Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Зотеев, М. А. Романюк, А. А. Егорова, Проблема сходимости итерационной процедуры в задаче параметрической идентификации систем с турбулентным трением, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 3(), 108–116

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu993>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 14:03:12

УДК 517.962.24+519.246

ПРОБЛЕМА СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ В ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ТРЕНИЕМ

В. Е. Зотеев, М. А. Романюк, А. А. Егорова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: zoteev-ve@mail.ru

Рассматривается проблема сходимости итерационной процедуры уточнения коэффициентов разностного уравнения в численном методе определения параметров дифференциального оператора для систем с турбулентным трением. Сформулирована и доказана теорема о достаточном условии сходимости итерационной процедуры. При доказательстве теоремы используются свойства сжимающихся отображений и фундаментальных последовательностей. Как следствие, из теоремы получены формулы, описывающие априорную и апостериорную оценки погрешности приближений.

Ключевые слова: системы с турбулентным трением, параметрическая идентификация, разностные уравнения, среднее квадратичное приближение.

Достоверная оценка параметров дифференциального оператора на основе статистической обработки результатов наблюдений на выходе системы является важнейшей проблемой в математическом моделировании. Для дифференциальных операторов, описывающих динамические процессы в нелинейных диссипативных системах с турбулентным трением, эта проблема решается на основе стохастических разностных уравнений [1, 2]. При таком подходе задача сводится к среднее квадратичному оцениванию коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели, эффективность которого обеспечивается итерационными процедурами уточнения её коэффициентов [1]. В [2] представлена система стохастических разностных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 - \frac{1}{\hat{\omega}^{(p)}} \sin \hat{\omega}^{(p)} t_0 = -\frac{t_0}{\hat{\omega}^{(p)} \tau} \sin(\hat{\omega}^{(p)} t_0) \lambda_1 + \varepsilon_0; \\ y_1 - \frac{1}{\hat{\omega}^{(p)}} \sin \left[\hat{\omega}^{(p)} (\tau + t_0) \right] = \\ \quad = - \left[y_1 + \frac{t_0}{\hat{\omega}^{(p)} \tau} \sin \left[\hat{\omega}^{(p)} (\tau + t_0) \right] \right] \lambda_1 + (1 + \lambda_1) \varepsilon_1; \\ y_k + y_{k-2} = \\ \quad = \lambda_0 y_{k-1} - \lambda_1 \left[(k-2) y_{k-2} - \lambda_0^{(p)} (k-1) y_{k-1} + k y_k \right] + \eta_k; \\ \eta_k = [1 + (k-2) \lambda_1] \varepsilon_{k-2} - \lambda_0^{(p)} [1 + (k-1) \lambda_1] \varepsilon_{k-1} + [1 + k \lambda_1] \varepsilon_k, \\ \quad \quad \quad k = 2, 3, \dots, N-1, \end{array} \right. \quad (1)$$

описывающая результаты наблюдений y_k свободных колебаний системы с турбулентным трением. При среднее квадратичном оценивании коэффициентов

Владимир Евгеньевич Зотеев (д.т.н., доцент), профессор, каф. прикладной математики и информатики. Мария Анатольевна Романюк, ассистент, каф. прикладной математики и информатики. Александра Арсеновна Егорова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

модели (1) используются две вложенные одна в другую итерационные процедуры, одна из которых служит для устранения смещения в оценках [1], а другая предназначена для уточнения оценок $\hat{\lambda}_0^{(p)}$ и $\hat{\omega}^{(p)} = \frac{1}{\gamma} \arccos \frac{\hat{\lambda}_0^{(p)}}{2}$, $p = 0, 1, 2, \dots$ [2]. Эта итерационная процедура описывается следующей рекуррентной формулой [2]:

$$\hat{\lambda}_0^{(p)} = (1 + c) \hat{\lambda}_0^{(p-1)} - c\varphi(\hat{\lambda}_0^{(p-1)}), \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

