Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Шеретов, О точных решениях квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки-Бельтрами, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2018, выпуск 3, 5–18

DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:47:26

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.95, 532.5

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБОБЩЕННОМУ УСЛОВИЮ ГРОМЕКИ-БЕЛЬТРАМИ

Шеретов Ю.В.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 27.06.2018, после переработки 02.09.2018.

Квазигидродинамическая система была предложена автором в 1993 г. Она имеет глубокие связи с классическими уравнениями Навье–Стокса. В данной работе построены точные решения квазигидродинамической системы, подчиняющиеся обобщенному условию Громеки–Бельтрами. Эти решения удовлетворяют также системе Навье–Стокса и были найдены ранее для неё другим способом. В нестационарном случае они обобщают известное решение Джеффри Инграма Тейлора.

Ключевые слова: системы Навье–Стокса и Эйлера, квазигидродинамическая система, точные решения, обобщенное условие Громеки–Бельтрами.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 5–18.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk507>

Введение

Научное направление, связанное с построением точных решений классической системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости, привлекало внимание многих ученых [1–4]. Особый интерес представляют решения, удовлетворяющие обобщенному условию Громеки–Бельтрами и не являющиеся винтовыми [5–7]. В 1993 г. автором была предложена квазигидродинамическая (КГД) система уравнений, описывающая движения слабосжимаемой вязкой жидкости [8]. Она стала объектом многочисленных исследований, часть из которых изложена в монографиях [9,10]. Выявлены глубокие связи КГД системы с моделями Эйлера и Навье–Стокса. Данная статья является продолжением работ [11,12]. Основное внимание в ней уделено построению точных решений квазигидродинамической системы, подчиняющихся обобщенному условию Громеки–Бельтрами и не являющихся однородно-винтовыми. Эти решения удовлетворяют также системе Навье–Стокса и были построены ранее для нее другим способом [4–6]. В нестационарном случае они обобщают известное решение Джеффри Инграма Тейлора.

1. Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости. Системы Навье–Стокса и Эйлера

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости может быть записана следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 2\nu \operatorname{div} \hat{\sigma} + \operatorname{div} [(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})]. \quad (1.2)$$

Здесь $\hat{\sigma}$ – тензор скоростей деформаций, определяемый по формуле

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2} [(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T].$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется с помощью выражения

$$\vec{w} = \tau \left((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p \right).$$

Параметр

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}$$

интерпретируется как характерное время релаксации. Символом c_s обозначена скорость звука в жидкости. Влияние внешних массовых сил не учитывается. В записи системы (1.1) – (1.2), замкнутой относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$, использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ задает точку в пространстве $\mathbb{R}_x^3$, t – время. Символами div и ∇ обозначены операторы дивергенции и градиента. Система содержит положительные константы – плотность ρ и коэффициент кинематической вязкости ν . Коэффициенты динамической вязкости η и кинематической вязкости ν связаны соотношением $\nu = \eta/\rho$. Классическая система Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \vec{u}. \quad (1.4)$$

Она может быть получена из (1.1) – (1.2) формальным предельным переходом при $\tau \rightarrow +0$. Если же в (1.3) – (1.4) перейти к пределу при $\nu \rightarrow +0$, то получим систему Эйлера

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (1.6)$$

Выявлению глубоких связей между системами Эйлера, Навье–Стокса и КГД посвящены монографии [9, 10].

2. Общие решения системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений. Обобщенное условие Громеки–Бельтрами

Пусть $(\vec{x}, t) \in \Omega = \{(\vec{x}, t) : \vec{x} \in \mathbb{R}_x^3, t \geq 0\} \subset \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$. Добавим к системам Эйлера, Навье–Стокса и КГД начальное условие

$$\vec{u} \Big|_{t=0} = \vec{u}_0, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}_x^3. \quad (2.1)$$

Функция $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ является бесконечно дифференцируемой. Для нее выполнено условие

$$\operatorname{div} \vec{u}_0 = 0. \quad (2.2)$$

Давление $p = p(\vec{x}, t)$ во всех трех системах определено с точностью до произвольной функции времени. Предположим, что $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ – бесконечно дифференцируемая на Ω вектор-функция. Ротор поля $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ вычисляется по формуле

