Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Рыбаков, Алгоритмические свойства линейно аппроксимируемых квазинормальных модальных логик, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2018, выпуск 4, 87–97

DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:49:34

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

УДК 510.52, 510.643

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНО АППРОКСИМИРУЕМЫХ КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ МОДАЛЬНЫХ ЛОГИК¹

Рыбаков М.Н.

Тверской государственный университет, г. Тверь
НИИ «Центр Программ Систем», г. Тверь
Университет Витватерсранда, Йоханнесбург

Поступила в редакцию 09.08.2018, после переработки 12.12.2018.

Исследуется вопрос о взаимосвязи между вычислительной сложностью проблемы разрешения модальной пропозициональной логики и сложностью контрмоделей для формул, которые ей не принадлежат. Известно, что для многих нормальных мономодальных пропозициональных логик разные исследователи применяли сходные конструкции для доказательства PSPACE-трудности проблемы разрешения логики и для обоснования нижних экспоненциальных оценок минимального числа элементов в шкалах Крипке, опровергающих формулы, не принадлежащие ей. Аналогичная ситуация наблюдается и для суперинтуиционистских пропозициональных логик. При этом какие-либо точно сформулированные математические критерии, выражающие эту наблюдаемую связь, автору неизвестны. В работе показано, что если отказаться от условия нормальности в модальных логиках, то можно найти контрпример. Именно, в работе строятся квазинормальные модальные пропозициональные логики, являющиеся линейно аппроксимируемыми и имеющие как сколь угодно высокую сложность проблемы разрешения, так и сколь угодно высокую степень неразрешимости, причём в обоих случаях достаточно рассматривать лишь константные фрагменты.

Ключевые слова: квазинормальная модальная логика, вычислительная сложность, разрешимость, семантика Крипке.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 4. С. 87–97.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk520>

1. Введение

Современные исследования по модальным логикам обычно затрагивают класс т. н. нормальных модальных логик и реже — ненормальные и квазинормальные модальные логики. Предположительно, одной из причин этого является интерес

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №17-03-00818-ОГН и №18-011-00869.

к модальному языку как к средству описания свойств бинарных отношений, т. е. свойств отношений в семантических структурах, называемых шкалами Крипке. Дело в том, что множество модальных формул, истинных в шкале Крипке (или в классе шкал Крипке), замкнуто по правилу Гёделя и в этом смысле образует именно нормальную модальную логику. Тем не менее, имеется немало ненормальных и квазинормальных систем, возникших по естественным соображениям и представляющих определённый интерес с той или иной точки зрения. Например, это семейство расширений квазинормальной логики доказуемости **S**, известной как логика Р. Соловея, а также системы К. Льюиса, из которых особо выделим ненормальную модальную логику **S3**, описывающую свойства строгой импликации. Отметим, что замыкание ненормальных и квазинормальных логик по правилу Гёделя может существенно менять множество выводимых формул. Например, замыкание по правилу Гёделя системы **S3** даёт множество формул, выводимых в системе **S4**, а замыкание по правилу Гёделя системы **S** — противоречивую логику. Другими словами, в результате добавления к системе правила Гёделя некоторые различные в ней формулы перестают быть таковыми.

В этой работе нас будет интересовать вопрос, который изначально был адресован к нормальным модальным логикам, но пока не нашёл решения, и наша задача — показать, как он решается в случае квазинормальных модальных логик, позволяющих более тонко чувствовать различие некоторых условий. Точные формулировки будут даны ниже, пока же ограничимся пояснениями.

