Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Шеретов, О свойствах решений основной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2019, выпуск 3, 5–19

DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:56:06

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.95, 532.5

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОСНОВНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Шеретов Ю.В.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 10.07.2019, после переработки 12.08.2019.

Для квазигидродинамической системы, описывающей движения слабо-сжимаемой вязкой жидкости, поставлена основная начально-краевая задача. Показано, что не существует неравновесных решений этой задачи с безвихревым соленоидальным полем скорости. Для квазигидродинамической системы выведены некоторые новые энергетические равенства и неравенства. Исследованы ее диссипативные свойства. Получен дополнительный закон сохранения. Построен соответствующий ему интегральный инвариант.

Ключевые слова: квазигидродинамическая система, уравнения Навье–Стокса, диссипативные свойства, интегральные инварианты, вихревые течения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 3. С. 5–19.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk536>

Введение

Классическая система Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости является диссипативной и обладает множеством точных физически осмысленных решений [1]. В 1993 г. автором была предложена еще одна система, получившая название квазигидродинамической (КГД) [2]. Она описывает движения слабо-сжимаемой вязкой жидкости и имеет глубокие связи с моделью Навье–Стокса. Физические принципы, на основе которых были выведены КГД уравнения, подробно изложены в [3]. Детальное исследование свойств КГД системы проведено в [4]. В [5] построены ее точные стационарные решения с безвихревым соленоидальным полем скорости.

В настоящей работе для КГД системы поставлена основная начально-краевая задача. Показано, что не существует неравновесных решений этой задачи с безвихревым соленоидальным полем скорости. Для квазигидродинамической системы выведены некоторые новые энергетические равенства и неравенства. Исследованы ее диссипативные свойства. Получен дополнительный закон сохранения. Построен соответствующий ему интегральный инвариант.

1. Квазигидродинамическая система. Постановка основной начально-краевой задачи

Квазигидродинамическая система для слабосжимаемой вязкой жидкости без учета внешних сил в стандартных обозначениях может быть представлена в следующем виде:

$$\operatorname{div} (\vec{u} - \vec{w}) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + ((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \eta \Delta \vec{u} + \eta \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) + \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{w}). \quad (1.2)$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau ((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p).$$

Здесь η – коэффициент динамической вязкости жидкости, $\tau = \eta / (\rho c_s^2)$ – характерное время релаксации, c_s – скорость звука в жидкости. Символом Δ обозначен оператор Лапласа, действующий на векторное поле. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1.1) – (1.2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$.

Пусть V – ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{\vec{x}}^3$ с кусочно-гладкой границей ∂V , $\bar{V} = V \cup \partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор единичной внешней нормали к ∂V в точке $\vec{x} \in \partial V$, $Q = V \times [0, T_f]$ – ограниченный или неограниченный цилиндр в $\mathbb{R}_{\vec{x}}^3 \times \mathbb{R}_t$, $\bar{Q} = \bar{V} \times [0, T_f]$ – его замыкание, T_f – заданное положительное число или символ $+\infty$ соответственно. Параметр $t \in [0, T_f]$ будем интерпретировать как время. Добавим к (1.1) – (1.2) начальное условие

$$\vec{u} \Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \bar{V}, \quad (1.3)$$

граничные условия

$$\vec{u} \Big|_{\partial V} = 0, \quad (\vec{w} \cdot \vec{n}) \Big|_{\partial V} = 0, \quad t \in [0, T_f], \quad (1.4)$$

а также условие нормировки

$$\int_V p \, dV = 0, \quad t \in [0, T_f]. \quad (1.5)$$

Здесь $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ – заданное распределение скорости в начальный момент времени $t = 0$. Интегральное условие (1.5) исключает неоднозначность в определении давления.

Символом $C_{\vec{x}, t}^{2\alpha, \alpha}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим класс непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x}, t)$, имеющих непрерывные в Q частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и β , подчиняющихся неравенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\beta \leq 2\alpha$. Класс $C_{\vec{x}, t}^{2\alpha, \alpha}(Q)$ состоит из вектор-функций

$\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t) = (f_1(\vec{x}, t), f_2(\vec{x}, t), f_3(\vec{x}, t))$, каждая компонента f_i которых принадлежит $C_{\vec{x}, t}^{2\alpha, \alpha}(Q)$.

