Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Шеретов, О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2017, выпуск 1, 85–94

DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:10:19

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.95, 532.5

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ СТАЦИОНАРНЫХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Шеретов Ю.В.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 10.01.2017, после переработки 20.02.2017.

Построены два новых точных решения стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах. Первое решение является общим для систем Эйлера и Навье–Стокса. Второе удовлетворяет системе Навье–Стокса, но не является точным решением уравнений Эйлера. Оба решения описывают вихревые структуры в жидкости.

Ключевые слова: системы Эйлера и Навье–Стокса, квазигидродинамические уравнения, цилиндрические координаты, точные решения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 85–94.

Введение

Вихревые образования в жидкости исследовались главным образом в рамках моделей Эйлера и Навье–Стокса [1, 2]. Постоянная средняя плотность жидкости ρ входит в качестве параметра в обе указанные модели. Система Навье–Стокса включает еще одну физически осмысленную положительную константу – коэффициент вязкости (динамический или кинематический). Экспериментально измеряемая скорость звука c_s не является определяющим параметром в системе Навье–Стокса. Однако скорость распространения возмущений в сплошной среде не может не оказывать влияния на характер ее течения.

В 1993 г. автором данной статьи была предложена еще одна математическая модель течений жидкости, получившая название квазигидродинамической (КГД) [3]. Эта система, содержащая c_s в качестве параметра, стала предметом многочисленных исследований [4, 5]. Были выявлены ее глубокие связи с классическими уравнениями Эйлера и Навье–Стокса. Система КГД использовалась для построения численных методов решения системы Навье–Стокса в естественных переменных, как двумерном, так и в трехмерном случае [6, 7]. В настоящей работе построены два новых точных решения стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах. Первое решение является общим для систем Эйлера и Навье–Стокса. Второе удовлетворяет системе Навье–Стокса, но не является точным решением уравнений Эйлера. Оба решения описывают вихревые структуры в жидкости.

1. Общее точное решение стационарных систем Навье–Стокса, Эйлера и квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах

Стационарная система Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости без учета влияния внешних сил в цилиндрических координатах может быть записана следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \\ & = 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \\ & = 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial\sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\varphi r}}{r} \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r u_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi u_z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \\ & = 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Символом ρ обозначена плотность жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости. Величины ρ и ν считаются заданными положительными постоянными. Компоненты тензора скоростей деформаций определяются с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right], \\ \sigma_{\varphi z} &= \sigma_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{zr} &= \sigma_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Связь декартовых координат $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ с цилиндрическими координатами (r, φ, z) дается равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Неизвестными величинами являются компоненты $u_r = u_r(r, \varphi, z)$, $u_\varphi = u_\varphi(r, \varphi, z)$, $u_z = u_z(r, \varphi, z)$ вектора скорости $\vec{u}$ в ортонормированном локальном базисе ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$) и давление $p = p(r, \varphi, z)$.

Если в системе Навье–Стокса (1.1) – (1.4) пренебречь вязкими членами, то получим классическую систему Эйлера в динамике идеальной жидкости:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r u_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi u_z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (1.9)$$

Для $r > 0$ определим функции

$$u_r = -\frac{ar}{2}, \quad u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad u_z = az, \quad (1.10)$$

$$p = p(r, z) = p_0 + \frac{\rho a^2}{8} ((r_0^2 - r^2) + 4(z_0^2 - z^2)) + \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (1.11)$$

Здесь a и Γ – постоянные величины. Символом p_0 обозначено значение давления в точке (r_0, z_0) , где $r_0 > 0$. Подставим (1.10) в (1.5). Получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{a}{2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{a}{2}, \quad \sigma_{zz} = a, \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{\varphi r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}, \quad \sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{rz} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= 0, \\ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Принимая во внимание равенства (1.12) и (1.13), нетрудно убедиться в том, что набор функций (1.10), (1.11) образует точное решение как системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4), так и системы Эйлера (1.6) – (1.10). При $\Gamma \neq 0$ это решение описывает стационарный вихрь в жидкости.

Выпишем квазигидродинамическую систему без учета влияния внешних сил в цилиндрических координатах для случая установившихся течений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rw_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \\ & = 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right) + \\ & + \frac{2}{r} \frac{\partial(rw_r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w_\varphi u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z u_r)}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi w_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z w_r)}{\partial z} - 2 \frac{u_\varphi w_\varphi}{r}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \\ & = 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial\sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\varphi r}}{r} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial(rw_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial(w_\varphi u_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(w_z u_\varphi)}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r w_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z w_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r w_\varphi + u_\varphi w_r}{r}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r u_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi u_z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \\ & = 2\nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial(rw_r u_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(w_\varphi u_z)}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial(w_z u_z)}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r w_z)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\varphi w_z)}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_r &= \tau \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \\ w_\varphi &= \tau \left(u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

$$w_z = \tau \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (1.18)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций вычисляются по формулам (1.5).