В работе [6] Р. Ладнер показал, что нормальные модальные логики **K**, **T** и **S4** имеют PSPACE-полную проблему разрешения. Аналогичный результат был получен Р. Стэтманом для интуиционистской логики **Int** [10]. Позже эти результаты были обобщены и распространены на большие классы модальных, суперинтуиционистских и других логик, см. [3, 4, 11]. Примерно в то же время в работе М. В. Захарьячева и С. В. Попова [1] было показано, что сложность контрмоделей для формул, не принадлежащих **Int**, экспоненциальна (изложение этого и близких результатов можно найти также в [4]). Интересным является то, что для получения результатов о PSPACE-трудности проблемы разрешения и об экспоненциальной сложности контрмоделей были использованы сходные конструкции. Именно, в доказательствах PSPACE-трудности средствами языка (модального или интуиционистского) моделировалась проблема истинности булевых формул с кванторами, и моделирование квантора всеобщности состояло в описании ветвления порядка два, что соответствовало двум возможным истинностным значениям переменной. В случае n кванторов такая конструкция приводила к описанию модели размера порядка 2^{n+1} , т. е. к экспоненциальной оценке для числа элементов модели. Обратное: формулы М. В. Захарьячева, дающие экспоненциальную оценку для мощности контрмоделей, несложным образом модифицируются в формулы, описывающие моделирование кванторов по пропозициональным переменным, т. е. могут быть использованы для доказательства PSPACE-трудности проблемы разрешения соответствующих логик.

Возникают вопросы:

- всегда ли PSPACE-трудность проблемы разрешения логики приводит к экспоненциальной нижней оценке сложности контрмоделей для формул языка логики;

- всегда ли экспоненциальная нижняя оценка сложности контрмоделей для формул языка логики приводит к PSPACE-трудности проблемы разрешения этой логики?

Чуть ранее, чем были получены упомянутые результаты, сложностью проблемы разрешения интуиционистской логики **Int** интересовался А. В. Кузнецов [5]. Он предполагал, что **Int** полиномиально аппроксимируема шкалами Крипке, и показал, что если это действительно так, то **Int** должна быть полиномиально эквивалентна классической логике **Cl** [2, 4]. Конечно, из [1], следует, что **Int** не является полиномиально аппроксимируемой шкалами Крипке, а из [10] — что **Int** не является полиномиально эквивалентной логике **Cl** (в предположении, что $NP \neq PSPACE$). Тем не менее, наблюдение А. В. Кузнецова весьма интересно и может быть распространено на многие другие логики: по сути, он показал, что если модальная или суперинтуиционистская логика с простой (в некотором определённом смысле) семантикой полиномиально аппроксимируема шкалами Крипке, то она полиномиально эквивалентна логике **Cl**. Это, конечно, не приводит к решению ни одного из сформулированных выше вопросов, но сильно сужает область поиска контрпримера.

Известный автору контрпример находится в области полимодальных логик с достаточно сложно описываемыми модальностями. Именно, А. Систла и Э. Кларк показали в [8], что темпоральная логика **LTL** является PSPACE-полной, при этом в доказательстве они использовали модели Крипке, число элементов в которых ограничено сверху полиномом от длины тестируемой формулы. Таким образом, по сути, в [8] был найден полиномиально аппроксимируемый фрагмент логики **LTL**, имеющий PSPACE-полную проблему разрешения. Отметим, что язык логики **LTL** содержит весьма выразительные модальности, и что происходит со связью между вычислительной сложностью проблемы разрешения нормальной мономодальной (или суперинтуиционистской) логики и сложностью контрмоделей для формул её языка, — пока неизвестно².

Но если отказаться от требования замкнутости логики по правилу Гёделя, то ситуация меняется: ниже будет предложена конструкция, позволяющая строить линейно аппроксимируемые квазинормальные расширения логик **K** и **T**, имеющие сколь угодно сложную проблему разрешения (и даже неразрешимые), причём для константных фрагментов в случае **K** и фрагментов от одной переменной в случае **T**.

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 будут даны необходимые определения, в разделе 3 будет описана основная конструкция и приведены основные результаты, в разделе 4 будет предложено их обсуждение.

2. Синтаксис и семантика

Пусть имеется язык, содержащий счётное множество пропозициональных переменных, логическую константу $\perp$, логическую связку $\rightarrow$, модальность $\Box$, а также символы скобок. Формулой в этом языке (модальной формулой) считаем

² Автору неизвестны работы, где бы был указан какой-либо точный критерий; известны лишь результаты, касающиеся отдельных условий, гарантирующих PSPACE-трудность проблемы разрешения логики, её принадлежность классу PSPACE, а также условия, гарантирующие нижние экспоненциальные оценки для контрмоделей.