Символом $C_{\vec{x}, t}^{\alpha, 0}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим множество всех непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x}, t)$, у которых существуют непрерывные в Q производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$$

при любых целых неотрицательных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq \alpha$.

Определение 1. Классическим решением начально-краевой задачи (1.1)–(1.5) назовем функции $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) \in C_{\vec{x}, t}^{2,1}(Q) \cap C^1(\bar{Q})$, $p = p(\vec{x}, t) \in C_{\vec{x}, t}^{2,0}(Q) \cap C_{\vec{x}, t}^{1,0}(\bar{Q})$, удовлетворяющие при всех $(\vec{x}, t) \in Q$ уравнениям (1.1)–(1.2), а также условиям (1.3)–(1.5).

Изучим свойства решения поставленной начально-краевой задачи, считая, что при некоторых $\vec{u}_0(\vec{x})$ оно существует. Сами решения будем интерпретировать как течения слабосжимаемой вязкой жидкости в ограниченном объеме V .

2. Правило Лейбница. Формула Гаусса–Остроградского. Неравенства Фридрихса и Пуанкаре

В этом пункте приведем формулировки некоторых известных теорем, которые будут использованы в дальнейшем.

Теорема 1 (правило Лейбница). Пусть заданная в $Q = V \times [0, T_f]$ функция $f = f(\vec{x}, t)$ имеет непрерывную по t на отрезке $[0, T_f]$ производную $\partial f(\vec{x}, t)/\partial t$ для почти всех $\vec{x} \in V$, и существует интегрируемая по Лебегу в V функция $q(\vec{x})$, такая, что при каждом $t \in [0, T_f]$ почти всюду в V выполняется неравенство $|\partial f(\vec{x}, t)/\partial t| \leq q(\vec{x})$. Пусть, далее, при некотором $t_0 \in [0, T_f]$ существует интеграл $\int_V f(\vec{x}, t_0) dV$. Тогда $\int_V f(\vec{x}, t) dV \in C^1([0, T_f])$ и на промежутке $[0, T_f]$ справедливо тождество

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\vec{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} dV. \quad (2.1)$$

Теорема 2 (формула Гаусса–Остроградского). Пусть в ограниченной односвязной области V с кусочно-гладкой границей ∂V задано векторное поле $\vec{A}(\vec{x}) = (A_1(x_1, x_2, x_3), A_2(x_1, x_2, x_3), A_3(x_1, x_2, x_3))$, каждая компонента A_i которого принадлежит классу гладкости $C^1(V) \cap C(\bar{V})$. Функция

$$\operatorname{div} \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

интегрируема по Лебегу на V . Тогда справедлива формула

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_{\partial V} (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS. \quad (2.2)$$

Теорема 3 (неравенство Фридрихса). Для любой вектор-функции $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ класса $C^1(\bar{V})$, обращаемой в нуль на ∂V , выполняется оценка

$$\int_V \vec{u}^2 dV \leq c_F \int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 dV, \quad (2.3)$$

где c_F – положительная постоянная, зависящая только от геометрических характеристик V .

Теорема 4 (неравенство Пуанкаре). Для любой функции $p = p(\vec{x})$ класса $C^1(\bar{V})$, удовлетворяющей условию

$$\int_V p dV = 0,$$

выполняется оценка

$$\int_V p^2 dV \leq c_P \int_V (\nabla p)^2 dV, \quad (2.4)$$

где c_P – положительная константа, зависящая только от геометрических характеристик V .

Доказательства сформулированных утверждений можно найти в [6], [7].