где $\varphi(\lambda_0)$ — непрерывно дифференцируемая функциональная зависимость, определяемая последовательным выполнением известных математических операций, связанных с вычислением и устранением смещения оценки вектора коэффициентов $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)^\top$; c — параметр, величина которого выбирается таким образом, чтобы последовательность приближений $\hat{\lambda}_0^{(p)}$, $p = 0, 1, 2, \dots$, сходилась при $p \rightarrow \infty$ к решению уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$. Анализ и обеспечение сходимости итерационной процедуры (2) уточнения оценок $\hat{\lambda}_0^{(p)}$ и $\hat{\omega}^{(p)}$ является важнейшей задачей при разработке численных методов параметрической идентификации дифференциального оператора для систем с турбулентным трением.

ТЕОРЕМА (ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ). Пусть функция $\varphi(\lambda_0)$ определена и дифференцируема на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l] \in (-2, 2)$, причём $|\varphi'(\lambda_0)| \leq M$, $\varphi'(\lambda_0) \neq 1$ и выполняется одно из следующих неравенств:

$$0 \leq \varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)} \leq (1 - M)l \quad \text{при} \quad 0 < M < 1, \quad (3)$$

$$0 \leq \text{sign} [1 - \varphi'(\lambda_0)] [\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}] \leq ml \quad \text{при} \quad \begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geq m, \\ 0 < m < M. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда числовая последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^\infty$, описываемая формулой (2): $\lambda_0^{(p)} = (1 + c)\lambda_0^{(p-1)} - c\varphi(\lambda_0^{(p-1)})$, будет сходиться независимо от начального приближения $\lambda_0^{(0)} \in (-2, 2)$ при $p \rightarrow \infty$ к решению уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$ при значениях параметра c , равных

$$c = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad 0 < M < 1; \\ -\text{sign} [1 - \varphi'(\lambda_0)] \frac{1}{M+1}, & \text{если} \quad \begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geq m, \\ 0 < m < M. \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство. Введём следующее обозначение: $\Phi(\lambda_0) = (1 + c)\lambda_0 - c\varphi(\lambda_0)$. В этом случае итерационная формула (2) принимает вид

$$\lambda_0^{(p)} = \Phi(\lambda_0^{(p-1)}), \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Покажем, что последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^\infty$ имеет предел, принадлежащий отрезку $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l] \in (-2, 2)$. В соответствии с (5) для $0 < M < 1$ имеем

$c = -1$. При этом из (2) получаем $\Phi(\lambda_0) \equiv \varphi(\lambda_0)$. Отсюда $|\Phi'(\lambda_0)| = |\varphi'(\lambda_0)| \leq M < 1$. При $M > 1$ имеем $c = -\frac{1}{1+M}$, если $-M \leq \varphi'(\lambda_0) \leq 1 - m < 1$ или $c = \frac{1}{1+M}$, если $1 < 1 + m \leq \varphi'(\lambda_0) \leq M$. В первом случае с учётом формулы (2) имеем $\Phi(\lambda_0) = \frac{M}{M+1}\lambda_0 + \frac{1}{M+1}\varphi(\lambda_0)$ и, соответственно, $\Phi'(\lambda_0) = \frac{M}{M+1} + \frac{1}{M+1}\varphi'(\lambda_0)$. Во втором случае, при $1 < 1 + m \leq \varphi'(\lambda_0) \leq M$, получаем $\Phi(\lambda_0) = \frac{M+2}{M+1}\lambda_0 - \frac{1}{M+1}\varphi(\lambda_0)$ и $\Phi'(\lambda_0) = \frac{M+2}{M+1} - \frac{1}{M+1}\varphi'(\lambda_0)$. Отсюда с учётом соотношения $0 < m < M$ в обоих случаях имеем

$$\alpha = \max_{\lambda_0 \in (-2, 2)} |\Phi'(\lambda_0)| = \frac{1 + M - m}{1 + M} < 1. \quad (6)$$

Используя неравенства (3) или (4), покажем, что последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ целиком расположена на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + \rho]$, принадлежащем заданному отрезку $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$:

$$\lambda_0^{(p)} \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + \rho] \subset [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l], \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