- константу $\perp$ и каждую из пропозициональных переменных;
- все выражения вида $(\varphi \rightarrow \psi)$ и $\Box\varphi$, где φ и ψ — формулы.

Логические связи $\neg$, $\vee$, $\wedge$, логическая константа $\top$, а также модальность $\Diamond$ определим обычно: $\neg\varphi = (\varphi \rightarrow \perp)$, $(\varphi \vee \psi) = (\neg\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \wedge \psi) = \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\top = \neg\perp$, $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$. При записи формул будем опускать некоторые скобки, определяя силу связывания формул по убыванию: $\neg$, $\Box$, $\Diamond$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ и всякой модальной формулы φ определим формулы вида $\Diamond^n\varphi$: $\Diamond^0\varphi = \varphi$, $\Diamond^{k+1}\varphi = \Diamond\Diamond^k\varphi$.

Для каждой модальной формулы φ определим её модальную глубину, которую будем обозначать $md(\varphi)$:

- $md(\perp) = 0$;
- $md(p) = 0$, где p — пропозициональная переменная;
- $md(\varphi' \rightarrow \varphi'') = \max\{md(\varphi'), md(\varphi'')\}$;
- $md(\Box\varphi') = md(\varphi') + 1$.

Другими словами, модальная глубина формулы — это наибольшее число вложенных модальностей в этой формуле.

Определим реляционную семантику, которую будем использовать для рассматриваемого языка.

Шкалой Крипке будем называть набор $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, где W — непустое множество, а R — бинарное отношение на W . Элементы множества W будем называть мирами, а отношение R — отношением достижимости. Если пара миров w и w' находится в отношении R , то пишем wRw' ; при этом говорим что из мира w достигим мир w' .

Набор $\mathfrak{M} = \langle W, R, v \rangle$ будем называть моделью Крипке на шкале $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, если v — оценка пропозициональных переменных в $\mathfrak{F}$, т. е. функция, которая каждой пропозициональной переменной p сопоставляет некоторое подмножество $v(p)$ множества W .

Определим рекурсивно отношение истинности формулы φ в мире w модели $\mathfrak{M}$, которое будем обозначать $\mathfrak{M}, w \models \varphi$:

- $\mathfrak{M}, w \not\models \perp$;
- $\mathfrak{M}, w \models p$, если $w \in v(p)$, где p — пропозициональная переменная;
- $\mathfrak{M}, w \models \varphi' \rightarrow \varphi''$, если $\mathfrak{M}, w \not\models \varphi'$ или $\mathfrak{M}, w \models \varphi''$;
- $\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi'$, для всякого такого $w' \in W$, что wRw' , выполнено $\mathfrak{M}, w' \models \varphi'$.

Полагаем также

- $\mathfrak{M} \models \varphi$, если для всякого $w \in W$ выполнено $\mathfrak{M}, w \models \varphi$;
- $\mathfrak{F}, w \models \varphi$, если для всякой модели $\mathfrak{M}$, определённой на шкале $\mathfrak{F}$, выполнено $\mathfrak{M}, w \models \varphi$;
- $\mathfrak{F} \models \varphi$, если для всякого $w \in W$ выполнено $\mathfrak{F}, w \models \varphi$.

Пусть $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$ — шкала Крипке, $w \in W$; в этом случае набор $\mathfrak{F}_w = \langle \mathfrak{F}, w \rangle$ будем называть шкалой с выделенным миром.

Положим

$$- \mathfrak{F}_w \models \varphi, \text{ если } \mathfrak{F}, w \models \varphi.$$

Формулу φ будем называть выполнимой в шкале $\mathfrak{F}_w$, если существует такая модель $\mathfrak{M}$, определённая на $\mathfrak{F}_w$, что $\mathfrak{M}, w \models \varphi$.