3. Невозможность неравновесных течений с безвихревым соленоидальным полем скорости

Определим вихрь поля скорости по формуле

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} = [\nabla \times \vec{u}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Для дальнейшего исследования свойств решений поставленной начально-краевой задачи выпишем некоторые известные (см. [1], с. 32) векторные тождества

$$\text{div } [\vec{a} \times \vec{b}] = (\vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b}), \quad (3.2)$$

$$\text{div } (\varphi \vec{a}) = \varphi \text{div } \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla \varphi), \quad (3.3)$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) + [\vec{\omega} \times \vec{u}], \quad (3.4)$$

$$\Delta \vec{u} = \nabla (\text{div } \vec{u}) - \text{rot } \vec{\omega}. \quad (3.5)$$

Справедлива

Теорема 5. На любом классическом решении начально-краевой задачи (1.1)–(1.5) для всех $(\vec{x}, t) \in Q$ выполняется равенство

$$(\nabla \otimes \vec{u})^2 - \vec{\omega}^2 - (\text{div } \vec{u})^2 = \text{div } \left((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \vec{u} \text{div } \vec{u} \right), \quad (3.6)$$

в котором

$$(\nabla \otimes \vec{u})^2 = \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad \vec{\omega}^2 = (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = |\vec{\omega}|^2 = \sum_{i=1}^3 \omega_i^2.$$

Доказательство. Умножим (3.5) скалярно на вектор $\vec{u}$. Это дает

$$(\vec{u} \cdot \Delta \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{\omega}). \quad (3.7)$$

Принимая во внимание (3.2) и (3.3), преобразуем последовательно все члены, входящие в (3.7):

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \Delta \vec{u}) &= \sum_{j=1}^3 u_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) - (\nabla \otimes \vec{u})^2 = \operatorname{div} \left(\nabla \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) \right) - (\nabla \otimes \vec{u})^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} (\vec{u} \operatorname{div} \vec{u}) - (\operatorname{div} \vec{u})^2, \quad (3.9)$$

$$(\vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{\omega}) = \operatorname{div} [\vec{\omega} \times \vec{u}] + \vec{\omega}^2. \quad (3.10)$$

Подставив (3.8) – (3.10) в (3.7), получим

$$(\nabla \otimes \vec{u})^2 - \vec{\omega}^2 - (\operatorname{div} \vec{u})^2 = \operatorname{div} \left(\nabla \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) + [\vec{\omega} \times \vec{u}] - \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} \right). \quad (3.11)$$

Преобразовав правую часть (3.11) с помощью (3.4), приходим к (3.6). $\square$

В статье [5] построены решения $(\vec{u}, p)$ квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2), не зависящие от времени и подчиняющиеся соотношениям

$$\operatorname{rot} \vec{u} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (3.12)$$

Ответ на вопрос о возможности существования таких решений в рассматриваемом случае дает

Теорема 6. *Не существует неравновесных решений поставленной начально-краевой задачи с безвихревым соленоидальным полем скорости.*

Доказательство. Пусть $(\vec{u}, p)$ – решение начально-краевой задачи (1.1) – (1.5). Кроме того, векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ удовлетворяет условиям (3.12) для всех $(\vec{x}, t) \in Q$. Для каждого $t \in [0, T_f]$ проинтегрируем (3.6) по области V , а затем воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского (2.2). Получим

$$\int_V \left((\nabla \otimes \vec{u})^2 - \vec{\omega}^2 - (\operatorname{div} \vec{u})^2 \right) dV = \oint_{\partial V} \left(((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \vec{u} \operatorname{div} \vec{u}) \cdot \vec{n} \right) dS. \quad (3.13)$$

В силу первого краевого условия (1.4) и свойств гладкости решения поверхностный интеграл в правой части (3.13) обращается в ноль. Поэтому

$$\int_V \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 dV = \int_V (\nabla \otimes \vec{u})^2 dV = \int_V \left(\vec{\omega}^2 + (\operatorname{div} \vec{u})^2 \right) dV, \quad t \in [0, T_f]. \quad (3.14)$$

Следствием (3.14), (3.1) и неравенства Фридрихса (2.3) является оценка

$$\int_V \vec{u}^2 dV \leq c_F \int_V \left((\operatorname{rot} \vec{u})^2 + (\operatorname{div} \vec{u})^2 \right) dV, \quad t \in [0, T_f]. \quad (3.15)$$

Принимая во внимание (3.12), преобразуем (3.15) к виду

$$\int_V \vec{u}^2 dV \leq 0, \quad t \in [0, T_f]. \quad (3.16)$$

Интегрирование (3.16) по переменной t на указанном промежутке дает

$$\int_Q \vec{u}^2 dV dt \leq 0. \quad (3.17)$$

Из (3.17) вытекает, что

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.18)$$

для всех $(\vec{x}, t) \in \overline{Q}$.

