Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Мартынов, О сильной единственности минимальных проекций в пространстве l_∞^9 , *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2020, выпуск 4, 28–42

DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:16:24

О СИЛЬНОЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ l_∞^9

Мартынов О.М.

Военная академия воздушно-космической обороны имени Маршала Советского
Союза Г.К. Жукова, г. Тверь

Поступила в редакцию 30.09.2020, после переработки 23.10.2020.

В работе рассматриваются минимальные проекции пространства l_∞^9 на некоторые подпространства коразмерности 3. Для них найдены относительные проекционные константы, а в случае минимальной проекции с единичной нормой найдено максимальное значение константы сильной единственности. Найденные проекционные константы могут найти применение в вычислительной математике, в частности, для оценки сходимости проекционных методов решения операторных уравнений и в оценках ошибки алгоритма Ремеза.

Ключевые слова: пространство, подпространство, оператор проектирования (проекция), относительная проекционная константа, константа сильной единственности.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 4. С. 28–42.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk603>

1. Введение

Пусть Y – замкнутое подпространство банахова пространства X .

Определение 1. *Линейный ограниченный оператор $\pi : X \rightarrow Y$ называется оператором проектирования (проекцией) пространства X на Y , если $\pi y = y$ для любого $y \in Y$.*

Множество всех операторов проектирования пространства X на подпространство Y будем обозначать через $\pi(X, Y)$.

Определение 2. *Относительной проекционной константой подпространства Y в пространстве X называется число $\lambda(Y, X) = \inf\{\|\pi\|, \pi \in \pi(X, Y)\}$.*

Среди операторов проектирования особый интерес представляют те, для которых выполняется равенство $\|\pi\| = \lambda(Y, X)$. Такие проекции, если они существуют, называются *минимальными*.

Множество минимальных проекций из X на Y будем обозначать $\Delta(X, Y)$.

Определение 3. *Если множество $\Delta(X, Y)$ состоит ровно из одного элемента, то говорят, что пара (X, Y) обладает свойством единственности.*

Условия единственности для некоторых минимальных проекций в пространствах l_∞^n и l_1^n можно найти, например, в [1], [5], [9], [17] и [20].

Пусть Y_6 есть 6-мерное подпространство пространства $X = l_\infty^9$, 9-мерного линейного нормированного пространства элементов $x = (x_i)_{i=1}^9$ с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq 9} |x_i|.$$

Предложение 1. [1] *Любой оператор проектирования $\pi : l_\infty^9 \rightarrow Y_6$ имеет вид π_α , где*

$$\pi_\alpha x = x - \sum_{i=1}^3 \alpha_i f_i(x),$$

$\alpha_i = (\alpha_{ij})_{j=1}^9$ – элементы пространства l_∞^9 , а $f_i = (f_{ij})_{j=1}^9 \neq 0$ – линейные функционалы, определенные в l_∞^9 , причем

$$f_i(\alpha_j) = \sum_{k=1}^9 \alpha_{jk} f_{ik} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.1)$$

Гиперплоскости пространства l_∞^9 имеют вид

$$f_i^{-1}(0) = \left\{ x \in l_\infty^9 \mid f_i(x) = \sum_{k=1}^9 f_{ik} x_k = 0 \right\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

и в силу линейной независимости функционалов f_i ($i = 1, 2, 3$), которая следует из формул (1.1), пространство $Y_6 = \cap_{i=1}^3 f_i^{-1}(0)$ является подпространством пространства l_∞^9 коразмерности 3.

Определение 4. *Оператор проектирования $\pi_0 \in \Delta(l_\infty^9, Y_6)$ называется сильно единственным, если для любого $\pi \in \pi(l_\infty^9, Y_6)$ справедливо неравенство*

$$\|\pi_0\| + k \cdot \|\pi - \pi_0\| \leq \|\pi\| \quad (1.2)$$

где k не зависит от π и $k \in (0; 1]$.

