Б. А. Гончаров, О. И. Сидорова, Ю. С. Хохлов, Оценка качества обслуживания в неоднородных моделях трафика,
Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, 2018, выпуск 4, 50–63

https://www.mathnet.ru/vtpmk517

УДК 519.216

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЯХ ТРАФИКА[1]

Гончаров Б.А.[*], Сидорова О.И.[**], Хохлов Ю.С.[*]
[*]МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
[**]Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 13.11.2018, после переработки 10.12.2018.

В последние годы наблюдается устойчивый интерес к построению моделей трафика на основе самоподобных процессов. Фрактальное броуновское движение (бета–трафик) и альфа устойчивый процесс Леви (альфа–трафик) являются достаточно гибкими и правдоподобными инструментами для описания поведения нагрузки при разных скоростях соединения источников с сервером (низкая и высокая соответственно). К настоящему времени свойства «чистых» процессов хорошо изучены и проанализировано их влияние на многочисленные характеристики качества обслуживания в мультисервисных сетях. Но модели смешанного характера, включающие обе компоненты одновременно, практически не исследованы. Оценка качества обслуживания для такого трафика — это новая и весьма нетривиальная задача. В данной работе нами получена асимптотическая нижняя граница для вероятности переполнения большого буфера для неоднородной модели входящего трафика, основанной на сумме независимых фрактального броуновского движения и симметричного α–устойчивого движения Леви с разными коэффициентами Херста H_1 и H_2.

Ключевые слова: неоднородные модели телетрафика, оценка качества обслуживания, вероятность переполнения буфера.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 4. С. 50–63.
https://doi.org/10.26456/vtpmk517

Введение

Оценка качества обслуживания (quality of service = QoS) является одной из важнейших задач при создании и конфигурировании современных систем телекоммуникации. На протяжении многих лет при анализе потоков «голосовых» и текстовых сообщений успешно использовались марковские процессы, во многих случаях позволяющие получить явные формулы для расчета стационарных характеристик производительности в рассматриваемых моделях.

Однако информация в современных системах телекоммуникации обладает сложной структурой, кардинально отличной от обычной телефонии или почтовых

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-07-00678).

сервисов. Впервые на этот факт обратили внимание в начале девяностых годов после проведения высокоточных измерений Интернет–трафика в лаборатории Белл (см., например, [2]). Аналитики отметили три важные отличительные особенности, присущие потокам данных в компьютерных сетях: **самоподобие** при широком диапазоне агрегирования трафика, **медленно убывающую корреляционную зависимость** (**долгую память**) наблюдений и **тяжелые хвосты** распределений нагрузки, приходящей от источников.

Теоретические и практические исследования показали, что игнорирование этих особенностей приводит к серьезным ошибкам при оценках QoS. Поэтому потребовалось построение новых моделей трафика, которые обладали бы нужными свойствами. В настоящее время наиболее популярными моделями такого типа являются **дробное броуновское движение** и **устойчивое движение Леви**. Оказалось, что эти модели тесно связаны с тяжелыми хвостами распределений и скоростью соединения удаленных источников с сервером. А именно, при быстром соединении получаем дробное броуновское движение, при медленном — устойчивое движение Леви (см., например, [4]).

В целом ряде эмпирических исследований (см., например, [7] и [8]) было показано, что очень часто трафик содержит обе отмеченные выше компоненты. Для такого трафика не существует работ по оценке качества обслуживания. Отметим только работы [5] и [3], где были получены асимптотические нижние границы вероятности переполнения большого буфера для входящих потоков, основанных на дробном броуновском движении и сумме независимых дробных броуновских движений с разными показателями H. Также в ряде работ ([12] и [13]) для анализа сложных потоков, состоящих из нескольких независимых самоподобных компонент, использовались численные методы.

Недавно в одной из наших работ был получен аналог результата Норроса ([5]) для входящего потока содержащего как дробное броуновское движение, так и устойчивое движение Леви, в предположении что они имеют одинаковые показатели Херста. В настоящей работе мы рассматриваем более общий случай, когда эти показатели могут быть различными.

1. Необходимые понятия

Как отмечалось выше, самоподобные процессы находят широкое применение при моделировании входящих потоков в сложных телекоммуникационных системах. Ниже мы приводим определение подобных процессов и описываем их основные свойства.

