Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Максимова, Решение задачи Коши для системы уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 3(), 167–170

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu999>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 10:25:21

УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ*Е. А. Максимова*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.E-mail: katyuha_mak@mail.ru*Рассмотрена система уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу. Получено решение задачи Коши для случая, когда характеристические числа матрицы-коэффициента комплексно-сопряжённые с действительной частью из интервала $(-1/2, 0)$.***Ключевые слова:** метод Римана, задача Коши, система уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{2G}{y} \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где $U = (u_1(x, y), u_2(x, y))^T$ — неизвестная вектор-функция, G — действительная 2×2 -матрица.В работе [1] построена матрица Римана и с её помощью получено решение задачи Коши для системы (1) в случае, когда спектр матрицы G принадлежит интервалу $(-1/2, 1/2)$. В [2] получено решение задачи Коши для случая, когда собственные значения матрицы G — комплексно-сопряжённые числа с действительной частью из интервала $(0, 1/2)$.Цель данной работы — найти решение задачи Коши для случая, когда матрица G имеет комплексно-сопряжённые собственные значения λ_1, λ_2 с действительной частью из интервала $(-1/2, 0)$: $\lambda_1 = \mu_1 + i\mu_2, \lambda_2 = \mu_1 - i\mu_2, \mu_1 \in (-1/2, 0), \mu_2 \neq 0$.**Задача Коши.** Найти вектор-функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $U(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, где $D = \{(x, y) : 0 < -y < x < y + 1\}$;
- 2) $U(x, y)$ удовлетворяет системе (1);
- 3) выполняются начальные условия

$$U(x, 0) = \tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x))^T, \quad x \in [0, 1]; \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} K(y) \frac{\partial U}{\partial y} = \nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))^T, \quad x \in (0, 1), \quad (3)$$

где

$$K(y) = (-y)^{2G} = (-y)^{2\mu_1} \left(E \cos(2\mu_2 \ln(-y)) - \frac{G - \mu_1 E}{\mu_2} \sin(2\mu_2 \ln(-y)) \right).$$

В характеристических координатах

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y \quad (4)$$

Екатерина Алексеевна Максимова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

область D переходит в область $H = \{(\xi, \eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$, а система (1) редуцируется к системе уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу специального вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{G}{\eta - \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{G}{\eta - \xi} = 0, \quad (5)$$

при этом начальные условия принимают следующий вид:

$$U(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad \xi \in [0, 1], \quad (6)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi+0} K \left(\frac{\xi - \eta}{2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = \nu(\xi), \quad \xi \in (0, 1). \quad (7)$$

Из свойств функции от матрицы [3] следует, что функция-матрица Римана $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ есть вещественная матрица даже в том случае, когда характеристические числа матрицы G комплексно-сопряжённые. Запишем её аналитический вид:

$$R = V^{\mu_1} \left(\frac{G - \mu_1 E}{\mu_2} (\psi(\lambda_1, r) \cos(\mu_2 \ln V) + \varphi(\lambda_1, r) \sin(\mu_2 \ln V)) + \right. \\ \left. + E(\varphi(\lambda_1, r) \cos(\mu_2 \ln V) + \psi(\lambda_1, r) \sin(\mu_2 \ln V)) \right).$$

Здесь

$$V = \frac{(\eta - \xi)^2}{(\eta - \xi_0)(\eta_0 - \xi)}, \quad r = -\frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\xi - \eta_0)(\xi_0 - \eta)}, \\ \varphi(\lambda_1, r) = \operatorname{Re} \left({}_2F_1 \left(\begin{matrix} \mu_1 + i\mu_2, \mu_1 + i\mu_2 \\ 1 \end{matrix}; r \right) \right), \\ \psi(\lambda_1, r) = \operatorname{Im} \left({}_2F_1 \left(\begin{matrix} \mu_1 + i\mu_2, \mu_1 + i\mu_2 \\ 1 \end{matrix}; r \right) \right).$$

Если $U(\xi, \eta)$ является решением системы уравнений (5), а $R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ — матрица Римана этой системы уравнений, то, используя свойства матрицы Римана и векторный аналог тождества Грина [4], получаем

$$U_\varepsilon(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2} (RU) \Big|_{\substack{\xi = \eta_0 - \varepsilon \\ \eta = \eta_0}} + \frac{1}{2} (RU) \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \eta = \xi_0 + \varepsilon}} + \\ + \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} R \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi - \\ - \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^{\eta_0 - \varepsilon} \left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{4RG}{\xi - \eta} \right) U \Big|_{\eta = \xi + \varepsilon} d\xi = \sum_{k=1}^4 J_k(\varepsilon). \quad (8)$$