Подстановка (3.18) в (1.1) приводит к уравнению Лапласа

$$\Delta p = 0, \quad (\vec{x}, t) \in Q. \quad (3.19)$$

Умножим (3.19) на p и преобразуем полученное равенство к виду

$$(\nabla p)^2 = \operatorname{div} (p \nabla p), \quad (\vec{x}, t) \in Q. \quad (3.20)$$

Проинтегрируем (3.20) по объему V , а затем применим формулу Гаусса–Остроградского. Будем иметь

$$\int_V (\nabla p)^2 dV = \oint_{\partial V} p \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} dS, \quad t \in [0, T_f]. \quad (3.21)$$

Эквивалентная запись второго краевого условия (1.4) такова:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial V} = 0, \quad t \in [0, T_f]. \quad (3.22)$$

Из (3.21) и (3.22) находим

$$\int_V (\nabla p)^2 dV = 0, \quad t \in [0, T_f]. \quad (3.23)$$

Поскольку выполнено условие (1.5), в (3.23) можно воспользоваться неравенством Пуанкаре (2.4). Это приводит к оценке

$$\int_V p^2 dV \leq 0, \quad t \in [0, T_f]. \quad (3.24)$$

Интегрирование (3.24) по времени t дает

$$\int_Q p^2 dV dt \leq 0. \quad (3.25)$$

Из (3.25) следует, что

$$p = p(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.26)$$

для всех $(\vec{x}, t) \in \overline{Q}$. $\square$

Итак, единственное решение $(\vec{u}, p)$ начально-краевой задачи (1.1) – (1.5) с безвихревым соленоидальным полем скорости $\vec{u}$ является равновесным и определяется формулами (3.18), (3.26). Заметим, что аналогичный результат справедлив и для системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости. Условия, при которых невозможны безвихревые решения в рамках этой модели, обсуждались в [8] на с. 224.

4. Различные формы записи уравнения баланса кинетической энергии

Подробный вывод уравнения баланса кинетической энергии для КГД системы (1.1) – (1.2) изложен в [4]. Там же доказана теорема о диссипации полной кинетической энергии жидкости в ограниченном объеме. Равенство, выражающее баланс кинетической энергии для указанной системы, может быть представлено в различных эквивалентных формах.

Теорема 7. Уравнение баланса кинетической энергии для КГД системы (1.1) – (1.2) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left((\vec{u} - \vec{w}) \left(\frac{\vec{u}^2}{2} + p \right) - \vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u}) - \eta [\vec{u} \times \vec{\omega}] - \eta(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \eta \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} \right) = -\Phi_*. \quad (4.1)$$

Здесь

$$\Phi_* = \eta(\nabla \otimes \vec{u})^2 + \eta(\operatorname{div} \vec{u})^2 + \frac{\vec{w}^2}{\tau}. \quad (4.2)$$

– неотрицательная диссипативная функция.