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс, состоящий из шкал Крипке или шкал с выделенным миром. Положим

$$- \mathfrak{C} \models \varphi, \text{ если для каждой шкалы } \mathfrak{F} \in \mathfrak{C} \text{ выполнено отношение } \mathfrak{F} \models \varphi \text{ и для каждой шкалы } \mathfrak{F}_w \in \mathfrak{C} \text{ выполнено отношение } \mathfrak{F}_w \models \varphi.$$

Если X — множество формул, $\mathfrak{F}$ — шкала Крипке, а w — мир этой шкалы, то записи $\mathfrak{F} \models X$ и $\mathfrak{F}_w \models X$ будут означать, что каждая формула из X истинна в $\mathfrak{F}$ и в $\mathfrak{F}_w$, соответственно.

Определим классы логик, о которых пойдёт речь.

Модальной логикой будем называть любое множество модальных формул, замкнутое по правилу *modus ponens* и по правилу подстановки.

Определим минимальную нормальную модальную логику **K** как множество модальных формул, истинных в классе всех шкал Крипке.

Модальную логику L будем называть³ нормальной, если она содержит **K** и замкнута по правилу Гёделя, т. е. если для всякой формулы φ выполнено следующее:

$$\varphi \in L \implies \Box \varphi \in L.$$

Если логика не является нормальной, её называют ненормальной. Следуя [7], модальную пропозициональную логику будем называть квазинормальной, если она содержит **K**.

Отметим следующее. Множество формул, истинных в шкале с выделенным миром, замкнуто и по *modus ponens*, и по правилу подстановки, а значит, образует квазинормальную модальную логику. Множество формул, истинных в шкале Крипке, замкнуто ещё и по правилу Гёделя, поэтому образует нормальную модальную логику. То же относится к классам шкал Крипке и классам шкал с выделенным миром.

3. Логика классов конечных линейных шкал

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим шкалу $\mathfrak{F}^n = \langle W_n, R_n \rangle$, положив $W_n = \{w_0, \dots, w_n\}$ и $R_n = \{\langle w_k, w_{k+1} \rangle : 0 \leq k < n\}$. Пусть $\alpha_n = \Diamond^n \Box \perp$.

Доказательство следующего утверждения вытекает непосредственно из определений, и мы оставляем его читателю.

Лемма 1. $\mathfrak{F}_{w_0}^m \models \alpha_k \iff k = m.$

³Вообще говоря, модальную логику, содержащую **K**, называют нормальной, если в ней правило Гёделя постулировано. При таком определении логика может быть замкнутой по правилу Гёделя, но не быть нормальной. Для целей данной работы нет необходимости в разделении замкнутости логики по правилу Гёделя и его постулировании, поэтому мы такого разделения проводить не будем.

Для нас будет важным следствие, вытекающее из леммы 1.

Следствие 1. $\mathfrak{F}_{w_0}^m \models \neg \alpha_k \iff k \neq m$.

Для каждого подмножества I множества $\mathbb{N}$ определим класс шкал с выделенным миром $\mathfrak{C}(I)$, положив $\mathfrak{C}(I) = \{\mathfrak{F}_{w_0}^n : n \in \mathbb{N} \setminus 2 \cdot I\}$, где $2 \cdot I = \{2n : n \in I\}$. Пусть L_I — логика класса $\mathfrak{C}(I)$, т. е. множество всех модальных формул, истинных в $\mathfrak{C}(I)$.

Следствие 2. $\neg \alpha_n \in L_I \iff n \in 2 \cdot I$.

Доказательство. Вытекает из следствия 1 и определения логики L_I . $\square$

Таким образом, сложность проблемы разрешения логики L_I не проще⁴ чем сложность проблемы разрешения множества I .

Теперь обратимся к вопросу о сложности контрмоделей для L_I .

Определим функцию f_L , которую будем называть функцией сложности аппроксимации нормальной модальной логики L , так же, как в [4]:

$$f_L(n) = \max \{ \min \{ |\mathfrak{F}| : \mathfrak{F} \models L, \mathfrak{F} \not\models \varphi \} : |\varphi| \leq n, \varphi \notin L \},$$

где $|\mathfrak{F}|$ — число миров в шкале $\mathfrak{F}$, а $|\varphi|$ — длина формулы φ .

