B оператор $A + B$ с областью определения $\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A)$ также порождает [5, с. 403] сильно непрерывную полугруппу $U(t; A + B)$ класса C_0 , при этом возмущённая полугруппа определяется разложением в ряд:

$$U(t; A + B)\psi = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t)\psi, \quad t \geq 0,$$

где

$$U_k(t)\psi = \int_0^t U(t - s; A) B U_{k-1}(s)\psi ds, \quad k \geq 1$$

и $U_0(t)\psi = U(t; A)\psi$ для произвольного элемента ψ банахова пространства, причём ряд абсолютно сходится равномерно по t в любом конечном интервале положительной полуоси.

В нашем случае возмущающий линейный ограниченный оператор B коммутирует с полугруппой, порождаемой возмущаемым оператором A : $BU(t; A)\psi = U(t; A)B\psi$, так как этим свойством обладают резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ и полугруппа $U(t; A)$ для любого производящего оператора A сильно непрерывной полугруппы класса C_0 . Отсюда следует, что

$$U_k(t)\psi = \frac{t^k}{k!}B^k U(t; A)\psi = \frac{t^k}{k!}U(t; A)B^k\psi$$

и, значит, справедливо следующее представление для полугруппы, порождаемой оператором $A + B$:

$$\begin{aligned} U(t; A + B)\psi &= U(t; A)U(t; B)\psi = U(t; B)U(t; A)\psi = \\ &= e^t \left[U(t; \Delta)\psi - \sqrt{(1-\alpha)t} \int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)s} J_1 \left(2\sqrt{(1-\alpha)ts} \right) U(s+t; \Delta)\psi \frac{ds}{\sqrt{s}} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

и оценка нормы

$$\|U(t; A + B)\| \leq \|U(t; A)\| \cdot \|U(t; B)\| \leq e^{2t}. \quad (9)$$

Для того чтобы задача Коши (6), (7) была равномерно корректной [4, с. 64], необходимо и достаточно, чтобы оператор $A + B$ был производящим оператором полугруппы класса C_0 , при этом решение задачи Коши (6), (7) даётся формулой

$$V = U(t; A + B)\phi, \quad (10)$$

если начальное данное φ принадлежит области определения $\mathcal{D}(A + B)$.

Принадлежность элемента φ множеству $\mathcal{D}(A + B)$ будет следовать из принадлежности начального данного $\varphi = \varphi(x, y, z)$ пространству Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^3)$. Предполагая это выполненным и используя представление (8), выводим из (10) формулу решения задачи Коши для уравнения (5):

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) &= e^t \left[U(t; \Delta)\varphi(x, y, z) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(1-\alpha)t} \int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)s} J_1 \left(2\sqrt{(1-\alpha)ts} \right) U(s+t; \Delta)\varphi(x, y, z) \frac{ds}{\sqrt{s}} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

для которого, в силу (9), справедлива оценка

$$\|v(x, y, z, t)\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} \leq e^{2t} \|\varphi(x, y, z)\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}. \quad (12)$$

Наконец, используя в формуле (11) представление (3) полугруппы, порождаемой оператором Лапласа, получаем явный вид решения задачи Коши (5), (2):

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) &= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \left[\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2} \varphi(x + 2\sqrt{t}\xi, y + 2\sqrt{t}\eta, z + 2\sqrt{t}\zeta) d\xi d\eta d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(1-\alpha)t} \int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)s} J_1 \left(2\sqrt{(1-\alpha)ts} \right) \frac{ds}{\sqrt{s}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2} \varphi(x + 2\sqrt{s+t}\xi, y + 2\sqrt{s+t}\eta, z + 2\sqrt{s+t}\zeta) d\xi d\eta d\zeta \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь из соотношения (4), используя формулу и оценку резольвенты оператора Лапласа в $L_p(\mathbb{R}^3)$, получаем явный вид второй искомой функции системы (1):

$$\begin{aligned}
 w(x, y, z, t) = & \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} e^t \left[\int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)r} dr \times \right. \\
 & \times \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2} \varphi(x + 2\sqrt{r+t}\xi, y + 2\sqrt{r+t}\eta, z + 2\sqrt{r+t}\zeta) d\xi d\eta d\zeta - \\
 & - \sqrt{(1-\alpha)t} \int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)r} dr \int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)s} J_1\left(2\sqrt{(1-\alpha)ts}\right) \frac{ds}{\sqrt{s}} \times \\
 & \times \left. \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2} \varphi(x + 2\sqrt{r+s+t}\xi, y + 2\sqrt{r+s+t}\eta, z + 2\sqrt{r+s+t}\zeta) d\xi d\eta d\zeta \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

и её оценку

$$\|w(x, y, z, t)\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{e^{2t}}{1-\alpha} \|\varphi(x, y, z)\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}. \quad (15)$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА. *Предположим, что в системе уравнений фазового поля (1) параметр α удовлетворяет неравенству $\alpha < 1$ и пусть в задаче Коши (1), (2) решение $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ ищется в пространстве $L_p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < +\infty$, а начальное данное $\varphi(x, y, z)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^3)$, тогда единственное решение этой системы даётся формулами (13), (14) и для него справедливы оценки (12), (15).*

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что по переменной t решение (13) удовлетворяет полугрупповому свойству, дифференцируемо при $t \geq 0$ и бесконечно дифференцируемо при $t > 0$. По переменным (x, y, z) значения решения при $t \geq 0$ принадлежат пространству Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^3)$ и, значит, у решения существуют частные и смешанные обобщённые производные по переменным (x, y, z) до второго порядка включительно, принадлежащие пространству $L_p(\mathbb{R}^3)$ при $t \geq 0$, и обобщённые производные любого порядка при $t > 0$. Из оценок (12), (15) следует непрерывная зависимость решения системы (1) от начального данного на любом конечном временном отрезке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Загребина С. А. О задаче Шоултера—Сидорова // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 3. С. 22–28; англ. пер.: Zagrebina S. A. On the Showalter–Sidorov problem // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007. Vol. 51, no. 3. Pp. 19–24.
2. Умаров Х. Г. Явный вид решения линеаризованной системы уравнений фазового поля. Грозный: ЧечГУ, 2010. 27 с. (Деп. в ВИНТИ 24.05.10 № 303–В2010) [*Umarov Kh. G. The explicit form of solutions for linearized system of phase field equations. Grozny: ChechGU, 2010. 27 pp. (Deposited at VINITI 24.05.10 No. 303–В2010)*]
3. Трибел Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с. [*Tribel' Kh. Interpolation theory, function spaces, differential operators. Moscow: Mir, 1980. 664 pp.*]
4. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с. [*Krein S. G. Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka, 1967. 464 pp.*]

5. Хилле Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностр. лит., 1962. 829 с. [Hille E., Phillips R. Functional analysis and semi-groups. Moscow: Inostran. Lit., 1962. 829 pp.]

Поступила в редакцию 30/VI/2011;
в окончательном варианте — 29/XI/2011.

MSC: 35G10; 47D06

EXPLICIT SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR THE LINEARIZED SYSTEM OF PHASE FIELD EQUATIONS

Kh. G. Umarov

Chechen State University,
32, Sheripova st., Grozny, 364907, Russia.

E-mail: umarov50@mail.ru

The explicit solution of Cauchy problem for the linearized system of phase field equations is received by reduction it to the abstract Cauchy problem in Banach space.

Key words: *linearized system of phase field equations, strongly continuous semi-groups of operators in Banach spaces.*

Original article submitted 30/VI/2011;
revision submitted 29/XI/2011.