где величина $\rho \leq l$ обеспечивает выполнение равенства

$$0 \leq \varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)} = (1 - M)\rho \quad (7)$$

при значениях $M < 1$, или выполнение равенства

$$0 \leq \text{sign}[1 - \varphi'(\lambda_0)] [\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}] = m\rho$$

при $M > 1$. Последнее соотношение может быть представлено в виде

$$0 \leq \varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)} = m\rho = (1 - \alpha)(1 + M)\rho \quad \text{при} \quad -M \leq \varphi'(\lambda_0) \leq 1 - m < 1, \quad (8)$$

$$0 \leq \lambda_0^{(0)} - \varphi(\lambda_0^{(0)}) = m\rho = (1 - \alpha)(1 + M)\rho \quad \text{при} \quad 1 < 1 + m \leq \varphi'(\lambda_0) \leq M. \quad (9)$$

Очевидно, что функция $\Phi(\lambda_0)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + \rho]$, следовательно, для любых $\lambda_0^{(p)}, \lambda_0^{(q)} \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + \rho]$ она удовлетворяет условию Липшица:

$$|\Phi(\lambda_0^{(p)}) - \Phi(\lambda_0^{(q)})| \leq \alpha |\lambda_0^{(p)} - \lambda_0^{(q)}|, \quad \alpha = \max_{[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + \rho]} |\Phi'(\lambda_0)| < 1.$$

Полагая $\lambda_0^{(p)} = \lambda_0$ и $\lambda_0^{(q)} = \lambda_0^{(0)}$, получаем

$$\Phi(\lambda_0^{(0)}) - \alpha |\lambda_0 - \lambda_0^{(0)}| \leq \Phi(\lambda_0) \leq \Phi(\lambda_0^{(0)}) + \alpha |\lambda_0 - \lambda_0^{(0)}|. \quad (10)$$

С учётом формул (5)–(9) имеем

$$\Phi(\lambda_0^{(0)}) = \lambda_0^{(0)} - c [\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}] =$$

$$= \begin{cases} \lambda_0^{(0)} + (1 - M)\rho, & \text{если } M < 1; \\ \lambda_0^{(0)} + \text{sign}^2 [1 - \varphi'(\lambda_0)] \frac{(1-\alpha)(1+M)}{1+M} \rho, & \text{если } M > 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\Phi(\lambda_0^{(0)}) = \lambda_0^{(0)} + (1 - \alpha)\rho. \quad (11)$$

Тогда, используя правую часть неравенства (10), при $0 < \alpha < 1$ можно получить

$$\Phi(\lambda_0) \leq \Phi(\lambda_0^{(0)}) + \alpha(\lambda_0 - \lambda_0^{(0)}) = \lambda_0^{(0)} + \rho - \alpha(\lambda_0^{(0)} + \rho - \lambda_0) \leq \lambda_0^{(0)} + \rho. \quad (12)$$

Так как $0 \leq \lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)} = \Phi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)} = (1 - \alpha)\rho < \rho$, то очевидно выполнение следующих неравенств: $\lambda_0^{(0)} \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$ и $\lambda_0^{(0)} \leq \lambda_0^{(1)} \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$.

Методом математической индукции покажем, что неравенство

$$\lambda_0^{(0)} \leq \lambda_0^{(p)} \leq \lambda_0^{(0)} + \rho \quad (13)$$

выполняется при любом $p = 0, 1, 2, \dots$, то есть последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ ограничена сверху и снизу.

Предположим, что неравенство (13) выполняется при $p = n - 1$. Докажем, что оно будет выполняться и при $p = n$.