Число k называется константой сильной единственности, а через k_0 обозначается максимальное значение k , при котором выполняется неравенство (1.2).

Очевидно, что сильно единственный оператор π_0 имеет минимальную норму, а пара (l_∞^9, Y_6) обладает свойством единственности.

Предложение 2. [1] *Нормы операторов π и $\pi - \pi_0$ вычисляются по формулам*

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq i \leq 9} T_i, \quad \|\pi - \pi_0\| = \max_{1 \leq i \leq 9} B_i,$$

где

$$T_i = \sum_{j=1}^9 \left| \delta_{ij} - \sum_{k=1}^3 \alpha_{ki} f_{kj} \right|, \quad B_i = \sum_{j=1}^9 \left| \sum_{k=1}^3 \left(\alpha_{ki} - \alpha_{ki}^{(0)} \right) f_{kj} \right|,$$

а оператор π_0 имеет вид $\pi_\alpha^{(0)}$, где

$$\pi_\alpha^{(0)} x = x - \sum_{k=1}^3 \alpha_k^{(0)} f_k(x).$$

Определение 5. Абсолютной проекционной константой порядков k, n называется число

$$\lambda(k, n) = \sup\{\lambda(Y_k, X_n) : Y_k \subset X_n\},$$

где X_n и Y_k – любые пространства размерности n и их подпространства размерности k соответственно, $k, n \in \mathbb{N}, k < n$.

Как отмечено в [16], теория аппроксимации является как «заказчиком», так и «поставщиком» новых идей при изучении минимальных проекций и проекционных констант. В частности, с теорией аппроксимации связано появление понятия сильной единственности, введенное Ньюменом и Шапиро в 1963-64 годах ([14], [15]).

Напомним, что элемент $v_0 \in V \subset Z$ называется сильно единственным элементом наилучшего приближения к $z \in Z$, если существует вещественное число $k > 0$ такое, что для любого $v \in V$ справедливо неравенство

$$\|z - v_0\| + k \cdot \|v - v_0\| \leq \|z - v\|.$$

Если в этом определении положить $Z = \pi(l_\infty^9, Y_6)$, $z = 0$, $v = \pi$ и $v_0 = \pi_0$, то приходим к определению 4.

Вычисление проекционных констант (или их оценок) находит применение в вычислительной математике. В частности, для оценки сходимости проекционных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений удобно использовать абсолютные проекционные константы $\lambda(k, n)$ или их оценки. Известно [20], что суть проекционных методов состоит в следующем. Пусть X – бесконечномерное банахово пространство, Y – другое банахово пространство. Пусть A – линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор с областью определения $D(A) \subset X$ и областью значений $Im(A) \subset Y$. Пусть также заданы две последовательности подпространств (X_n) и $(Y_n) : X_n \subset D(A), Y_n \subset Y (n = 1, 2, \dots)$ и последовательность операторов проектирования: $(\pi_n) : Y \rightarrow Y_n, \pi_n(Y) = Y_n (n = 1, 2, \dots)$. Пусть дано линейное уравнение $Ax = y$ (здесь $x \in D(A), y \in Im(A)$). Заменяем это уравнение приближенным: $\pi_n(Ax_n - y) = 0$, где $x_n \in X_n$. Отыскание последовательности (x_n) и выяснение ее сходимости и составляет суть проекционных методов.

К числу проекционных методов относят, например, метод Петрова-Галеркина, метод Рунге, а также метод конечных элементов. Последний можно рассматривать как синтез методов Петрова-Галеркина и конечных разностей. Весьма упрощенно можно сказать, что метод конечных элементов это проекционный метод со специальными координатными функциями, заменяющими базис $(e_i)_1^\infty$.

Константы сильной единственности нашли широкое применение в оценках ошибки алгоритма Ремеза [18].

При изучении минимальных проекций ставятся две проблемы: 1) вопрос о существовании таких проекций; 2) вопрос об их единственности.