1.1. Устойчивые распределения и процессы Леви

Определение 1. *Случайный процесс* $Y = \big(Y(t),\ t \geqslant 0\big)$ *называется* ***процессом Леви***, *если выполнены условия:*

1. $Y(0) = 0$ *почти наверное;*
2. Y *имеет независимые и однородные (по времени) приращения;*

3. *Y является стохастически непрерывным;*

4. *траектории Y непрерывны справа и имеют конечные пределы слева при $t > 0$.*

В силу независимости и однородности приращений, распределение процесса Y полностью и единственным образом определяется распределением с.в. $Y(1)$, которое обладает свойством безграничной делимости.

Наиболее известным примером процесса Леви является броуновское движение (Винеровский процесс).

Определение 2. *Процесс Леви $B = (B(t),\ t \geqslant 0)$ называется* **броуновским движением** *(Brownian Motion = BM), если для любых $t \geq 0,\ h > 0$ случайная величина $B(t+h) - B(t)$ имеет гауссовское распределение со средним 0 и дисперсией $\sigma^2 \cdot h$.*

Если $\sigma^2 = 1$, то говорят, что соответствующее броуновское движение является стандартным. Нетрудно показать, что

$$K(t,s) = Cov(B(t), B(s)) = \sigma^2 \min(t,s).$$

Приращения броуновского движения имеют нормальное распределение. В силу центральной предельной теоремы такие распределения получаются асимптотически для нормированных сумм независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. В случае бесконечных дисперсий приходим к понятию устойчивого распределения. Впервые такие законы были рассмотрены П. Леви.

Определение 3. *Распределение вероятностей F называется* ***устойчивым****, если для любых н.о.р.с.в. X_1, X_2, X_3, имеющих распределение F и любых положительных a_1 и a_2 существуют $a_3 > 0$ и $c \in R^1$ такие, что*

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 \stackrel{d}{=} a_3 X_3 + c,$$

где символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство по распределению.

Если $c = 0$ для всех $a_1, a_2 > 0$, то распределение называется ***строго устойчивым****.*

Устойчивые распределения абсолютно непрерывны, но за исключением трех специальных случаев: $\alpha = 2$ (гауссовское распределение), $\alpha = 1$ (распределение Коши), $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$ (распределение Леви) у их плотностей нет явного аналитического выражения. Поэтому обычно такие распределения описываются в терминах характеристических функций:

$$Ee^{itX} = \begin{cases} \exp\Big\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha \Big(1 - i\beta\, sign(t)\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Big) + i\mu t\Big\}, & \text{если} \quad \alpha \neq 1, \\ \exp\Big\{-\sigma |t| \Big(1 + i\beta \frac{2}{\pi}\, sign(t)\ \ln|t|\Big) + i\mu t\Big\}, & \text{если} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

где $0 < \alpha \leq 2$ — показатель устойчивости; $\beta \in [-1, 1]$ — параметр асимметрии; $\sigma \geq 0$ — параметр масштаба; $\mu \in R^1$ — параметр сдвига.

При $\beta = 0$ имеем симметричное относительно μ устойчивое распределение, характеристическая функция которого при $\mu = 0$ имеет вид

$$Ee^{itX} = \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha\}.$$

Характеристическая экспонента α отвечает за скорость убывания хвоста распределения. Случай $\alpha = 2$ соответствует **нормальному распределению** — единственному из устойчивых законов с конечными математическим ожиданием и дисперсией. При $0 < \alpha < 2$ распределение с.в. X имеет **тяжелый хвост**, поскольку при $x \to \infty$ хвост распределения убывает степенным образом (см., например, [6]), т.е.

$$P(X > x) \sim C_\alpha \cdot \sigma^\alpha \cdot (1 + \beta) \cdot x^{-\alpha}, \quad C_\alpha = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}. \tag{1}$$

Если $0 < \alpha < 1$, $\mu = 0$ и $\beta = 1$, то случайная величина X положительна с вероятностью 1. В дальнейшем будем говорить, что случайная величина X имеет стандартное α–устойчивое распределение, если $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

Полезно отметить следующее важное свойство: если с.в. X имеет α–устойчивое распределение с параметром $0 < \alpha < 2$, то для любого $0 < \gamma < \alpha$,

$$E|X_\alpha|^\gamma < \infty \quad \text{и} \quad E|X_\alpha|^\alpha = \infty.$$

Поэтому при $0 < \alpha < 2$ дисперсия с.в. X и моменты порядка $\gamma > \alpha$ бесконечны и, кроме того, при $0 < \alpha < 1$ математическое ожидание с.в. X также бесконечно.

Обозначим через $S(\alpha, \beta)$ класс α–устойчивых распределений с параметром β (другие параметры не играют важной роли).