Используя левую часть неравенства (10) при $\lambda_0 = \lambda_0^{(n-1)}$, с учётом (11) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(n)} = \Phi(\lambda_0^{(n-1)}) &\geq \Phi(\lambda_0^{(0)}) - \alpha(\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}) \geq \\ &\geq \lambda_0^{(0)} + (1 - \alpha)\rho - \alpha(\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}). \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим несколько случаев, соответствующих различным значениям M :

- 1) пусть $0 < M < 1/2$ и $\lambda_0^{(0)} \leq \lambda_0^{(n-1)} \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$; отсюда $0 \leq \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leq \rho$; тогда из (14) имеем $\lambda_0^{(n)} \geq \lambda_0^{(0)} + (1 - \alpha)\rho - \alpha\rho = \lambda_0^{(0)} + (1 - 2\alpha)\rho = \lambda_0^{(0)} + (1 - 2M)\rho \geq \lambda_0^{(0)}$, так как $1 - 2M \geq 0$ при $0 < M < 1/2$;
- 2) пусть $1/2 \leq M < 1$ и $\lambda_0^{(0)} \leq \lambda_0^{(n-1)} \leq \lambda_0^{(0)} + \frac{1-M}{M}\rho \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$ (или $0 \leq \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leq \frac{1-M}{M}\rho$); тогда с учётом $\alpha = M$ из (14) получаем $\lambda_0^{(n)} \geq \lambda_0^{(0)} + (1 - M)\rho - M\frac{1-M}{M}\rho = \lambda_0^{(0)}$;
- 3) пусть $1/2 \leq M < 1$ и $\lambda_0^{(0)} + \frac{1-M}{M}\rho \leq \lambda_0^{(n-1)} \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$ (или $\frac{1-M}{M}\rho \leq \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leq \rho$), тогда имеем

$$\begin{aligned} |\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| &= |\Phi(\lambda_0^{(n-1)}) - \Phi(\lambda_0^{(n-2)})| \leq \alpha|\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(n-2)}| \leq \\ &\leq |\Phi(\lambda_0^{(n-2)}) - \Phi(\lambda_0^{(n-3)})| \leq \alpha^2|\lambda_0^{(n-2)} - \lambda_0^{(n-3)}| \leq \dots \leq \\ &\leq \alpha^{n-1}|\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)}|; \end{aligned}$$

отсюда для $0 < \alpha < 1$ с учётом равенства (11) получаем

$$|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| = \alpha^{n-1}|\Phi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}| < \alpha^{n-1}(1 - \alpha)\rho; \quad (15)$$

тогда при $\alpha = M$ имеем $|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| < \frac{1-M}{M}\rho \leq \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}$; очевидно, что $\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)} \geq -|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}|$; отсюда $\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)} > -\lambda_0^{(n-1)} + \lambda_0^{(0)}$ или $\lambda_0^{(n)} > \lambda_0^{(0)}$.

Рассмотрим теперь случаи, когда $M > 1$, при этом $\alpha = \frac{1+M-m}{1+M} < 1$:

- 4) пусть $\frac{1+M}{2} \leq m \leq M$ и $\lambda_0^{(0)} \leq \lambda_0^{(n-1)} \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$, отсюда $0 \leq \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leq \rho$; из (14) следует

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(n)} &\geq \lambda_0^{(0)} + \left(1 - 1 + \frac{m}{1+M}\right)\rho - \frac{1+M-m}{1+M}(\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}) \geq \\ &\geq \lambda_0^{(0)} + \frac{m}{1+M}\rho - \frac{1+M-m}{1+M}\rho = \lambda_0^{(0)} + \left(\frac{2m}{1+M} - 1\right)\rho \geq \lambda_0^{(0)}, \end{aligned}$$

так как $\frac{2m}{1+M} - 1 \geq 0$ при $\frac{1+M}{2} \leq m \leq M$;

- 5) пусть $0 < m < \frac{1+M}{2}$, при этом $\frac{m}{1+M-m}\rho < \rho$; рассмотрим случай, когда $\lambda_0^{(0)} \leq \lambda_0^{(n-1)} \leq \lambda_0^{(0)} + \frac{m}{1+M-m}\rho \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$; отсюда получаем $0 \leq \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leq \frac{m}{1+M-m}\rho$; из (14) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(n)} &\geq \lambda_0^{(0)} + \left(1 - 1 + \frac{m}{1+M}\right)\rho - \frac{1+M-m}{1+M}(\lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)}) \geq \\ &\geq \lambda_0^{(0)} + \frac{m}{1+M}\rho - \frac{1+M-m}{1+M}\frac{m}{1+M-m}\rho = \lambda_0^{(0)}; \end{aligned}$$