Для конечномерного пространства X актуальной является как проблема единственности минимальной проекции, так и определения точных значений $\lambda(Y, X)$ или их оценок сверху или снизу.

Для $\lambda(k, n)$ известны следующие точные значения:

- $\lambda(1, n) = 1$ [20],
- $\lambda(n - 1, n) = \frac{2(n-1)}{n}$ [2],

$$- \lambda(3, 5) = \frac{5+4\sqrt{2}}{7} [3].$$

Известны [4] оценки для $\lambda(k, n)$ сверху, а именно

$$\lambda(k, n) \leq \varphi(k, n) = \frac{k + \sqrt{k(n-1)(n-k)}}{n}.$$

Что касается оценок снизу, то они известны лишь для частных случаев и получены, в основном, с помощью относительных проекционных констант. При этом точность полученных оценок можно определить с помощью неравенств

$$\lambda(Y_{n-k}, l_\infty^n) \leq \lambda(n-k, n) \leq \varphi(n-k, n), \lambda(Y_{n-k}, l_1^n) \leq \lambda(n-k, n) \leq \varphi(n-k, n).$$

В работах [1], [5] определены относительные проекционные константы гиперплоскостей в пространствах $l_1, l_1^n, l_\infty, l_\infty^n$. В работе Локтя [7] были получены оценки снизу для $\lambda(n-2, n)$ и $\lambda(n-3, n)$. Для получения этих оценок были найдены относительные проекционные константы $\lambda(Y_{n-2}, l_1^n), \lambda(Y_{n-2}, l_\infty^n), \lambda(Y_{n-3}, l_1^n)$ для некоторых классов подпространств. Дальнейшее развитие этих результатов для оценок снизу констант $\lambda(n-4, n)$ и $\lambda(n-5, n)$ можно найти в [9].

С проблемой единственности тесно связана проблема сильной единственности минимальных проекций.

В [5] Левицким было найдено максимальное значение константы сильной единственности операторов проектирования с единичной нормой на гиперплоскость в пространствах l_∞^n и l_1^n . Там же получены некоторые оценки констант сильной единственности операторов проектирования с нормой, большей единицы, опять же для случая гиперплоскости. Локтем [8] получено максимальное значение константы сильной единственности оператора проектирования с неединичной нормой на гиперплоскость в пространстве l_∞^n . В работах [10], [11] найдены максимальные значения констант сильной единственности проекций на подпространства коразмерности 2 и 3 пространства l_∞^4 . Позднее результат работы [11] был обобщен для пространств размерности $n \geq 3$ [19], а дальнейшее продвижение было получено в [6]. Также, в [12], [13] были найдены константы сильной единственности для операторов проектирования с единичной нормой на некоторые подпространства коразмерности 2 в пространстве l_∞^{2n} .

Найдем проекционные константы для операторов проектирования пространства l_∞^9 на некоторый класс подпространств коразмерности 3.

2. Относительные проекционные константы

Функционалы f_i ($i = 1, 2, 3$) зададим следующим образом:

$$f_i = (f_{ij})_{j=1}^9, \text{ где } f_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, j = i+6; \\ r, & \text{если } j = i+3; \\ 0, & \text{если } j \neq i, j \neq i+3, j \neq i+6. \end{cases} \quad (2.1)$$

где $r > 0$. В этом случае, если $Y_6 = \cap_{i=1}^3 f_i^{-1}(0)$, то для проекций $\pi_\alpha \in \pi(l_\infty^9, Y_6)$ соотношения (1.1) примут вид

$$f_i(\alpha_j) = \alpha_{ji} + r\alpha_{ji+3} + \alpha_{ji+6} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.2)$$