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты правой прямоугольной системы координат $oxyz$. Величины u_x, u_y, u_z есть проекции вектора скорости на соответствующие оси. Символы $\cdot$ и $\times$ используются для обозначения операций скалярного и векторного произведения. В [12] доказана

Теорема 1. Пусть бесконечно дифференцируемая на Ω вектор-функция $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ удовлетворяет трем условиям

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{u}, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{rot} [\vec{u} \times \vec{\omega}] = 0. \quad (2.6)$$

Тогда пара функций $(\vec{u}, p)$, где

$$p = \rho \left(C(t) - \frac{\vec{u}^2}{2} + \Psi \right), \quad (2.7)$$

является решением как системы Навье–Стокса (1.3) – (1.4), так и квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2). Здесь $C(t)$ – любая непрерывная при $t \geq 0$ функция, $\vec{u}^2 = (\vec{u} \cdot \vec{u}) = |\vec{u}|^2$. Потенциал $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$ определяется с помощью выражения

$$\Psi = \int_{\gamma} ([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}) \, ds = \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} ([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}) \, ds, \quad (2.8)$$

где γ – произвольно выбранная кусочно-гладкая кривая в пространстве $\mathbb{R}_x^3$, соединяющая точки $\vec{x}_0$ и $\vec{x}$, $\vec{l}$ – единичный касательный вектор к γ , ds – элемент ее длины.

Равенство (2.6) называется *обобщенным условием Громеки–Бельтрами*. Оно может быть представлено в эквивалентной форме

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega}. \quad (2.9)$$

Течение называется однородно-винтовым, если существует такая постоянная $\lambda \neq 0$, что

$$\vec{\omega} = \lambda \vec{u}, \quad (\vec{x}, t) \in \Omega.$$

Для этих течений условия (2.6) и (2.9) выполняются. Примеры общих однородно-винтовых решений систем Навье–Стокса и КГД приведены в [12].

3. Примеры точных решений нестационарной квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами

Используя сформулированную в предыдущем пункте теорему, построим общие для систем КГД и Навье–Стокса решения, не относящиеся к классу однородно-винтовых.

Пример 1. Пусть векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ в правой декартовой системе координат имеет компоненты

$$u_x = -\frac{A}{H} \cos\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{H}\right) e^{-\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \quad (3.1)$$

$$u_y = \frac{A}{L} \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{H}\right) e^{-\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \quad (3.2)$$

$$u_z = 0. \quad (3.3)$$

Здесь A – положительная постоянная, имеющая размерность $см^2/с$. Символами L и H обозначены положительные константы, имеющие размерность $см$. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенств

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right). \quad (3.7)$$

Таким образом, условия (2.4) и (2.5) выполняются. По формуле (2.3) найдем вихрь скорости:

$$\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{A}{H} \cos\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{H}\right) e^{-\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right)\nu t} & \frac{A}{L} \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{H}\right) e^{-\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right)\nu t} & 0 & \end{vmatrix} =$$

$$= A \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \cos \left(\frac{x}{L} \right) \cos \left(\frac{y}{H} \right) e^{-\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \nu t} \vec{k}.$$

Вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned} [\vec{u} \times \vec{\omega}] &= \frac{A^2}{L} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \sin \left(\frac{x}{L} \right) \cos \left(\frac{x}{L} \right) \cos^2 \left(\frac{y}{H} \right) e^{-2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \nu t} \vec{i} + \\ &+ \frac{A^2}{H} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \sin \left(\frac{y}{H} \right) \cos \left(\frac{y}{H} \right) \cos^2 \left(\frac{x}{L} \right) e^{-2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \nu t} \vec{j}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Поскольку правая часть (3.8) отлична от нуля, течение не является однородно-винтовым. Прямой проверкой можно убедиться в том, что обобщенное условие Громеки–Бельтрами (2.6) выполняется. Определим теперь потенциал $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$. В пространстве $\mathbb{R}_x^3$ зададим две точки

$$\vec{x}_0 = \left(\frac{\pi L}{2}, \frac{\pi H}{2}, 0 \right) \quad \text{и} \quad \vec{x} = (x, y, z).$$