Доказательство. Умножим уравнение (1.2) скалярно на вектор $\vec{u}$. Это дает

$$\begin{aligned} & \left(\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + \left(\vec{u} \cdot ((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla) \vec{u} \right) + (\vec{u} \cdot \nabla p) = \\ & = \eta(\vec{u} \cdot \Delta \vec{u}) + \eta(\vec{u} \cdot \nabla)(\operatorname{div} \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{w})). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Принимая во внимание (1.1), (3.4), (3.8) и (3.9), преобразуем последовательно все слагаемые, входящие в (4.3):

$$\left(\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right), \quad (4.4)$$

$$\left(\vec{u} \cdot ((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 (u_j - w_j) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^3 (u_j - w_j) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^3 (u_j - w_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{u_i^2}{2} \right) = ((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla) \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) = \\
&= \operatorname{div} \left((\vec{u} - \vec{w}) \frac{\vec{u}^2}{2} \right) - \frac{\vec{u}^2}{2} \operatorname{div} (\vec{u} - \vec{w}) = \operatorname{div} \left((\vec{u} - \vec{w}) \frac{\vec{u}^2}{2} \right), \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\vec{u} \cdot \nabla p) = ((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla) p + (\vec{w} \cdot \nabla) p = \\
&= \operatorname{div} (p(\vec{u} - \vec{w})) - p \operatorname{div} (\vec{u} - \vec{w}) + (\vec{w} \cdot \nabla) p = \\
&= \operatorname{div} (p(\vec{u} - \vec{w})) + (\vec{w} \cdot \nabla) p, \tag{4.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\eta(\vec{u} \cdot \Delta \vec{u}) = \eta \operatorname{div} \left(\nabla \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) \right) - \eta(\nabla \otimes \vec{u})^2 = \\
&= \eta \operatorname{div} \left((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + [\vec{u} \times \vec{\omega}] \right) - \eta(\nabla \otimes \vec{u})^2, \tag{4.7}
\end{aligned}$$

$$\eta(\vec{u} \cdot \nabla) (\operatorname{div} \vec{u}) = \eta \operatorname{div} (\vec{u} \operatorname{div} \vec{u}) - \eta(\operatorname{div} \vec{u})^2, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
&(\vec{u} \cdot \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{w})) = \sum_{i=1}^3 u_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (u_j w_i)}{\partial x_j} = \\
&= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j w_i u_i) - \sum_{i,j=1}^3 w_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\
&= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \sum_{i=1}^3 (w_i u_i) \right) - \sum_{i=1}^3 w_i \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\
&= \operatorname{div} (\vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u})) - \vec{w} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Подставим (4.4) – (4.9) в (4.3). Получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left((\vec{u} - \vec{w}) \left(\frac{\vec{u}^2}{2} + p \right) - \vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u}) - \right. \\
&\quad \left. - \eta[\vec{u} \times \vec{\omega}] - \eta(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \eta \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} \right) = \\
&= -\eta(\nabla \otimes \vec{u})^2 - \eta(\operatorname{div} \vec{u})^2 - \vec{w} \cdot ((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\vec{w} = \tau((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p),$$

из (4.10) выводим (4.1). □

Теорема 8. Уравнение баланса кинетической энергии для КГД системы (1.1) – (1.2) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} \right) + \operatorname{div} \left((\vec{u} - \vec{w}) \left(\frac{\vec{u}^2}{2} + p \right) - \vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u}) - \eta [\vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{u}] - 2\eta \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} \right) = -\Phi_{**}. \quad (4.11)$$

Здесь

$$\Phi_{**} = \eta (\operatorname{rot} \vec{u})^2 + 2\eta (\operatorname{div} \vec{u})^2 + \frac{\vec{w}^2}{\tau}. \quad (4.12)$$

– неотрицательная диссипативная функция.

Доказательство. Из (3.6) вытекает равенство

$$\eta (\nabla \otimes \vec{u})^2 = \eta \vec{\omega}^2 + \eta (\operatorname{div} \vec{u})^2 + \eta \operatorname{div} \left((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \vec{u} \operatorname{div} \vec{u} \right). \quad (4.13)$$

Принимая во внимание определение (3.1), преобразуем (4.1), (4.2) с помощью (4.13). Получим (4.11), (4.12). $\square$

5. Энергетические соотношения

Определим полную кинетическую энергию жидкости в объеме

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_V \vec{u}^2 dV, \quad t \in [0, T_f]. \quad (5.1)$$

Любое из равенств (4.1), (4.11) может быть использовано для доказательства теоремы о диссипации энергии для КГД системы (1.1) – (1.2).