α–устойчивое распределение является безгранично делимым. Оно порождает некоторый процесс Леви.

Определение 4. *Случайный процесс* $L_\alpha = (L_\alpha(t),\ t \geqslant 0)$ *называется* α*–устойчивым процессом Леви, если это процесс Леви такой, что* $L_\alpha(1)$ *имеет заданное* α*–устойчивое распределение.*

Если распределение $L_\alpha(1)$ сосредоточено на положительной полуоси ($0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$), то все траектории процесса L_α не убывают и неотрицательны. Такой процесс называется α–**устойчивым субординатором**.

Если $\alpha = 2$, $\mu = 0$, то вновь имеем броуновское движение B.

Существует очень интересная связь между α–устойчивыми движениями Леви с различными α.

Теорема 1. *Если* $(L_{\alpha_1}(t),\ t \geqslant 0)$, $0 < \alpha_1 \leqslant 2$, *есть* α_1*–устойчивое движение Леви с симметричными распределениями,* $(L_{\alpha_2}(t),\ t \geqslant 0)$, $0 < \alpha_2 < 1$, *есть* α_2*–устойчивый субординатор, тогда случайный процесс* $Y = (Y(t) := L_{\alpha_1}(L_{\alpha_2}(t)),\ t \geqslant 0)$ *есть* $\alpha_1 \cdot \alpha_2$*–устойчивое движение Леви с симметричными распределениями.*

Эта теорема есть следствие следующего результата В.М. Золотарева [9] (теорема 3.3.1).

Теорема 2. *Если Y_1 имеет симметричное α_1–устойчивое распределение, $0 < \alpha_1 \leqslant 2$, Y_2 имеет одностороннее α_2–устойчивое распределение, $0 < \alpha_2 < 1$, тогда с.в. $Y = Y_1 \cdot Y_2^{1/\alpha_1}$ имеет симметричное $\alpha_1 \cdot \alpha_2$–устойчивое распределение.*

В частности, для $\alpha_1 = 2$ и $0 < \alpha_2 = \alpha/2 < 1$ мы имеем следующий результат.

Теорема 3. *Если $B = (B(t),\ t \geqslant 0)$ есть броуновское движение, $L_{\alpha/2} = (L_{\alpha/2}(t),\ t \geq 0)$ есть $\alpha/2$–устойчивый субординатор, тогда $L_\alpha = (L_\alpha(t) := B(L_{\alpha/2}(t)),\ t \geqslant 0)$, $0 < \alpha < 2$, есть α–устойчивое движение Леви с симметричными распределениями.*

Также нам потребуется результат, известный как теорема Бреймана [10].

Теорема 4. *Пусть X и Y есть независимые положительные с.в. и*

$$\overline{F}(x) := P(X > x) = x^{-\alpha} \cdot L(x),\ x \to \infty,$$

где $\alpha > 0$, L — медленно меняющаяся функция и $E(Y^{\alpha+\varepsilon}) < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда для больших $x > 0$

$$\overline{H}(x) := P(XY > x) \sim E(Y^\alpha) \cdot \overline{F}(x).$$

2. Самоподобные процессы

Определение 5. *Случайный процесс $Y = (Y(t),\ t \geq 0)$ называется самоподобным с параметром Херста $H > 0$, если он удовлетворяет условию*

$$Z(t) \stackrel{d}{=} c^{-H} Z(ct),\ \forall t \geqslant 0,\ \forall c > 0,$$

где символ $\stackrel{d}{=}$ означает равенство конечномерных распределений.

Одним из наиболее известных и наиболее популярных примеров таких процессов является дробное броуновское движение.

Определение 6. *Дробным броуновским движением с параметром Херста H называется гауссовский процесс $(B_H(t), t \geqslant 0)$ с нулевым средним и ковариационной функцией*

$$K_H(t,s) = \frac{1}{2}\left[|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right].$$

При $H = 1/2$ мы возвращаемся к обычному броуновскому движению.

Другим примером является α-устойчивое движение Леви, определение которого было дано выше. Этот процесс является самоподобным с параметром $H = 1/\alpha$, поскольку при $x \to \infty$

$$P\big(L_\alpha(t) > x\big) = P\big(t^{1/\alpha} L_\alpha(1) > x\big) \sim c_\alpha \cdot t \cdot x^{-\alpha}.$$

Дополнительную информацию об устойчивых и самоподобных процессах можно найти в книгах [1] и [6].