В случае, если L — квазинормальная модальная логика, определим функцию f_L аналогично:

$$f_L(n) = \max \{ \min \{ |\mathfrak{F}_w| : \mathfrak{F}_w \models L, \mathfrak{F}_w \not\models \varphi \} : |\varphi| \leq n, \varphi \notin L \}.$$

Будем говорить, что функция сложности логики линейна, если она ограничена сверху некоторой линейной функцией.

Лемма 2. Пусть φ — формула и $m = md(\varphi)$. Тогда для любого такого k , что $k \geq m$, выполняется следующая эквивалентность:

$$\mathfrak{F}_{w_0}^m \models \varphi \iff \mathfrak{F}_{w_0}^k \models \varphi.$$

Доказательство. Следует из того факта, что на оценку истинности формулы φ в мире влияют лишь те миры, которые достижимы из него не более чем за $md(\varphi)$ шагов. $\square$

Следствие 3. Функция сложности любой логики L_I является линейной.

Доказательство. Пусть φ — формула, не принадлежащая логике L_I . Тогда существует шкала $\mathfrak{F}_{w_0}^m \in \mathfrak{C}(I)$, в которой опровергается φ . Если $m \leq md(\varphi)$, то $|\mathfrak{F}_{w_0}^m| \leq md(\varphi) + 1$. Если $m > md(\varphi)$, то рассмотрим шкалы $\mathfrak{F}_{w_0}^{md(\varphi)}$ и $\mathfrak{F}_{w_0}^{md(\varphi)+1}$. По определению класса $\mathfrak{C}(I)$, хотя бы одна из них находится в $\mathfrak{C}(I)$. По лемме 2, $\mathfrak{F}_{w_0}^{md(\varphi)} \not\models \varphi$ и $\mathfrak{F}_{w_0}^{md(\varphi)+1} \not\models \varphi$. Таким образом, формула φ опровергается в шкале логики L_I , число миров в которой не более чем $md(\varphi) + 2$. $\square$

⁴Если для моделирования натуральных чисел использовать т. н. унарную запись, т. е. когда число n моделируется словом из n (одинаковых) символов.

Подведём итог.

Теорема 1. Пусть C — класс сложности или степень неразрешимости. Тогда существует линейно аппроксимируемая квазинормальная модальная логика с C -трудным константным фрагментом.

Доказательство. Вытекает из следствий 2 и 3. $\square$

Покажем, что описанная конструкция допускает обобщения и перенос на случай квазинормальных расширений стандартных модальных логик, отличных от **K**. В качестве примера рассмотрим логику **T**, определяемую семантически классом всех рефлексивных шкал Крипке. Поскольку в логике **T** каждая константная формула эквивалентна либо константе $\perp$, либо константе $\top$, мы не сможем получить для **T** аналог теоремы 1, если ограничимся рассмотрением лишь константных формул. Тем не менее, это можно сделать, используя одну пропозициональную переменную.

Сделаем модификацию описанной выше конструкции. Пусть $\tilde{\mathfrak{F}}^n = \langle \bar{W}_n, \bar{R}_n \rangle$, где $\bar{W}_n = W_n \cup \{w'_{n+1}, w''_{n+1}\}$, $\bar{R}_n = R_n \cup \{\langle x, x \rangle : x \in \bar{W}_n\} \cup \{\langle w_n, w'_{n+1} \rangle, \langle w_n, w''_{n+1} \rangle\}$. Пусть также

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_0 &= p \wedge \Diamond \Box p \wedge \Diamond \Box \neg p; \\ \bar{\alpha}_{2k+1} &= \neg p \wedge \Diamond \bar{\alpha}_{2k}; \\ \bar{\alpha}_{2k+2} &= p \wedge \Diamond \bar{\alpha}_{2k+1}.\end{aligned}$$

Тогда шкала $\tilde{\mathfrak{F}}^n_{w_0}$ связана с формулой $\bar{\alpha}_n$; именно, справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом леммы 1.

Лемма 3. Формула $\bar{\alpha}_k$ выполнима в $\tilde{\mathfrak{F}}^m_{w_0}$ тогда и только тогда, когда $k = m$.

Следующее утверждение — это аналог следствия 1.

Следствие 4. $\tilde{\mathfrak{F}}^m_{w_0} \models \neg \alpha_k \iff k \neq m$.