По формуле (2.8) находим

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} ([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}) \, ds = \\ &= A^2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) e^{-2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \nu t} \int_{\left(\frac{\pi L}{2}, \frac{\pi H}{2}, 0 \right)}^{(x, y, z)} \left[\sin \left(\frac{x_*}{L} \right) \cos \left(\frac{x_*}{L} \right) \cos^2 \left(\frac{y_*}{H} \right) d \left(\frac{x_*}{L} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \left(\frac{y_*}{H} \right) \cos \left(\frac{y_*}{H} \right) \cos^2 \left(\frac{x_*}{L} \right) d \left(\frac{y_*}{H} \right) \right] = \\ &= -\frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) e^{-2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \nu t} \int_{\left(\frac{\pi L}{2}, \frac{\pi H}{2}, 0 \right)}^{(x, y, z)} d \left[\cos^2 \left(\frac{x_*}{L} \right) \cos^2 \left(\frac{y_*}{H} \right) \right] = \\ &= -\frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) e^{-2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \nu t} \cos^2 \left(\frac{x_*}{L} \right) \cos^2 \left(\frac{y_*}{H} \right) \Big|_{\left(\frac{\pi L}{2}, \frac{\pi H}{2}, 0 \right)}^{(x, y, z)} = \\ &= -\frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \cos^2 \left(\frac{x}{L} \right) \cos^2 \left(\frac{y}{H} \right) e^{-2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \nu t}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Подстановка (3.1) – (3.3) и (3.9) в (2.7) позволяет найти распределение давления:

$$p = \rho C(t) - \frac{\rho A^2}{2} \left[\frac{1}{H^2} \cos^2 \left(\frac{x}{L} \right) + \frac{1}{L^2} \cos^2 \left(\frac{y}{H} \right) \right] e^{-2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \nu t}. \quad (3.10)$$

Набор функций (3.1) – (3.3), (3.10) задает точное решение как квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2), так и системы Навье–Стокса (1.3) – (1.4). Это решение не удовлетворяет уравнениям Эйлера (1.5) – (1.6). В частном случае $L = H$, $U = A/H = A/L$ оно совпадает с решением, построенном в [12] на с. 20–22.

Пример 2. Рассмотрим векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ с компонентами

$$u_x = -\frac{A}{H} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right) \nu t}, \quad (3.11)$$

$$u_y = \frac{A}{L} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right) \nu t}, \quad (3.12)$$

$$u_z = 0. \quad (3.13)$$

Свойства постоянных A , L и H описаны в предыдущем примере. Подстановка (3.11) – (3.13) в (3.4) – (3.7) дает истинные равенства. Это означает, что условия (2.4) и (2.5) выполнены. Вычисляем

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \operatorname{rot} \vec{u} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{A}{H} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right) \nu t} & \frac{A}{L} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right) \nu t} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= A \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right) \nu t} \vec{k}. \end{aligned}$$

Векторное произведение

$$\begin{aligned} [\vec{u} \times \vec{\omega}] &= \frac{A^2}{L} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{ch}^2\left(\frac{y}{H}\right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right) \nu t} \vec{i} + \\ &+ \frac{A^2}{H} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \operatorname{sh}\left(\frac{y}{H}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{y}{H}\right) \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{L}\right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right) \nu t} \vec{j} \end{aligned}$$

отлично от нуля. Поэтому течение не является однородно-винтовым. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что обобщенное условие Громеки–Бельтрами (2.6) также выполняется. Чтобы определить потенциал $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$, фиксируем в пространстве $\mathbb{R}_{\vec{x}}^3$ две точки

$$\vec{x}_0 = (0, 0, 0) \quad \text{и} \quad \vec{x} = (x, y, z).$$

Применяем формулу (2.8):

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} ([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}) \, ds = \\ &= A^2 \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right) \nu t} \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{x_*}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x_*}{L}\right) \operatorname{ch}^2\left(\frac{y_*}{H}\right) d\left(\frac{x_*}{L}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sh}\left(\frac{y_*}{H}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{y_*}{H}\right) \operatorname{ch}^2\left(\frac{x_*}{L}\right) d\left(\frac{y_*}{H}\right) \right] = \\ &= \frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right) \nu t} \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d \left[\operatorname{ch}^2\left(\frac{x_*}{L}\right) \operatorname{ch}^2\left(\frac{y_*}{H}\right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \operatorname{ch}^2\left(\frac{x_*}{L}\right) \operatorname{ch}^2\left(\frac{y_*}{H}\right) \Big|_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} = \\
&= \frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} \right) \left[\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{ch}^2\left(\frac{y}{H}\right) - 1 \right] e^{2\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right)\nu t}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Подставив (3.11) – (3.13) и (3.14) в (2.7), находим распределение давления:

$$p = \rho \tilde{C}(t) + \frac{\rho A^2}{2} \left[\frac{1}{H^2} \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{L^2} \operatorname{ch}^2\left(\frac{y}{H}\right) \right] e^{2\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{3.15}$$