3. Основной результат

3.1. Описание модели

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО), на которую подается следующий входящий поток:

$$A(t) = mt + \sigma_1 B_{H_1}(t) + \sigma_2 L_\alpha(t), \tag{2}$$

где $m = m_1 + m_2 > 0$ — средняя скорость входящего потока; $B_{H_1} = (B_{H_1}(t),\ t \in R^1)$ есть дробное броуновское движение с параметром Херста H_1, $L_\alpha = (L_\alpha(t),\ t \in R^1)$ есть симметричное α–устойчивое движение Леви с параметром $\alpha = 1/H_2$ соответственно.

Таким образом, оба рассматриваемых процесса являются самоподобными с индексами H_1 и $H_2 = 1/\alpha$.

Процесс $A(t),\ t \geqslant 0$ описывает суммарную нагрузку, поступившую в узел связи в интервале времени $[0, t]$.

Предположим, что $1/2 < H_1, H_2 < 1$ и процессы $B_{H_1}(t)$, $L_\alpha(t)$ являются независимыми. Тогда водящий поток можно записать в виде:

$$A(t) = mt + \sigma_1 B_{H_1}(t) + \sigma_2 L_{1/H_2}(t), \quad m = m_1 + m_2. \tag{3}$$

3.2. Оценка вероятности переполнения буфера

Пусть рассматриваемая СМО состоит из одного устройства с постоянной скоростью обслуживания $C > 0$. Тогда интенсивность трафика равна $r = C - m$.

Обозначим через $Q(t)$ текущую нагрузку в момент времени t. Если $Q(0) = 0$, то величина $Q(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$Q(t) \stackrel{d}{=} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} (A(t) - A(s) - C(t - s)), \tag{4}$$

где символ $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство распределений.

При $r > 0$ система является устойчивой, а у случайной величины $Q(t)$ существует стационарное распределение, определяемое выражением

$$Q \stackrel{d}{=} \sup_{t \geqslant 0} (A(t) - Ct)\,. \tag{5}$$

Как отмечалось выше, потоки данных в современных мультисервисных сетях имеют интегральный характер. Они состоят из множества заявок, сгенерированных различными приложениями, зачастую с совершенно разными требованиями к обслуживанию и рабочим характеристикам сети. В таких условиях трафик трудно предсказуем и невозможно заранее резервировать необходимые сетевые ресурсы для его эффективного обслуживания. В связи с чем и возникает проблема адекватной оценки производительности системы, на вход которой поступает такой трафик.

Среди многочисленных показателей производительности СМО одной из важнейших является **вероятность переполнения**, т.е. вероятность того, что стационарная необслуженная нагрузка (длина очереди) превысит некоторый пороговый уровень b, например, размер буфера для систем с конечным накопителем:

$$\varepsilon(b) := P[Q > b]. \tag{6}$$

Сложная структура потоков нагрузки часто не позволяет получить не только «конечные» формулы для расчета характеристик QoS, но и явную асимптотику для них. Однако в ряде случаев можно указать определенные асимптотические границы для исследуемого показателя. В частности, нас будет интересовать оценка снизу для величины $\varepsilon(b)$, в режиме большого буфера, т.е. при $b \to \infty$.

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема 5. *Рассмотрим СМО, в которой имеется один обслуживающий прибор с накопителем размера b и постоянной скоростью обслуживания C. Пусть процесс нагрузки, поступающей в систему на интервале $[0, t]$, описывается моделью (3). Если интенсивность трафика равна $r = C - m > 0$, то для вероятности $\varepsilon(b)$ того, что стационарная нагрузка превысит некоторый уровень b справедлива следующая асимптотическая оценка*

$$\varepsilon(b) = P[Q > b] \geqslant C \cdot b^{-(1-H)\alpha}, \quad b \to \infty, \tag{7}$$

где величина Q определена в (5), $H = \min(H_1, H_2)$, а $C = C(\alpha, r, \sigma, H)$ есть некоторая, явно вычисляемая константа.

Доказательство. Опираясь на свойство самоподобия и метод, предложенный в работе [5], находим

$$\varepsilon(b) := P[Q > b] = P\left(\sup_{t\geqslant 0}\Big(A(t) - Ct\Big) > b\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{t\geqslant 0} P\left[\Big(A(t) - Ct\Big) > b\right] =$$

$$= \sup_{t\geqslant 0} P\Big[mt + \sigma_1 B_{H_1}(t) + \sigma_2 L_\alpha(t) - Ct > b\Big] =$$

$$= \sup_{t\geqslant 0} P\Big[\sigma_1 t^{H_1} B_1(t) + \sigma_2 t^{H_2} L_\alpha(1) > b + rt\Big]. \tag{8}$$

Обозначим $Z := B_H(1)$, $Y := L_\alpha(1)$. Известно [9], что

$$Y \overset{d}{=} Y_1\sqrt{Y_2},$$

где с.в. Y_1 имеет стандартное нормальное распределение, а с.в. $Y_2 = L_\alpha(1)$ имеет одностороннее $\alpha/2$–устойчивое распределение.