Теорема 1. Пусть $\pi_\alpha^{(0)}$ – минимальный оператор проектирования пространства l_∞^9 на подпространство Y_6 , определяемое функционалами (2.1). Тогда

$$(1) \lambda(Y_6, l_\infty^9) = \|\pi_\alpha^{(0)}\| = 1, \text{ если } r \geq 2;$$

$$(2) \lambda(Y_6, l_\infty^9) = \|\pi_\alpha^{(0)}\| = \frac{4}{r^2 - 2r + 4}, \text{ если } 0 < r < 2.$$

Доказательство. Найдем значения $T_i^{(0)} = \sum_{j=1}^9 |\delta_{ij} - \sum_{k=1}^3 \alpha_{ki}^{(0)} f_{kj}|$ ($i = 1, \dots, 9$). Имеем

$$\begin{aligned} T_1^{(0)} &= \sum_{j=1}^9 \left| \delta_{1j} - \sum_{k=1}^3 \alpha_{k1}^{(0)} f_{kj} \right| = |1 - \alpha_{11}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{11}^{(0)}| + (2+r) \left(|\alpha_{21}^{(0)}| + |\alpha_{31}^{(0)}| \right), \\ T_2^{(0)} &= |1 - \alpha_{22}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{22}^{(0)}| + (2+r) \left(|\alpha_{12}^{(0)}| + |\alpha_{32}^{(0)}| \right), T_3^{(0)} = |1 - \alpha_{33}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{33}^{(0)}| \\ &\quad + (2+r) \left(|\alpha_{13}^{(0)}| + |\alpha_{23}^{(0)}| \right), T_4^{(0)} = |1 - r\alpha_{14}^{(0)}| + 2|\alpha_{14}^{(0)}| + (2+r) \left(|\alpha_{24}^{(0)}| + |\alpha_{34}^{(0)}| \right), \\ T_5^{(0)} &= |1 - r\alpha_{25}^{(0)}| + 2|\alpha_{25}^{(0)}| + (2+r) \left(|\alpha_{15}^{(0)}| + |\alpha_{35}^{(0)}| \right), T_6^{(0)} = |1 - r\alpha_{36}^{(0)}| + 2|\alpha_{36}^{(0)}| \\ &\quad + (2+r) \left(|\alpha_{16}^{(0)}| + |\alpha_{26}^{(0)}| \right), T_7^{(0)} = |1 - \alpha_{17}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{17}^{(0)}| + (2+r) \left(|\alpha_{27}^{(0)}| + |\alpha_{37}^{(0)}| \right), \\ T_8^{(0)} &= |1 - \alpha_{28}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{28}^{(0)}| + (2+r) \left(|\alpha_{18}^{(0)}| + |\alpha_{38}^{(0)}| \right), T_9^{(0)} = |1 - \alpha_{39}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{39}^{(0)}| \\ &\quad + (2+r) \left(|\alpha_{19}^{(0)}| + |\alpha_{29}^{(0)}| \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая.

(1) $r \geq 2$. В равенствах, полученных для T_i ($i = 1, \dots, 9$), положим $\alpha_{14}^{(0)} = \alpha_{25}^{(0)} = \alpha_{36}^{(0)} = \frac{1}{r}$, все остальные α_{ij} пусть будут равны нулю. При этом условия (2.2) выполняются. Тогда $T_1^{(0)} = T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = T_7^{(0)} = T_8^{(0)} = T_9^{(0)} = 1, T_4^{(0)} = T_5^{(0)} = T_6^{(0)} = \frac{2}{r} \leq 1$.