Здесь $\tilde{C}(t)$ – произвольная функция времени, определенная для $t \geq 0$. Общее решение (3.11) – (3.13), (3.15) систем Навье–Стокса и КГД не удовлетворяет уравнениям Эйлера. Если $\tilde{C}(t) = 0$, то давление $p = p(\vec{x}, t)$ при фиксированном $\vec{x} \in \mathbb{R}_x^3$ экспоненциально возрастает с течением времени. Решение квазигидродинамической системы с указанным свойством построено впервые.

Пример 3. Допустим, что векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ имеет компоненты

$$u_x = -\frac{A}{H} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.16}$$

$$u_y = \frac{A}{L} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{3.17}$$

$$u_z = 0. \tag{3.18}$$

Константы A, L, H такие же, как и в предыдущих примерах. Для функций (3.16) – (3.18) равенства (3.4) – (3.7) выполняются. Вычисления дают:

$$\begin{aligned}
&\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{u} = \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{A}{H} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} & \frac{A}{L} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} & 0 \end{vmatrix} = \\
&= A \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \right) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{H}\right) e^{\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \vec{k}, \\
&[\vec{u} \times \vec{\omega}] = \frac{A^2}{L} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \right) \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{y}{H}\right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \vec{i} + \\
&+ \frac{A^2}{H} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \right) \sin\left(\frac{y}{H}\right) \cos\left(\frac{y}{H}\right) \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{L}\right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \vec{j},
\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} [\vec{u} \times \vec{\omega}] = 0.$$

Фиксируем в пространстве $\mathbb{R}_x^3$ точки

$$\vec{x}_0 = (0, 0, 0) \quad \text{и} \quad \vec{x} = (x, y, z).$$

Принимая во внимание (2.8), будем иметь

$$\begin{aligned}
\Psi &= \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} ([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}) \, ds = \\
&= A^2 \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{x_*}{L}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x_*}{L}\right) \sin^2\left(\frac{y_*}{H}\right) d\left(\frac{x_*}{L}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \sin\left(\frac{y_*}{H}\right) \cos\left(\frac{y_*}{H}\right) \operatorname{sh}^2\left(\frac{x_*}{L}\right) d\left(\frac{y_*}{H}\right) \right] = \\
&= \frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} d \left[\operatorname{sh}^2\left(\frac{x_*}{L}\right) \sin^2\left(\frac{y_*}{H}\right) \right] = \\
&= \frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t} \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{y}{H}\right) \Big|_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} = \\
&= \frac{A^2}{2} \left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2} \right) \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{y}{H}\right) e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t}.
\end{aligned}$$

Формула (2.7) позволяет найти распределение давления:

$$p = \rho C(t) - \frac{\rho A^2}{2} \left[\frac{1}{H^2} \operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{1}{L^2} \sin^2\left(\frac{y}{H}\right) \right] e^{2\left(\frac{1}{L^2} - \frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \quad (3.19)$$

При $L \neq H$ набор функций (3.16) – (3.19) удовлетворяет нестационарным системам Навье–Стокса и КГД, но не удовлетворяет уравнениям Эйлера. Случай $L = H$ будет рассмотрен в следующем пункте.

4. Примеры точных решений стационарной квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами

Выпишем квазигидродинамическую систему (1.1) – (1.2) для установившихся течений:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 2\nu \operatorname{div} \hat{\sigma} + \operatorname{div} [(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})]. \quad (4.2)$$

Соответствующие системы Навье–Стокса и Эйлера могут быть записаны следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \vec{u}; \quad (4.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (4.5)$$

$$\operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (4.6)$$

Приведем примеры точных решений стационарной КГД системы (4.1) – (4.2), удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами.