Следовательно,

$$\varepsilon(b) \geqslant \sup_{t\geqslant 0} P\left[\sigma_1 t^{H_1} B_1(t) + \sigma_2 t^{H_2} L_\alpha(1) > b + rt\right] =$$

$$= \sup_{t \geqslant 0} P\left[\sigma_1 t^{H_1} Z + \sigma_2 t^{H_2} Y_1 \cdot \sqrt{Y_2} > b + rt\right].$$

Пусть с.в. U имеет стандартное нормальное распределение и не зависит от с.в. Y_2. Тогда

$$\varepsilon(b) \geqslant \sup_{t \geqslant 0} P\left[\sigma_1 t^{H_1} Z + \sigma_2 t^{H_2} Y_1 \cdot \sqrt{Y_2} > b + rt\right] =$$

$$= \sup_{t \geqslant 0} E_{Y_2}\left[P\left(\sqrt{\sigma_1^2 t^{2H_1} + \sigma_2^2 t^{2H_2} Y_2} \cdot U > b + rt \middle| Y_2\right)\right] =$$

$$= \sup_{t \geqslant 0} P\left(\sqrt{\sigma_1^2 t^{2H_1} + \sigma_2^2 t^{2H_2} Y_2} \cdot U > b + rt\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{t \geqslant 0} P\left(\sqrt{\sigma_1^2 t^{2H_1} + \sigma_2^2 t^{2H_2} Y_2} \cdot |U| > b + rt\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{t \geqslant 0} P\Big(\big(\sigma_1^2 t^{2H_1} + \sigma_2^2 t^{2H_2} Y_2\big) \cdot |U|^2 > (b + rt)^2\Big). \tag{9}$$

Далее мы рассматриваем отдельно два случая: $H_1 > H_2$ и $H_1 < H_2$.

Пусть $H_1 > H_2$. Если $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $2(H_2 - H_1) < 0$ и $t^{2(H_2 - H_1)} > 1$. Поэтому мы получаем

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} P\Big(\big(\sigma_1^2 t^{2H_1} + \sigma_2^2 t^{2H_2} Y_2\big) \cdot |U|^2 > (b + rt)^2\Big) =$$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} P\left(\big(1 + t^{2(H_2 - H_1)} \cdot \tilde{\sigma}^2 \cdot Y_2\big) \cdot |U|^2 > \left(\frac{b + rt}{\sigma_1 t^{H_1}}\right)^2 = \big(\tau_1(t)\big)^2\right),$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma_2 / \sigma_1$.

Рассмотрим более подробно поведение функции

$$\tau_1(t) = \frac{b + rt}{\sigma_1 t^{H_1}}.$$

Ее производные равны

$$\tau_1'(t) = \frac{r(1 - H_1)t - bH_1}{\sigma_1 t^{H_1 + 1}}, \quad \tau_1''(t) = \frac{r(1 - H_1)t - \big(r(1 - H_1)t - bH_1\big)(H_1 + 1)}{\sigma_1 t^{H_1 + 2}}.$$

Записывая необходимое условие экстремума, получаем

$$\tau_1'(t) = \frac{r(1 - H_1)t - bH_1}{\sigma_1 t^{H_1 + 1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1^* = \frac{bH_1}{r(1 - H_1)}.$$

А поскольку $\sigma_1 t^{H_1 + 2} \geqslant 0$ и

$$r(1 - H_1)t_1^* - \big(r(1 - H_1)t_1^* - bH_1\big)(H_1 + 1) = bH_1 > 0,$$

то t_1^* есть точка минимума $\tau_1(t)$.