- 6) пусть $0 < m < \frac{1+M}{2}$, при этом $\frac{m}{1+M-m}\rho < \rho$; рассмотрим случай, когда $\lambda_0^{(0)} \leq \lambda_0^{(0)} + \frac{m}{1+M-m}\rho \leq \lambda_0^{(n-1)} \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$, то есть $\frac{m}{1+M-m}\rho \leq \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)} \leq \rho$; в соответствии с (15) имеем $|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| < \alpha^{-1}(1-\alpha)\rho = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\rho = \left(\frac{1+M}{1+M-m} - 1\right)\rho = \frac{m}{1+M-m}\rho$, следовательно,

$$|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| < \lambda_0^{(n-1)} - \lambda_0^{(0)};$$

отсюда, аналогично случаю 3, получаем $\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)} > -\lambda_0^{(n-1)} + \lambda_0^{(0)}$ или $\lambda_0^{(n)} > \lambda_0^{(0)}$.

Таким образом, при выполнении условия $\lambda_0^{(n-1)} \geq \lambda_0^{(0)}$ вытекает левая часть неравенства (13) для $p = n$: $\lambda_0^{(n)} \geq \lambda_0^{(0)}$, то есть последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ ограничена снизу.

Пусть правая часть неравенства (13) выполняется при $p = n-1$: $\lambda_0^{(n-1)} \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$. Тогда с учётом (12) при $\lambda_0 = \lambda_0^{(n-1)}$ имеем $\lambda_0^{(n)} = \Phi(\lambda_0^{(n-1)}) \leq \lambda_0^{(0)} + \rho$, то есть последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ ограничена сверху.

Отсюда по индукции следует, что все члены бесконечной последовательности удовлетворяют неравенству (13), то есть $\lambda_0^{(p)} \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + \rho] \subset [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$, $p = 0, 1, 2, \dots$

Покажем, что рассматриваемая последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^\infty$ — фундаментальная. Учитывая полученные выше неравенства

$$|\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| \leq \alpha^{n-1} |\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)}|, \quad 0 < \alpha < 1$$

и соотношение $0 \leq \lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)} = (1 - \alpha)\rho < \rho \leq l$, получаем

$$\begin{aligned} |\lambda_0^{(k+p)} - \lambda_0^{(k)}| &\leq \sum_{n=k+1}^{k+p} |\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| \leq \sum_{n=k+1}^{k+p} \alpha^{n-1} |\lambda_0^{(1)} - \lambda_0^{(0)}| \leq \\ &\leq (1 - \alpha)\rho \sum_{n=k+1}^{k+p} \alpha^{n-1} \leq (1 - \alpha)l\alpha^k \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} < l\alpha^k, \end{aligned}$$

где k и p — любые натуральные числа.

Так как $\alpha^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^\infty$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, существует $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_0^{(p)} = \bar{\lambda}_0$. Причём, если элементы последовательности $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^\infty$ принадлежат отрезку $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$, то и $\bar{\lambda}_0 \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$.

Таким образом, числовая последовательность $\{\lambda_0^{(p)}\}_{p=0}^\infty$, описываемая рекуррентной формулой (2), при выполнении условий теоремы имеет $\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_0^{(p)} = \bar{\lambda}_0$, принадлежащий отрезку $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$.