Теорема 9 (о диссипации энергии). Пусть $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ – решение начально-краевой задачи (1.1) – (1.5). Тогда полная кинетическая энергия жидкости $E(t)$ является функцией класса $C^1([0, T_f])$ и при каждом $t \in [0, T_f]$ выполняется неравенство

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq 0. \quad (5.2)$$

Доказательство. Пусть $(\vec{u}, p)$ – решение начально-краевой задачи (1.1) – (1.5). Подставив его в (4.11), проинтегрируем полученное равенство по множеству V . Принимая во внимание правило Лейбница, формулу Гаусса–Остроградского и определение (5.1), получим

$$\frac{dE(t)}{dt} + \oint_{\partial V} (\vec{A}_{**} \cdot \vec{n}) dS = - \int_V \Phi_{**} dV. \quad (5.3)$$

При этом $E(t) \in C^1([0, T_f])$. Векторное поле

$$\vec{A}_{**} = (\vec{u} - \vec{w}) \left(\frac{\vec{u}^2}{2} + p \right) - \vec{u}(\vec{w} \cdot \vec{u}) - \eta [\vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{u}] - 2\eta \vec{u} \operatorname{div} \vec{u}$$

при фиксированном t непрерывно дифференцируемо в V и непрерывно в $\bar{V}$. Из свойств гладкости решения $(\vec{u}, p)$ и граничных условий (1.4) следует, что поверхностный интеграл в левой части (5.3) обращается в ноль. Поэтому

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int_V \Phi_{**} dV. \quad (5.4)$$

Неравенство (5.2) вытекает из (5.4), если принять во внимание неотрицательность диссипативной функции Φ_{**} . $\square$

В монографии [4] был получен следующий результат.

Теорема 10. *При любом $t \in [0, T_f]$ выполняется неравенство*

$$E(t) \leq E(0)e^{-Mt}, \quad (5.5)$$

причем $M = (2\eta)/c_F$. Если $T_f = +\infty$, то полная кинетическая энергия $E(t)$ убывает на промежутке $[0, +\infty)$ и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0. \quad (5.6)$$

Теорема 11. *Пусть $T_f = +\infty$. Тогда справедливо энергетическое равенство*

$$E(0) = \int_0^{+\infty} dt \int_V \left(\eta (\operatorname{rot} \vec{u})^2 + 2\eta (\operatorname{div} \vec{u})^2 + \frac{\vec{w}^2}{\tau} \right) dV. \quad (5.7)$$

Доказательство. Принимая во внимание (5.6), проинтегрируем (5.4) по времени t на промежутке $[0, +\infty)$. Получим

$$E(0) = \int_0^{+\infty} dt \int_V \Phi_{**} dV. \quad (5.8)$$

Преобразовав правую часть (5.8) с помощью (4.12), приходим к равенству (5.7). $\square$

Пусть $Q_\infty = V \times [0, +\infty)$. Непосредственным следствием (5.7) являются энергетические оценки

$$\int_{Q_\infty} (\operatorname{rot} \vec{u})^2 dV dt \leq \frac{E(0)}{\eta}, \quad (5.9)$$

$$\int_{Q_\infty} (\operatorname{div} \vec{u})^2 dV dt \leq \frac{E(0)}{2\eta}, \quad (5.10)$$

$$\int_{Q_\infty} ((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p)^2 dV dt \leq \frac{E(0)}{\tau}. \quad (5.11)$$

Если $E(0) = 0$, то из (5.9) и (5.10) следует, что $\operatorname{rot} \vec{u} = 0$ и $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ для всех $(\vec{x}, t) \in Q_\infty$. По теореме 6 для каждого $(\vec{x}, t) \in Q_\infty$ выполняются равенства

$\vec{u}(\vec{x}, t) = 0$, $p(\vec{x}, t) = 0$. Таким образом, решение будет равновесным. С физической точки зрения это означает, что покоящаяся жидкость не может самопроизвольно начать движение в замкнутой полости.