Заметим, однако, что для больших b число $t_1^* > 1$. Функция $\tau_1(t)$ положительна и монотонно убывает, поэтому минимальное значение на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ она достигает в точке $t = 1$, и оно равно

$$\tau_1(1) = \frac{b+r}{\sigma_1}. \tag{10}$$

Пусть теперь $t > 1$. Тогда $2(H_1 - H_2) > 0$ и $t^{2(H_1-H_2)} > 1$. Следовательно,

$$\sup_{t>1} P\Big(\big(\sigma_1^2 t^{2H_1} + \sigma_2^2 t^{2H_2} Y_2\big) \cdot |U|^2 > (b+rt)^2\Big) =$$

$$\sup_{t>1} P\left(\big(\tilde{\sigma}_1^2 t^{2(H_2-H_1)} + Y_2\big) \cdot |U|^2 > \left(\frac{b+rt}{\sigma_2 t^{H_2}}\right)^2\right) =$$

$$\sup_{t>1} P\left(\big(\tilde{\sigma}_1^2 + Y_2\big) \cdot |U|^2 > \left(\frac{b+rt}{\sigma_2 t^{H_2}}\right)^2 = \big(\tau_2(t)\big)^2\right),$$

где $\tilde{\sigma}_1 = 1/\tilde{\sigma}$.

Исследуем поведение функции

$$\tau_2(t) = \frac{b+rt}{\sigma_2 t^{H_2}}.$$

Ее производные равны

$$\tau_2'(t) = \frac{r(1-H_2)t - bH_2}{\sigma_1 t^{H_2+1}}, \quad \tau_2''(t) = \frac{r(1-H_2)t - \big(r(1-H_2)t - bH_2\big)(H_2+1)}{\sigma_2 t^{H_2+2}}.$$

Записывая необходимое условие экстремума, получаем

$$\tau_2'(t) = \frac{r(1-H_2)t - bH_2}{\sigma_2 t^{H_2+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2^* = \frac{bH_2}{r(1-H_2)}.$$

Поскольку $\sigma_2 t^{H_2+2} \geqslant 0$ и

$$r(1-H_2)t_2^* - \big(r(1-H_2)t_2^* - bH_2\big)(H_2+1) = bH_2 > 0,$$

то t_2^* есть точка минимума $\tau_2(t)$.

Минимальное значение самой функции имеет вид

$$\tau(t_2^*) = \frac{(1-H_2)^{1-H_2} \cdot (1+H_2) \cdot r^{H_2}}{\sigma_2 \cdot H_2^{H_2}} \cdot b^{1-H_2} = C_1(H_2, r, \sigma_2) \cdot b^{1-H_2}. \tag{11}$$

Для оценки $\varepsilon(b)$ нам нужно сравнить минимальные значения (10) и (11). Поскольку $0 < 1 - H_2 < 0.5$, то при больших b

$$\tau_1(1) > \tau_2(t_2^*), \quad b \to \infty,$$

следовательно,

$$\varepsilon(b) \geqslant \frac{1}{2} P\left(\big(\tilde{\sigma}^2 t^{2(H_2-H_1)} + Y_2\big)|U|^2 > C_1^2 b^{2(1-H_2)}\right),$$

где $C_1 = C_1(H_2, r, \sigma_2)$.

В силу (1) для с.в. Y_2, имеющей одностороннее $\alpha/2$–устойчивое распределение, справедливо

$$\overline{F}(x) = P\big(\tilde{\sigma}^2 + Y_2 > x\big) \sim P(Y_2 > x) \sim C_{\alpha/2} \cdot x^{-\alpha/2}, \quad x \to \infty.$$

Положим $X = \tilde{\sigma}^2 + Y_2$ и $Y = |U|^2$ (очевидно, что обе с.в. положительны). Тогда по теореме Бреймана для больших $x > 0$ имеем

$$P\big(XY > x\big) = P\big(X > x\big) \cdot E\big(Y^{\alpha}\big) \sim C_{\alpha/2} \cdot x^{-\alpha/2} \cdot E\big(|Y|^{\alpha/2}\big),$$

где

$$E\big(|Y|^{\alpha/2}\big) = E\big(|U|^{\alpha}\big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|^{\alpha} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, du = \frac{2 \cdot 2^{\frac{\alpha-1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} z^{\frac{\alpha+1}{2}-1} \cdot e^{-z}\, dz =$$

$$= \frac{2^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Объединяя все промежуточные результаты, получаем, что при $r = C - m > 0$ и $b \to \infty$

$$\varepsilon(b) \geqslant \frac{1}{2} P\left(\big(\tilde{\sigma}_2 + Y_2\big)|U|^2 > C_1^2 b^{2(1-H_2)}\right) \sim$$

$$\sim \frac{E(|U|^{\alpha})}{2} \cdot \overline{F}_{Y_2}\Big(C_1^2 b^{2(1-H_2)}\Big) \sim \frac{C_{\alpha/2} \cdot C_1^{\alpha} \cdot E(|U|^{\alpha})}{2} \cdot b^{-\alpha(1-H_2)} =$$

$$= C_2(\alpha, r, \sigma_2, H_2) \cdot b^{-(1-H_2)\alpha}, \tag{12}$$

где константа $C_2 = C_2(\alpha, r, \sigma_2, H_2)$ имеет вид

$$C_2 = \frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot (1-H_2)^{\alpha-1} \cdot (1+H_2)^{\alpha} \cdot r}{2^{(2-\alpha)/2} \cdot \pi^{3/2} \cdot \sigma_2^{\alpha} \cdot H_2}. \tag{13}$$