Пример 4. Рассмотрим набор функций

$$u_x = -\frac{A}{L} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{L}\right), \quad (4.7)$$

$$u_y = \frac{A}{L} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{L}\right), \quad (4.8)$$

$$u_z = 0, \quad (4.9)$$

$$p = p_0 - \frac{\rho A^2}{2L^2} \left[\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{L}\right) + \sin^2\left(\frac{y}{L}\right) \right]. \quad (4.10)$$

Здесь $p_0 = \text{const}$, свойства постоянных A и L описаны выше. Зависимости (4.7) – (4.10) получаются из (3.16) – (3.19), если положить $L = H$. Пусть

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– трехмерный оператор Лапласа. Функции u_x , u_y , u_z являются гармоническими во всем пространстве $\mathbb{R}_x^3$, поскольку

$$\Delta u_x = 0, \quad \Delta u_y = 0, \quad \Delta u_z = 0.$$

Прямой проверкой можно убедиться в том, что набор функций (4.7) – (4.10) есть общее точное решение систем Эйлера (4.5) – (4.6), Навье–Стокса (4.3) – (4.4) и квазигидродинамической системы (4.1) – (4.2). Оно является безвихревым и потенциальным. Другие примеры подобных решений приведены в [10]. Будем искать решение КГД системы (4.1) – (4.3) в виде

$$u_x = a + by + c \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (4.11)$$

$$u_y = -c \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (4.12)$$

$$u_z = 0. \quad (4.13)$$

Здесь a , b , c – заданные вещественные постоянные. Функция $\varphi = \varphi(x, y)$ является гармонической в некоторой области $V \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$, т.е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in V.$$

Выполнены равенства

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ \Delta u_x = 0, \quad \Delta u_y = 0, \quad \Delta u_z = 0.$$

Вычислим

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a + by + c \frac{\partial \varphi}{\partial y} & -c \frac{\partial \varphi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = -b \vec{k}.$$

Если $b \neq 0$, то $\vec{\omega} \neq 0$. Найдем векторное произведение

$$[\vec{u} \times \vec{\omega}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a + by + c \frac{\partial \varphi}{\partial y} & -c \frac{\partial \varphi}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = bc \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \left(ab + b^2 y + bc \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \vec{j}. \quad (4.14)$$

Поскольку

$$\text{rot } [\vec{u} \times \vec{\omega}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bc \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \left(ab + b^2 y + bc \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

обобщенное условие Громеки–Бельтрами выполняется. Пусть точки $(1, 1)$ и (x, y) принадлежат V . Соединим их кусочно-гладкой кривой γ , целиком лежащей в V . Принимая во внимание (4.14), вычислим потенциал Ψ по формуле (2.8):

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{\gamma} ([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}) \, ds = \\ &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} \left[bc \frac{\partial \varphi(x_*, y_*)}{\partial x_*} dx_* + \left(ab + b^2 y_* + bc \frac{\partial \varphi(x_*, y_*)}{\partial y_*} \right) dy_* \right] = \\ &= \int_{(1,1)}^{(x,y)} (ab + b^2 y_*) dy_* + bc \int_{(1,1)}^{(x,y)} d\varphi(x_*, y_*) = \\ &= ab(y - 1) + \frac{b^2}{2}(y^2 - 1) + bc(\varphi(x, y) - \varphi(1, 1)). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Подстановка (4.11) – (4.13), (4.15) в формулу

$$p = \rho \left(\Psi - \frac{\vec{u}^2}{2} \right)$$

позволяет найти распределение давления:

$$\begin{aligned} p &= \rho \left[ab(y - 1) + \frac{b^2}{2}(y^2 - 1) + bc(\varphi(x, y) - \varphi(1, 1)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(a + by + c \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Набор функций (4.11) – (4.13), (4.16) образует общее точное решение стационарных систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД.

Пример 5. На полуплоскости $V = \{(x, y) : x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ определим гармоническую функцию

$$\varphi = \varphi(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.17)$$

Для $\varphi = \varphi(x, y)$ зависимости (4.11) – (4.13) принимают вид

$$u_x = a + by + \frac{cx}{x^2 + y^2}, \quad (4.18)$$

$$u_y = \frac{cy}{x^2 + y^2}, \quad (4.19)$$

$$u_z = 0. \quad (4.20)$$

Распределение давления p можно получить, если подставить (4.17) в (4.16). Данному решению стационарной квазигидродинамической системы отвечает функция тока

$$\psi = \psi(x, y) = ay + \frac{by^2}{2} + c \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4.21)$$

Она связана с компонентами скорости соотношениями

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Функцию тока (4.21), порождающую решения стационарных систем Эйлера и Навье–Стокса, впервые получил Чень (H.S. Tsien) в 1943 г. (см. [7], с. 165).