6. Интегральный инвариант

Уравнения гидродинамики часто обладают дополнительными законами сохранения. Например, для квазигидродинамической системы (1.1) – (1.2) справедливо уравнение баланса момента импульса [3]. Изучим вопрос о существовании других законов сохранения для указанной системы. Определим кинетическую энергию единицы объема жидкости по формуле

$$K = \frac{\vec{u}^2}{2}. \quad (6.1)$$

Представим (1.2) в виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\beta} + \nabla(p - \eta \operatorname{div} \vec{u}) = 0. \quad (6.2)$$

Здесь

$$\vec{\beta} = ((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla) \vec{u} - \operatorname{div} (\vec{u} \otimes \vec{w}) - \eta \Delta \vec{u}. \quad (6.3)$$

Символом H обозначим множество пар $(\vec{u}, p)$ функций, таких, что $\vec{u} \in \mathbf{C}^3(\overline{Q})$, $p \in C^3(\overline{Q})$.

Теорема 12. Пусть $(\vec{u}, p)$ – классическое решение начально-краевой задачи (1.1) – (1.5), принадлежащее классу гладкости H . Тогда для любого $t \in [0, T_f]$ выполняется равенство

$$\int_V (\vec{\omega} \cdot \nabla K) dV = \int_V (\vec{\omega}_0 \cdot \nabla K_0) dV, \quad (6.4)$$

где $\vec{\omega}_0 = \operatorname{rot} \vec{u}_0$, $K_0 = \vec{u}_0^2/2$.

Доказательство. Подействуем оператором «rot» на (6.2). Поскольку

$$\operatorname{rot} (\nabla \varphi) = 0, \quad (6.5)$$

где

$$\varphi = p - \eta \operatorname{div} \vec{u},$$

получим

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{\beta} = 0. \quad (6.6)$$

Умножим равенство (6.6) скалярно на вектор ∇K :

$$\left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \cdot \nabla K \right) + (\nabla K \cdot \operatorname{rot} \vec{\beta}) = 0. \quad (6.7)$$

Принимая во внимание теорему Шварца, формулы (3.2), (3.3) и (6.5), а также тождество

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{u}) = 0,$$

приведем (6.7) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\omega} \cdot \nabla K) + \operatorname{div} \left([\vec{\beta} \times \nabla K] - \vec{\omega} \frac{\partial K}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.8)$$

Можно еще преобразовать левую часть (6.8) с помощью (6.1) и (3.4). Это дает

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\omega} \cdot \nabla K) + \operatorname{div} \left([\vec{\beta} \times (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] + [\vec{\beta} \times [\vec{u} \times \vec{\omega}]] - \vec{\omega} \left(\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) \right) = 0. \quad (6.9)$$

Проинтегрируем (6.9) по V , а затем в полученном соотношении воспользуемся правилом Лейбница и формулой Гаусса–Остроградского. Будем иметь

$$\frac{dJ(t)}{dt} + \oint_{\partial V} (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (6.10)$$

Здесь

$$J(t) = \int_V (\vec{\omega} \cdot \nabla K) dV, \quad t \in [0, T_f]. \quad (6.11)$$

Векторное поле

$$\vec{B} = [\vec{\beta} \times (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] + [\vec{\beta} \times [\vec{u} \times \vec{\omega}]] - \vec{\omega} \left(\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)$$

при фиксированном t непрерывно дифференцируемо в $\bar{V}$. Из свойств гладкости решения $(\vec{u}, p)$ и первого краевого условия (1.4) следует, что поверхностный интеграл в левой части (6.10) обращается в ноль. Формула (6.10) принимает вид

$$\frac{dJ(t)}{dt} = 0. \quad (6.12)$$

Из (6.12) следует, что

$$J(t) = J(0), \quad t \in [0, T_f]. \quad (6.13)$$

Равенство (6.13) эквивалентно (6.4). Оно означает, что величина $J(t)$, определяемая формулой (6.11), представляет собой интегральный инвариант для КГД системы на гладком решении начально-краевой задачи (1.1) – (1.5). $\square$