Аналогичным образом анализируя случай $H_1 < H_2$, находим, что

$$\varepsilon(b) \geqslant \frac{1}{2} P\left(\big(1 + \tilde{\sigma}^2 Y_2\big)|U|^2 > C_3^2 b^{2(1-H_1)}\right).$$

Далее, опираясь на свойства устойчивых распределений и теорему Бреймана, получаем, что при $b \to \infty$

$$\varepsilon(b) \geqslant C_4(\alpha, r, \sigma_2, H_1) \cdot b^{-(1-H_1)\alpha}, \tag{14}$$

где константа $C_4 = C_4(\alpha, r, \sigma_2, H_1)$ имеет вид

$$C_4 = \frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \cdot (1-H_1)^{\alpha(H_1-1)} \cdot (1+H_1)^{\alpha} \cdot r^{\alpha H_1}}{2^{(2-\alpha)/2} \cdot \pi^{3/2} \cdot \sigma_2^{\alpha} \cdot H_1^{\alpha H_1}}. \tag{15}$$

Обозначим $H = \min(H_1, H_2)$. Тогда окончательный результат имеет вид:

$$\varepsilon(b) \geqslant C_5(\alpha, r, \sigma, H) \cdot b^{-(1-H)\alpha}, \quad C_5 = \begin{cases} C_2, & H = H_1, \\ C_4, & H = H_2. \end{cases} \tag{16}$$

$\square$

Заключение

В данной статье была получена асимптотическая нижняя граница для вероятности переполнения $\varepsilon(b)$ большого буфера телекоммуникационной системы, трафик которой описывается суммой двух независимых самоподобных процессов, фрактального броуновского движения и симметричного α–устойчивого движения Леви, с возможно разными коэффициентами самоподобия H_1 и $H_2 = 1/\alpha$.

Получившаяся оценка

$$\varepsilon(b) \geqslant C_5 \cdot b^{-(1-H)\alpha}, \quad b \to \infty,$$

где $H = \min(H_1, H_2)$ и C_5 есть явно вычисляемая константа, простая и удобная для практического применения.

Но в связи с ее асимптотическим характером возникает отдельная интересная задача об установлении размера буфера, начиная с которого данная асимптотика будет справедливой. Для решения этой задачи нужно строить имитационную модель рассматриваемой системы, чему будет посвящена отдельная статья.

Список литературы

[1] Embrechts P., Maejima M. Selfsimilar Process. Prinston University Press, 2002.

[2] Leland W., Taqqu M., Willinger W., Wilson D. On the selfsimilar nature of Ethernet traffic (extended version) // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1994. Vol. 2, № 1. Pp. 1–15.

[3] Matache M.T., Matache V. Queueing systems for multiple FBM–based traffic models // The ANZIAM Journal. 2005. Vol. 46, № 3. Pp. 361–377.

[4] Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? // Annals of Applied Probability. 2002. Vol. 12, № 1. Pp. 23–68.

[5] Norros I. A storage model with self–similar input // Queueing Systems. 1994. Vol. 16. Pp. 387–396.

[6] Samorodnitsky G., Taqqu M.S. Stable Non–Gaussian Random Processes. Chapman and Hall, 1994.

[7] Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R. Connection-level Analysis and Modeling of Network Traffic. Technical Report, Department of Electrical and Computer Engineering, Rice University. 2001.

[8] Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R. Connection-level Analysis and Modeling of Network Traffic // Proceedings of the 1st ACM SIGCOMM Workshop on Internet measurement, IMW ’01 (San Francisco, California, USA). 2001. Pp. 99–103. http://dx.doi.org/10.1145/505202.505215

[9] Zolotarev V.M. One-dimensional stable distributions. Translations of Mathematical Monographs. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1986.

[10] Breiman L. On some limit theorems similar to the arc-sin law // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10, № 2. С. 351–359. https://doi.org/10.1137/1110037

[11] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

[12] Шмелев И.В. Влияние фрактальных процессов на сетевой телетрафик в современных распределенных информационных сетях // Реинжиниринг бизнес–процессов на основе информационных технологий. М.: Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2004. С. 11–12.