Для каждого подмножества I множества $\mathbb{N}$ определим класс шкал с выделенным миром $\mathfrak{C}(I)$, положив $\mathfrak{C}(I) = \{\tilde{\mathfrak{F}}^n_{w_0} : n \in \mathbb{N} \setminus 2 \cdot I\}$. Пусть $\bar{L}_I$ — логика класса $\mathfrak{C}(I)$, т. е. множество всех модальных формул, истинных в $\mathfrak{C}(I)$.

Следующие утверждения являются аналогами следствий 2 и 3, соответственно.

Следствие 5. $\neg \bar{\alpha}_n \in \bar{L}_I \iff n \in 2 \cdot I$.

Следствие 6. Функция сложности любой логики $\bar{L}_I$ является линейной.

Теперь можем сформулировать аналог теоремы 1.

Теорема 2. Пусть C — класс сложности или степень неразрешимости. Тогда в классе квазинормальных расширений логики **T** существует линейно аппроксимируемая логика с C -трудным фрагментом от одной переменной.

Доказательство. Вытекает из следствий 5 и 6. $\square$

Заключение

Мы показали, что линейно аппроксимируемые квазинормальные пропозициональные логики могут быть устроены алгоритмически сколь угодно сложно, причём это может быть справедливо уже для их константных фрагментов. То, что при этом мы рассматривали классы иррефлексивных и рефлексивных шкал, — несущественно: описанную конструкцию можно распространить и на другие классы шкал (и, тем самым, на классы расширений других логик). Интересно другое: можно ли получить аналогичный результат для классов нормальных расширений логики **K**?

Отметим, что для каждого $I \in 2^{\mathbb{N}}$ нормальная модальная логика, определяемая классом шкал Крипке, на которых определены шкалы с выделенным миром из класса $\mathfrak{C}(I)$, — это **GLLin**. Проблема выполнимости для **GLLin** является NP-полной, а для константных формул проблема выполнимости вообще полиномиально разрешима [4]. Поэтому как перенести описанную здесь конструкцию на нормальные модальные пропозициональные логики, — непонятно. Тем не менее, автор предполагает, что такие логики существуют, и, возможно, описанная здесь конструкция допускает модификацию, позволяющую построить нормальные модальные пропозициональные логики с похожими свойствами.

Благодарность

Автор выражает благодарность рецензенту за сделанные замечания, позволившие улучшить текст работы.

Дополнение

Уже после того, как текст данной работы был принят в печать, профессор университета WITS Д. П. Шкатов обратил внимание автора на введение к работе [9], где приводится конструкция, позволяющая получить неразрешимые нормальные модальные логики, линейно аппроксимируемые шкалами Крипке. Идея конструкции [9] близка к описанной в данной работе (но, скажем, константные фрагменты логик, получающихся с её помощью, разрешимы полиномиально) и даёт возможность построить примеры PSPACE-трудных нормальных модальных логик, которые линейно аппроксимируемы шкалами Крипке.

Список литературы

- [1] Захарьящев М.В., Попов С.В. О мощности контрмоделей интуиционистского исчисления. Препринт ИПИ АН СССР №45. 1980.
- [2] Кузнецов А.В. О средствах обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.
- [3] Чагров А.В. О сложности пропозициональных логик // Сложностные проблемы математической логики. Калинин: КГУ, 1985. С. 80–90.

- [4] Chagrov A., Zakharyashev M. Modal Logic. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [5] Kuznetsov A.V. On Superintuitionistic Logics // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1975). Pp. 243–249.
- [6] Ladner R.E. The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic // SIAM Journal on Computing. 1977. Vol. 6, № 3. Pp. 467–480.
- [7] Segerberg K. An Essey in Classical Modal Logic. Uppsala, 1971.
- [8] Sistla A.P., Clarke E.M. The complexity of propositional linear temporal logics // Journal of the ACM. 1985. Vol. 32, № 3. Pp. 733–749.
- [9] Spaan E. Complexity of modal logics: PhD thesis. 1993.
- [10] Statman R. Intuitionistic propositional logic is polynomial-space complete // Theoretical Computer Science. 1979. Vol. 9. Pp. 67–72.
- [11] Zakharyashev M., Wolter F., Chagrov A. Advanced Modal Logic // Handbook of Philosophical Logic. Eds. by D.M. Gabbay, F. Guentner. 2nd edition. Vol. 3. Netherlands: Springer, 2001. Pp. 83–266. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-0454-0>