Закон сохранения в локальной форме (6.8) для классической системы Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости был получен, например, в работе А.Ф. Шевякова и М. Оберлака [9]. При этом вектор $\vec{\beta} = \vec{\beta}_{NS}$ вычислялся по формуле

$$\vec{\beta} = [\vec{\omega} \times \vec{u}] - \eta \Delta \vec{u}.$$

Заключение

Единственность классического решения поставленной начально-краевой задачи доказана в [4]. Вопрос о его существовании является очень сложным. Представляют интерес теоремы о несуществовании решений КГД системы определенного класса (потенциальных, однородно-винтовых) для конкретных задач. Это

может стать темой дальнейших исследований. Проблема поиска новых законов сохранения и интегральных инвариантов для КГД уравнений также является актуальной.

Список литературы

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
- [2] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.
- [3] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.
- [4] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.
- [5] Шеретов Ю.В. Точные решения квазигидродинамической системы на основе формулы Био-Савара // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 38–49. <https://doi.org/10.26456/vtpmk525>
- [6] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1976. 391 с.
- [7] Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 589 с.
- [8] Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 256 с.
- [9] Cheviakov A.F., Oberlack M. Generalized Ertel's theorem and infinite hierarchies of conserved quantities for three-dimensional time-dependent Euler and Navier-Stokes // Journal of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 760. Pp. 368–386. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.611>

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. О свойствах решений основной начально-краевой задачи для квазигидродинамических уравнений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 3. С. 5–19. <https://doi.org/10.26456/vtpmk536>

Сведения об авторах

1. Шеретов Юрий Владимирович

заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

ON THE PROPERTIES OF SOLUTIONS OF MAIN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASI-HYDRODYNAMIC EQUATIONS

Sheretov Yurii Vladimirovich

Head of Mathematical Analysis Department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 10.07.2019, revised 12.08.2019.

For quasi-hydrodynamic system, describing the motions of weakly compressible viscous fluid, the main initial-boundary problem is posed. It is shown that there are no nonequilibrium solutions to this problem with irrotational solenoidal velocity field. For quasi-hydrodynamic system some new energy equalities and inequalities are derived. Its dissipative properties are investigated. The additional conservation law is obtained. The corresponding integral invariant is constructed.

Keywords: quasi-hydrodynamic system, Navier-Stokes equations, dissipative properties, integral invariants, vortex flows.

Citation

Sheretov Yu.V., “On the properties of solutions of main initial-boundary value problem for quasi-hydrodynamic equations”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 3, 5–19 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk536>

References

- [1] Lojtsyanskij L.G., *Mekhanika zhidkosti i gaza [Fluid and Gas Mechanics]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (in Russian), 840 pp.
- [2] Sheretov Yu.V., “On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type”, *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Modeling]*, **6**:10 (1994), 35–45 (in Russian).
- [3] Sheretov Yu.V., *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno–vremennom osrednenii [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2009 (in Russian), 400 pp.
- [4] Sheretov Yu.V., *Regulyarizovannyye uravneniya gidrodinamiki [Regularized Hydrodynamic Equations]*, Tver State University, Tver, 2016 (in Russian), 222 pp.
- [5] Sheretov Yu.V., “Exact solutions of quasi-hydrodynamic system on the base of Biot-Savart formula”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 1, 38–49 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk525>.

- [6] Mikhajlov V.P., *Differentsialnye uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial Differential Equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 391 pp.
- [7] Rektoris K., *Variatsionnye metody v matematicheskoj fizike i tekhnike [Variational methods in mathematical physics and technology]*, Mir Publ., Moscow, 1985 (in Russian), 589 pp.
- [8] Serrin Dzh., *Matematicheskie osnovy klassicheskoy mekhaniki zhidkosti [Mathematical foundations of classical fluid mechanics]*, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Moscow, Izhevsk, 2001 (in Russian), 256 pp.
- [9] Cheviakov A.F., Oberlack M., “Generalized Ertel’s theorem and infinite hierarchies of conserved quantities for three-dimensional time-dependent Euler and Navier-Stokes”, *Journal of Fluid Mechanics*, **760** (2014), 368–386, <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.611>.