Заключение

Точные решения квазигидродинамической системы можно разделить на три непересекающихся класса. Решения первого класса удовлетворяют соответствующим системам Навье–Стокса и Эйлера. Решения второго класса являются точными для системы Навье–Стокса, но не удовлетворяют уравнениям Эйлера. Наиболее труден для построения третий класс решений системы КГД, подстановка которых в системы Навье–Стокса и Эйлера не приводит к истинным равенствам. Еще одна проблема – интерпретация найденных решений. Как написано в статье [5] на с. S278, «Точное решение представляет интерес, если оно имеет физический смысл». Однако поставить эксперимент, в котором реализуются движения жидкости с экспоненциально растущим во времени давлением или с неограниченными в пространстве компонентами скорости, непросто. Это может стать предметом дальнейших исследований. Несмотря на сделанное замечание, автор работы [5] приводит подобное точное решение системы Навье–Стокса на с. S274.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
- [3] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
- [4] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.
- [5] Wang C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // Applied Mechanics Reviews. 1989. Vol. 42, № 11. Part 2. Pp. S269–S282.

- [6] Wang C.Y. Exact solutions of the Navier–Stokes equations – the generalized Beltrami flows, review and extension // *Acta Mechanica*. 1990. Vol. 81. Pp. 69–74.
- [7] Wang C.Y. Exact solutions of the steady–state Navier–Stokes equations // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1991. Vol. 23. Pp. 159–177.
- [8] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // *Математическое моделирование*. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.
- [9] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.
- [10] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.
- [11] Шеретов Ю.В. О общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2017. № 2. С. 5–15.
- [12] Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2017. № 3. С. 13–25. <https://doi.org/10.26456/vtpmk176>

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2018. № 3. С. 5–18. <https://doi.org/10.26456/vtpmk507>

Сведения об авторах

1. Шеретов Юрий Владимирович

заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON THE EXACT SOLUTIONS OF QUASI-HYDRODYNAMIC SYSTEM THAT SATISFY THE GENERALIZED GROMEKI-BELTRAMI CONDITION

Sheretov Yurii Vladimirovich

Head of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TvSU.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 27.06.2018, revised 02.09.2018.

The quasi-hydrodynamic system was proposed by the author in 1993. It has deep connections with classical Navier–Stokes equations. In this paper exact solutions of quasi-hydrodynamic system, obeying the generalized Gromeka–Beltrami condition system, are constructed. These solutions also satisfy the Navier–Stokes system and have been found previously for it in a different way. In the non-stationary case they generalize well-known Jeffrey Ingram Taylor’s solution.

Keywords: Navier-Stokes and Euler systems, quasi-hydrodynamic system, exact solutions, generalized Gromeka–Beltrami condition.

Citation

Sheretov Yu.V., “On the exact solutions of quasi-hydrodynamic system that satisfy the generalized Gromeki-Beltrami condition”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 3, 5–18. (in Russian) <https://doi.org/10.26456/vtpmk507>

References

- [1] Landau L.D., Lifshits E.M., *Gidrodinamika [Hydrodynamics]*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (in Russian), 736 pp.
- [2] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.
- [3] Shmyglevskij Yu.D., *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 1999 (in Russian), 232 pp.
- [4] Riley N., Drazin P.G., *The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 pp.
- [5] Wang C.Y., “Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations”, *Applied Mechanics Reviews*, **42**:11, Part 2 (1989), S269–S282.
- [6] Wang C.Y., “Exact solutions of the Navier–Stokes equations – the generalized Beltrami flows, review and extension”, *Acta Mechanica*, **81** (1990), 69–74.

- [7] Wang C.Y., “Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **23** (1991), 159–177.
- [8] Sheretov Yu.V., “On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type”, *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).
- [9] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.
- [10] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.
- [11] Sheretov Yu.V., “On the common exact solutions of stationary Navier-Stokes and quasi-hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 2, 5–15 (in Russian).
- [12] Sheretov Yu.V., “On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi-hydrodynamic systems for nonstationary flows”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2017, № 3, 13–25 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk176>.