Образец цитирования

Рыбаков М.Н. Алгоритмические свойства линейно аппроксимируемых квазинормальных модальных логик // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 4. С. 87–97. <https://doi.org/10.26456/vtpmk520>

Сведения об авторах

1. Рыбаков Михаил Николаевич

доцент кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета; инженер-программист НИИ «Центр Программных Систем»; научный сотрудник отдела информатики и прикладной математики Университета Витватерсранда, Йоханнесбург.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

**ALGORITHMIC PROPERTIES
OF QUASINORMAL MODAL LOGICS
WITH LINEAR FINITE MODEL PROPERTY**

Rybakov Mikhail Nikolayevich

Associate professor at Functional Analysis and Geometry department,
Tver State University

Software engineer, Closed Joint-Stock Company Scientific
Research Institute CenterProgramSystem

Research Fellow at School of Computer Science and Applied Mathematics,
University of the Witwatersrand, Johannesburg
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

Received 09.08.2018, revised 12.12.2018.

We investigate the relationship between the complexity of a propositional modal logic and the complexity of models refuting the formulas not belonging to the logic. It is well-known that for many normal monomodal propositional logics the same constructions are used to establish both the PSPACE-completeness of a logic and the exponential lower-bound for the number of worlds in Kripke models refuting formulas not belonging to the logic. The same holds true for superintuitionistic propositional logics. As far as we know, there are no known mathematical criteria capturing this connection. In this paper, we show that if we discard the normality condition, and thus consider non-normal modal logics, we can construct quasinormal logics with a linear model property whose complexity problem can be arbitrarily high. Moreover, this holds true if we only consider variable-free fragments of such logics.

Keywords: quasinormal modal logic, computational complexity, decidability, Kripke semantics.

Citation

Rybakov M.N., “Algorithmical properties of quasinormal modal logics with linear finite model property”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 4, 87–97. (in Russian) <https://doi.org/10.26456/vtpmk520>

References

- [1] Zakharyashchev M.V., Popov S.V., *On the power of countermodels of intuitionistic calculus*, Preprint IPI AN SSSR, 1980 (in Russian).
- [2] Kuznetsov A.V., “O sredstvakh obnaruzheniya nevyvodimosti ili nevyrazimosti”, *Logicheskij vyvod [Inference]*, Nauka Publ., Moscow, 1979, 5–33 (in Russian).

- [3] Chagrov A.V., “O slozhnosti propozitsionalnykh logik”, *Slozhnostnye problemy matematicheskoy logiki [The complexity problems of mathematical logic]*, KSU Publ., Kalinin, 1985, 80–90 (in Russian).
- [4] Chagrov A., Zakharyashev M., *Modal Logic*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [5] Kuznetsov A.V., “On Superintuitionistic Logics”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vancouver, 1975), 243–249.
- [6] Ladner R.E., “The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic”, *SIAM Journal on Computing*, **6:3** (1977), 467–480.
- [7] Segerberg K., *An Essey in Classical Modal Logic*, Uppsala, 1971.
- [8] Sistla A.P., Clarke E.M., “The complexity of propositional linear temporal logics”, *Journal of the ACM*, **32:3** (1985), 733–749.
- [9] Spaan E., *Complexity of modal logics*, PhD thesis, 1993.
- [10] Statman R., “Intuitionistic propositional logic is polynomial-space complete”, *Theoretical Computer Science*, **9** (1979), 67–72.
- [11] Zakharyashev M., Wolter F., Chagrov A., “Advanced Modal Logic”, *Handbook of Philosophical Logic*. V. 3, 2nd edition, eds. D.M. Gabbay, F. Guentner, Springer, Netherlands, 2001, 83–266, <https://doi.org/10.1007/978-94-017-0454-0>.