Система (1.14) – (1.17) отличается от (1.1) – (1.4) слагаемыми, содержащими постоянный положительный множитель τ , имеющий размерность времени. Незвестными величинами в ней являются проекции вектора скорости $u_r = u_r(r, \varphi, z)$, $u_\varphi = u_\varphi(r, \varphi, z)$, $u_z = u_z(r, \varphi, z)$ и давление $p = p(r, \varphi, z)$. Параметр τ может быть определен с помощью выражения

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}, \quad (1.19)$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Для воды при температуре $T_0 = 293.15$ K и нормальном атмосферном давлении $p_0 = 1.01325 \cdot 10^6$ дин/см² плотность $\rho = 1$ г/см³, кинематическая вязкость $\nu = 0.01$ см²/с, скорость звука $c_s = 1.483 \cdot 10^5$ см/с. С помощью (1.19) находим $\tau = 4.5469 \cdot 10^{-13}$ с.

Покажем, что набор функций (1.10), (1.11) образует точное решение квазигидродинамической системы (1.14) – (1.17). Подстановка (1.13) в (1.18) приводит к равенствам

$$w_r = 0, \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = 0.$$

Таким образом, τ -члены в КГД системе обнуляются и она переходит в систему Навье–Стокса. Найденное решение можно рассматривать как иллюстрирующий пример к теореме, доказанной в [5] на с. 95. В газовой динамике другое вихревое решение, общее для стационарных систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД, построено в [8].

2. Общее точное решение системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах, не удовлетворяющее уравнениям Эйлера

Будем искать точное решение системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4) в виде

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = \Omega r + \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad u_z = \frac{A}{4\nu\rho} r^2 + B \ln r + C, \quad (2.1)$$

$$p = p(r, z). \quad (2.2)$$

Здесь Ω , Γ , A , B и C – постоянные величины. Будем считать, что одна из констант Ω или Γ отлична от нуля. Постоянная A не равна нулю. С помощью (2.1) и (1.5) найдем компоненты тензора скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}, \\ \sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \frac{A}{4\nu\rho} r + \frac{B}{r}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подстановка (2.1) в (1.1) – (1.4) приводит к соотношениям

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho u_\varphi^2}{r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = A. \quad (2.4)$$

Фиксируем точку (r_0, z_0) , где $r_0 > 0$. Пусть p_0 – давление в этой точке. Используя (2.4) и (2.1), находим

$$\begin{aligned} p = p(r, z) &= \int_{r_0}^r \frac{\rho u_\varphi^2(r_*)}{r_*} dr_* + A(z - z_0) = \\ &= \frac{\rho \Omega^2}{2} (r^2 - r_0^2) + \frac{\rho \Omega \Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + A(z - z_0), \quad r > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Набор функций (2.1), (2.5) образует точное решение системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4).

Поскольку $A \neq 0$, построенное решение не удовлетворяет уравнениям Эйлера (1.6) – (1.9). Покажем, что оно является точным для квазигидродинамической системы (1.14) – (1.18). Подстановка (2.1), (2.5) в (1.18) дает

$$w_r = 0, \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = \frac{\tau A}{\rho}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что все τ -члены в КГД системе обращаются в ноль. Еще одно точное вихревое решение стационарной квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах построено.

Заключение

В научной литературе известны другие вихревые решения стационарных уравнений гидродинамики. Нидерландский физик Йоханнес Мартинус Бюргерс в 1948 году построил точное решение системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4), описывающее вихрь в жидкости [9, 10]. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{ar}{2}, \quad u_\varphi = u_{ns}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{ar^2}{4\nu}\right)\right], \quad u_z = az, \\ p = p(r, z) &= p_1 - \frac{\rho a^2}{8} (r^2 + 4z^2) - \rho \int_r^{+\infty} \frac{u_{ns}^2(r_*)}{r_*} dr_*, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Здесь $a = \text{const} > 0$, $\Gamma = \text{const} \neq 0$, $p_1 = \text{const}$.