В равенстве (8) непосредственно переходить к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ нельзя, так как все внеинтегральные члены стремятся к бесконечности, а интеграл $J_4(\varepsilon)$ не существует. Интегрируя по частям $J_4(\varepsilon)$, применяя формулу автотрансформации и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим решение задачи Коши (6), (7) для системы уравнений (5) в области H , которое имеет вид

$$U(\xi, \eta) = -2^{2\mu_1-1} (K_1 \psi(\lambda_1, 1) + E \varphi(\lambda_1, 1)) \int_{\xi}^{\eta} \sigma^{-\mu_1}(t) \cos \left(\mu_2 \ln \frac{4}{\sigma(t)} \right) \nu(t) dt - \\ - 2^{2\mu_1-1} (K_1 \varphi(\lambda_1, 1) - E \psi(\lambda_1, 1)) \int_{\xi}^{\eta} \sigma^{-\mu_1}(t) \sin \left(\mu_2 \ln \frac{4}{\sigma(t)} \right) \nu(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + (\eta - \xi)^{-2\mu_1-1} \left[\frac{1}{2} (E\psi(-\lambda_1, 1) - K_1\varphi(-\lambda_1, 1)) \times \right. \\
& \times \int_{\xi}^{\eta} \sigma^{\mu_1}(t) \sin \left(\mu_2 \ln \frac{(\xi - \eta)^2}{\sigma(t)} \right) (\eta + \xi - 2t) \tau'(t) dt - \\
& - \frac{1}{2} (E\varphi(-\lambda_1, 1) + K_1\psi(-\lambda_1, 1)) \int_{\xi}^{\eta} \sigma^{\mu_1}(t) \cos \left(\mu_2 \ln \frac{(\xi - \eta)^2}{\sigma(t)} \right) (\eta + \xi - 2t) \tau'(t) dt + \\
& + (K_2\varphi(-\lambda_1, 1) + K_3\psi(-\lambda_1, 1)) \int_{\xi}^{\eta} \sigma^{\mu_1}(t) \cos \left(\mu_2 \ln \frac{(\xi - \eta)^2}{\sigma(t)} \right) \tau(t) dt + \\
& \left. + (K_2\psi(-\lambda_1, 1) - K_3\varphi(-\lambda_1, 1)) \int_{\xi}^{\eta} \sigma^{\mu_1}(t) \sin \left(\mu_2 \ln \frac{(\xi - \eta)^2}{\sigma(t)} \right) \tau(t) dt \right], \quad (9)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{G - \mu_1 E}{\mu_2}, \quad K_2 = 2G + E, \\
K_3 &= (1 + 2\mu_1)K_1 - 2\mu_2 E, \quad \sigma(t) = (t - \xi)(\eta - t), \\
\varphi(\lambda_1, 1) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\lambda_1, 1)}{(1)_n n!}, \quad \psi(\lambda_1, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\lambda_1, 1)}{(1)_n n!}, \\
\varphi_{n+1}(\lambda_1, 1) &= ((\mu_1 + n)^2 - \mu_2^2) \varphi_n(\lambda_1, 1) - 2\mu_2(\mu_1 + n) \psi_n(\lambda_1, 1), \\
\psi_{n+1}(\lambda_1, 1) &= ((\mu_1 + n)^2 - \mu_2^2) \psi_n(\lambda_1, 1) + 2\mu_2(\mu_1 + n) \varphi_n(\lambda_1, 1), \\
\varphi_1(\lambda_1, 1) &= \mu_1^2 - \mu_2^2, \quad \psi_1(\lambda_1, 1) = 2\mu_1 \mu_2.
\end{aligned}$$

Используя (4), можно записать решение $U(x, y)$ в области D . Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если $\tau(x) \in C^3[0, 1]$ и $\nu(x) \in C^2(0, 1)$, то задача Коши (2), (3) для уравнения (1) корректна по Адамару.

ЗАМЕЧАНИЕ. Положив в (9) $\mu_1 = 0$, получим решение задачи Коши для случая мнимых собственных значений матрицы G .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев А. А. Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа / В сб.: *Дифференциальные уравнения в частных производных*. Сб. тр. мат. кафедр пединститутов РСФСР. Вып. 16. Рязань: Рязан. гос. пед. инст., 1980. С. 9–14. [Andreev A. A. On a class of systems of differential equations of hyperbolic type / In: *Partial differential equations*. Ryazan: Ryazan. Gos. Ped. Inst., 1980. Pp. 9–14].
2. Андреев А. А., Максимова Е. А. Решение задачи Коши для одной системы гиперболического типа с сингулярными характеристиками / В сб.: *Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием*. Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Математическое моделирование и краевые задачи. Самара: СамГТУ, 2011. С. 11–17. [Andreev A. A., Maksimova E. A. The solution of the Cauchy problem for one hyperbolic system with singular characteristics / In: *Proceedings of the Eighth All-Russian Scientific Conference with international participation*. Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2011. Pp. 11–17].
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [Gantmakher F. R. Theory of matrices. Moscow: Nauka. 549 pp.]
4. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1966. 164 с.; англ. пер.: Bitsadze A. V. Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 1964. 160 pp.

Поступила в редакцию 21/III/2011;
в окончательном варианте — 23/VIII/2011.

MSC: 35L52

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEM OF EULER–POISSON–DARBOUX EQUATIONS

E. A. Maksimova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: kattyha_mak@mail.ru

The system of Euler–Poisson–Darboux equations is considered, the Cauchy problem is solved for the case, when characteristic numbers of matrix-coefficient are complex conjugate and having real part in the interval $(-1/2, 0)$.

Key words: *Riemann method, the Cauchy problem, partial differential equations, Euler–Poisson–Darboux equation.*

Original article submitted 21/III/2011;
revision submitted 23/VIII/2011.

Ekaterina A. Maksimova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.