Так как функция $\Phi(\lambda_0) = (1 + c)\lambda_0 - c\varphi(\lambda_0)$ по условию теоремы непрерывна на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$, можно перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$, осуществив предельный переход справа под знаком функции $\Phi(\lambda_0^{(p)})$:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_0^{(p)} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(\lambda_0^{(p)}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[(1 + c)\lambda_0^{(p)} - c\varphi(\lambda_0^{(p)}) \right] = \\ &= (1 + c) \lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_0^{(p)} - c\varphi\left(\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_0^{(p)}\right) = (1 + c)\bar{\lambda}_0 - c\varphi(\bar{\lambda}_0). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_0 + c(\bar{\lambda}_0 - \varphi(\bar{\lambda}_0))$. При $c \neq 0$ имеем, что $\bar{\lambda}_0 = \varphi(\bar{\lambda}_0)$, то есть предельное значение $\bar{\lambda}_0 \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$ является корнем уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$.

Пусть $\bar{\bar{\lambda}}_0 \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$ также является решением уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$, то есть $\bar{\bar{\lambda}}_0 = \varphi(\bar{\bar{\lambda}}_0)$. Так как функция $\varphi(\lambda_0)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$, она удовлетворяет на $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$ условию Липшица с постоянной $M = \max_{[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]} [\varphi'(\lambda_0)] \neq 1$. Следовательно, имеет место

неравенство $|\bar{\lambda}_0 - \bar{\bar{\lambda}}_0| = |\varphi(\bar{\lambda}_0) - \varphi(\bar{\bar{\lambda}}_0)| \leq M|\bar{\lambda}_0 - \bar{\bar{\lambda}}_0|$. Отсюда получаем $|\bar{\lambda}_0 - \bar{\bar{\lambda}}_0|(1 - M) \leq 0$. Так как по условию теоремы $M \neq 1$, неравенство выполняется только при $\bar{\lambda}_0 = \bar{\bar{\lambda}}_0$. Единственность решения уравнения $\lambda_0 = \varphi(\lambda_0)$ на отрезке $[\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + l]$ установлена. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Априорная и апостериорная оценки погрешности n -ного приближения описываются соответственно следующими формулами:

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leq \rho M^n, \quad (16)$$

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leq \frac{M}{1-M} |\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| \quad (17)$$

при $0 < M < 1$ и $\rho = \frac{\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}}{1-M} \leq l$ или формулами

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leq \left(1 - \frac{m}{1+M}\right)^n \rho, \quad (18)$$

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leq \frac{1+M-m}{1+M} |\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| \quad (19)$$

$$\text{при } \begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geq m, \\ 0 < m < M \end{cases} \quad \text{и } \rho = \frac{\text{sign}[1-\varphi'(\lambda_0)] [\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}]}{m} \leq l.$$

Доказательство. Действительно, с учётом равенств $\bar{\lambda}_0 = \Phi(\bar{\lambda}_0)$ и $\lambda_0^{(n)} = \Phi(\lambda_0^{(n-1)})$ и непрерывной дифференцируемости функции $\Phi(\lambda_0)$ имеем

$$\begin{aligned} |\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| &= |\Phi(\bar{\lambda}_0) - \Phi(\lambda_0^{(n-1)})| \leq \alpha |\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}| = \\ &= \alpha |\Phi(\bar{\lambda}_0) - \Phi(\lambda_0^{(n-2)})| \leq \alpha^2 |\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-2)}| \leq \dots \leq \alpha^n |\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(0)}|. \end{aligned}$$

Так как $\bar{\lambda}_0 \in [\lambda_0^{(0)}, \lambda_0^{(0)} + \rho]$, можно записать, что $|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(0)}| \leq \rho$. Поэтому имеет место неравенство $|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leq \alpha^n \rho$.

Пусть $0 < M < 1$ и в соответствии с (7) $\rho = \frac{\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}}{1-M} \leq l$. Тогда при $\alpha = M < 1$ можно получить формулу априорной оценки погрешности (16).

$$\text{Пусть } \begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geq m, \\ 0 < m < M \end{cases} \quad \text{и в соответствии с формулами (8) и (9)}$$

$$\rho = \frac{\text{sign}[1 - \varphi'(\lambda_0)] [\varphi(\lambda_0^{(0)}) - \lambda_0^{(0)}]}{m} \leq l.$$

Для этого случая $\alpha = \frac{1+M-m}{1+M}$ и можно получить формулу априорной оценки погрешности (18).