Еще одно решение системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4) было найдено в 1963 году Ратипом Беркером (см. [2], с. 201). Компоненты поля скорости выглядят следующим образом:

$$u_r = \frac{2A}{R^2} rz, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = 2A \left(1 - \frac{2r^2 + z^2}{R^2}\right),$$

где $R = \text{const} > 0$, $A = \text{const} \neq 0$, $r > 0$. Решение системы Эйлера в динамике идеальной жидкости, опубликованное в 1893 году Михеем Хиллом и описывающее шаровой вихрь, имеет те же составляющие вектора скорости. Отличаются лишь распределения давления

$$p = p_{ns}(r, z) = p_1 + \rho A^2 \left[\left(\frac{r}{R}\right)^4 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{R}\right)^4 + 4\left(\frac{z}{R}\right)^2 \right] - \frac{20\rho\nu A}{R^2} z$$

и

$$p = p_{eu}(r, z) = p_1 + \rho A^2 \left[\left(\frac{r}{R} \right)^4 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2 \left(\frac{z}{R} \right)^4 + 4 \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right],$$

поскольку функция $p_{ns}(r, z)$ зависит от параметра ν , а функция $p_{eu}(r, z)$ от него не зависит. Попытки автора построить точные решения квазигидродинамических уравнений (1.14) – (1.17), описывающие вихри Бюргерса и Хилла, пока к успеху не привели.

Список литературы

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
- [2] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
- [3] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.
- [4] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.
- [5] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. 222 с.
- [6] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: “Lambert Academic Publishing”, 2010. 124 с.
- [7] Елизарова Т.Г., Милюкова О.Ю. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости в кубической камере // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, № 3. С. 453–466.
- [8] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях полных квазигидродинамических уравнений для стационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 93–101.
- [9] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Applied Mechanics. 1948. V. 1. Pp. 171–199.
- [10] Брутян М.А. Вихрь Бюргерса в микрополярной жидкости // Доклады НАН Армении. 2010. № 1. С. 35–41.

Библиографическая ссылка

Шеретов Ю.В. О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 85–94.

Сведения об авторах**1. Шеретов Юрий Владимирович**

заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru.

ON THE EXACT SOLUTIONS OF STATIONARY QUASI-HYDRODYNAMIC EQUATIONS IN CYLINDRICAL COORDINATES

Sheretov Yurii Vladimirovich

Head of Mathematical Analysis department, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 10.01.2017, revised 20.02.2017.

Two new exact solutions of stationary quasi-hydrodynamic equations in cylindrical coordinates are constructed. First solution is common for Euler and Navier-Stokes systems. The second solution satisfies to Navier-Stokes system, but it is not exact solution for Euler equations. Both solutions describe vortex structures in the fluid.

Keywords: Euler and Navier-Stokes systems, quasi-hydrodynamic equations, cylindrical coordinates, exact solutions.

Bibliographic citation

Sheretov Yu.V. On the exact solutions of stationary quasi-hydrodynamic equations in cylindrical coordinates. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 1, pp. 85–94. (in Russian)

References

- [1] Loytsyansky L.G. *Mekhanika Zhidkosti i Gaza* [Fluid and Gas Mechanics]. "Nauka" Publ., Moscow, 1987. 840 p. (in Russian)
- [2] Shmyglevskii Yu.D. *Analiticheskie Issledovaniya Dinamiki Gaza i Zhidkosti* [Analytical Investigation of Fluid and Gas Dynamics]. "Editorial URSS" Publ., Moscow, 1999. 232 p. (in Russian)
- [3] Sheretov Yu.V. On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 1994, vol. 6(10), pp. 35–45. (in Russian)
- [4] Sheretov Yu.V. *Dinamika Sploshnykh Sred pri Prostranstvenno-Vremennom Osrednenii* [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]. "Regular and Chaotic Dynamics" Publ., Moscow, Izhevsk, 2009. 400 p.
- [5] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannyye Uravneniya Gidrodinamiki* [Regularized Hydrodynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2016. 222 p. (in Russian)

- [6] Zherikov A.V. *Primenenie Kvazigidrodinamicheskikh Uravnenii: Matematicheskoe Modelirovanie Tsecheniy Vyazkoi Neszhimaemoi Zhidkosti* [Application of Quasi-Hydrodynamic Equations: Mathematical Modeling of Viscous Incompressible Fluid]. Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010. 124 p. (in Russian)
- [7] Elizarova T.G., Milyukova O.Yu. Numerical simulation of viscous incompressible flow in a cubic cavity. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43(3), pp. 433–445.
- [8] Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V. On the exact solutions of full quasi-hydrodynamic equations for stationary flows. *Vestnik TsvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 93–101. (in Russian)
- [9] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*. “Academic Press” Publ., New York, 1948, vol. 1, pp. 171–199.
- [10] Brutyan M.A. Burgers vortex in a micropolar fluid. *Doklady NAN Armenii* [National Academy of Sciences of Armenia Reports], 2010, no. 1, pp. 35–40. (in Russian)