[13] Шмелев И.В. Модель трафика мультисервисной сети на основе смеси самоподобных процессов // Международный форум информатизации МФИ. М.: МТУСИ, 2004. С. 12.

Образец цитирования

Гончаров Б.А., Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. Оценка качества обслуживания в неоднородных моделях трафика // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. №4. С. 50–63. https://doi.org/10.26456/vtpmk517

Сведения об авторах

1. **Гончаров Борис Алексеевич**
студент факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: ultrabormas@gmail.com

2. **Сидорова Оксана Игоревна**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: oksana.i.sidorova@yandex.ru

3. **Хохлов Юрий Степанович**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: yskhokhlov@yandex.ru

PERFORMANCE ESTIMATION IN NONHOMOGENEOUS TRAFFIC MODELS

Goncharov Boris Alekseevich
Student of Computational Mathematics and Cybernetics faculty,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: ultrabormas@gmail.com

Sidorova Oksana Igorevna
Associate professor at Mathematical Statistics and System Analysis department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: oksana.i.sidorova@yandex.ru

Khokhlov Yury Stepanovich
Professor at Mathematical Statistics department, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: yskhokhlov@yandex.ru

Received 13.11.2018, revised 10.12.2018.

The last few decades reveal a steady interest in traffic models based on self–similar processes. The Fractal Brownian motion (beta–traffic, low connection speed) and α–stable Levy process (α–traffic, high connection speed) are quite flexible and convenient tools for modeling the system load. Currently, the properties of «pure» processes including their influence on different performance measures in multiservice networks are well studied. But the compound traffic models based on both components are practically not analysed at all. Estimation of the QoS characteristics for such models is a new and a very nontrivial problem. In this paper we analyse the nonhomogenous traffic model based on sum of independent Fractional Brownian motion and symmetric α–stable Levy process with different Hurst exponents H_1 and H_2. For such model we find asymptotical lower bound for the overflow probability when the size of buffer $b \to \infty$.

Keywords: nonhomogeneous teletraffic models, quality of service estimation, overflow probability.

Citation

Goncharov B.A., Sidorova O.I., Khokhlov Yu.S., “Performance estimation in nonhomogeneous traffic models”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 4, 50–63. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk517

References

[1] Embrechts P., Maejima M., *Selfsimilar Process*, Prinston University Press, 2002.

[2] Leland W., Taqqu M., Willinger W., Wilson D., “On the selfsimilar nature of Ethernet traffic (extended version)”, *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **2**:1 (1994), 1–15.

[3] Matache M.T., Matache V., “Queueing systems for multiple FBM–based traffic models”, *The ANZIAM Journal*, **46**:3 (2005), 361–377.

[4] Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A., “Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion?”, *Annals of Applied Probability*, **12**:1 (2002), 23–68.

[5] Norros I., “A storage model with self–similar input”, *Queueing Systems*, **16** (1994), 387–396.

[6] Samorodnitsky G., Taqqu M.S., *Stable Non–Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, 1994.

[7] Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R., *Connection-level Analysis and Modeling of Network Traffic*, Technical Report, Department of Electrical and Computer Engineering, Rice University, 2001.

[8] Sarvotham S., Riedi R., Baraniuk R., “Connection-level Analysis and Modeling of Network Traffic”, *Proceedings of the 1st ACM SIGCOMM Workshop on Internet measurement*, IMW ’01 (San Francisco, California, USA), 2001, 99–103, http://dx.doi.org/10.1145/505202.505215.

[9] Zolotarev V.M., *One-dimensional stable distributions*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.

[10] Breiman L., “On some limit theorems similar to the arc-sin law”, *Theory of Probability and its Applications*, **10**:2 (1965), 323–331, https://doi.org/10.1137/1110037.

[11] Ibragimov I.A., Linnik Yu.V., *Nezavisimye i statsionarno svyazannye velichiny [Independent and stationary sequences of random variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1965 (in Russian), 524 pp.

[12] Shmelev I.V., “Influence of fractal processes on network teletraffic in modern distributed information networks”, *Reinzhiniring biznes–protsessov na osnove informatsionnykh tekhnologij [Business process reengineering based on information technology]*, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics, Moscow, 2004, 11–12 (in Russian).

[13] Shmelev I.V., “Multiservice network traffic model based on a mixture of self-similar processes”, *Mezhdunarodnyj forum informatizatsii MFI [nternational Informatization Forum MFI]*, MTUCI, Moscow, 2004, 12 (in Russian).