Для построения формул апостериорной оценки погрешности n -ного приближения воспользуемся соотношением

$$\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)} = \lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)} + \Phi(\bar{\lambda}_0) - \Phi(\lambda_0^{(n-1)}),$$

из которого с учётом условия Липшица находим

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}| \leq |\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}| + \alpha |\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}|$$

или

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}| \leq \frac{1}{1-\alpha} |\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}|.$$

Так как $|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leq \alpha |\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n-1)}|$, можно записать, что

$$|\bar{\lambda}_0 - \lambda_0^{(n)}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |\lambda_0^{(n)} - \lambda_0^{(n-1)}|.$$

Пусть $0 < M < 1$. Тогда при $\alpha = M < 1$ можно получить формулу апостериорной оценки погрешности (17).

Пусть $\begin{cases} M > 1, \\ |\varphi'(\lambda_0) - 1| \geq m, \\ 0 < m < M. \end{cases}$ Для этого случая $\alpha = \frac{1+M-m}{1+M}$ и можно полу-

чить формулу апостериорной оценки погрешности (19). $\square$

Таким образом, рассмотрено достаточное условие сходимости итерационной процедуры уточнения коэффициентов разностного уравнения, предназначенной для повышения точности вычисления (почти в два раза [2]) параметров дифференциального оператора для систем с турбулентным трением. Следует отметить, и это очевидно, что область применения итерационной процедуры, описываемой формулой вида

$$x_k = (1+c)x_{k-1} - c\varphi(x_{k-1}),$$

в которой $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция и $\varphi'(\lambda_0) \leq M$, не ограничивается только задачей среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения. Алгоритм вычислений с использованием этой рекуррентной формулы может применяться в различных по физической природе задачах математического моделирования. Эта формула, обобщая при $c = 1$ известный метод итераций для значений $M < 1$, обеспечивает сходимость итерационной процедуры также для значений $M > 1$ за счёт выбора параметра c в соответствии с выражением (5).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект РНП 2.1.1/14069).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зотеев В. Е.* Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / ред. В. П. Радченко. М.: Машиностроение-1, 2009. 344 с. [*Zoteev V. E.* Parametric identification of dissipative mechanical systems based on difference equations / ed. V. P. Radchenko. Moscow: Mashinostroenie-1, 2009. 344 pp.]
2. *Зотеев В. Е., Заусаева М. А., Егорова А. А.* Параметрическая идентификация дифференциальных операторов для систем с турбулентным трением на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 125–133. [*Zoteev V. E., Zausaeva M. A., Egorova A. A.* Parametric identification of the differential operators for the systems with turbulent friction on the base of finite-difference equations // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. Vol. 5(21). Pp. 125–133].

Поступила в редакцию 04/IX/2011;
в окончательном варианте — 19/IX/2011.

MSC: 65C20; 65P40, 34C15, 37M05

**PROBLEM OF ITERATIVE PROCEDURE CONVERGENCE
IN PARAMETRIC IDENTIFICATION OF THE SYSTEMS
WITH TURBULENT FRICTION**

V. E. Zoteev, M. A. Romanyuk, A. A. Egorova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: zoteev-ve@mail.ru

The problem of convergence of iterative procedure for clarification of coefficients of the finite-difference equation in numerical technique for determination of the differential operator parameters for the systems with turbulent friction is considered. Theorem about a sufficient condition of iterative procedure convergence is defined and demonstrated. During theorem proving contracting mapping and fundamental sequence properties are used. As a corollary of the theorem formulas describing prior and posterior estimate of the approximation error are received.

Key words: *systems with turbulent friction, parametric identification, finite-difference equations, mean-square estimation.*

Original article submitted 04/IX/2011;
revision submitted 19/IX/2011.

Vladimir E. Zoteev (Dr.Sci. (Techn.)), Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Maria A. Zausaeva*, Assistant, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Alexandra A. Egorova*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.