Следовательно,

$$\lambda(Y_6, l_\infty^9) = \|\pi_\alpha^{(0)}\| = \max_{1 \leq i \leq 9} T_i^{(0)} = 1.$$

(2) $0 < r < 2$. Очевидно, что $\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_i^{(0)}$ ($i = 1, \dots, 9$). Оценим выражения для $T_i^{(0)}$ ($i = 1, \dots, 9$) снизу. Для этого воспользуемся тем, что $|x - y| \geq |x| - |y|$ и очевидными неравенствами $|\alpha_{ij}^{(0)}| \geq 0$. Тогда

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_1^{(0)} \geq 1 - |\alpha_{11}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{11}^{(0)}| = 1 + r|\alpha_{11}^{(0)}|.$$

Аналогично получим

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_2^{(0)} \geq 1 + r|\alpha_{22}^{(0)}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_3^{(0)} \geq 1 + r|\alpha_{33}^{(0)}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_4^{(0)} \geq 1 + (2-r)|\alpha_{14}^{(0)}|,$$

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_5^{(0)} \geq 1 + (2-r)|\alpha_{25}^{(0)}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_6^{(0)} \geq 1 + (2-r)|\alpha_{36}^{(0)}|,$$

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_7^{(0)} \geq 1 + r|\alpha_{17}^{(0)}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_8^{(0)} \geq 1 + r|\alpha_{28}^{(0)}|, \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq T_9^{(0)} \geq 1 + r|\alpha_{39}^{(0)}|.$$

Из соотношений (2.2) следует, что

$$\alpha_{14} = \frac{1}{r} \left(1 - \alpha_{11}^{(0)} - \alpha_{17}^{(0)} \right), \alpha_{25} = \frac{1}{r} \left(1 - \alpha_{22}^{(0)} - \alpha_{28}^{(0)} \right), \alpha_{36} = \frac{1}{r} \left(1 - \alpha_{33}^{(0)} - \alpha_{39}^{(0)} \right).$$

Используя эти равенства, умножим неравенства для $T_i^{(0)} (i = 4, 5, 6)$ на $\frac{r^2}{2-r} > 0$ и сложим все неравенства для $T_i^{(0)} (i = 1, \dots, 9)$ почленно. Получим

$$\begin{aligned} \left(6 + \frac{3r^2}{2-r} \right) \|\pi_\alpha^{(0)}\| &\geq 6 + \frac{3r^2}{2-r} + r \left(|\alpha_{11}^{(0)}| + |\alpha_{22}^{(0)}| + |\alpha_{33}^{(0)}| + |\alpha_{17}^{(0)}| + |\alpha_{28}^{(0)}| + |\alpha_{39}^{(0)}| \right) \\ &+ r^2 \left(|\alpha_{14}^{(0)}| + |\alpha_{25}^{(0)}| + |\alpha_{36}^{(0)}| \right) = 6 + \frac{3r^2}{2-r} + r \left(|\alpha_{11}^{(0)}| + |\alpha_{22}^{(0)}| + |\alpha_{33}^{(0)}| + |\alpha_{17}^{(0)}| + |\alpha_{28}^{(0)}| \right. \\ &\quad \left. + |\alpha_{39}^{(0)}| \right) + r \left(|1 - \alpha_{11}^{(0)} - \alpha_{17}^{(0)}| + |1 - \alpha_{22}^{(0)} - \alpha_{28}^{(0)}| + |1 - \alpha_{33}^{(0)} - \alpha_{39}^{(0)}| \right) \geq 6 + \frac{3r^2}{2-r} \\ &+ r \left(|\alpha_{11}^{(0)}| + |\alpha_{22}^{(0)}| + |\alpha_{33}^{(0)}| + |\alpha_{17}^{(0)}| + |\alpha_{28}^{(0)}| + |\alpha_{39}^{(0)}| \right) + r \left(3 - |\alpha_{11}^{(0)}| - |\alpha_{17}^{(0)}| - |\alpha_{22}^{(0)}| \right. \\ &\quad \left. - |\alpha_{28}^{(0)}| - |\alpha_{33}^{(0)}| - |\alpha_{39}^{(0)}| \right) = 6 + \frac{3r^2}{2-r} + 3r = \frac{12}{2-r}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(2 + \frac{r^2}{2-r} \right) \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq \frac{4}{2-r}.$$

Следовательно,

$$\lambda(Y_6, l_\infty^9) = \|\pi_\alpha^{(0)}\| \geq \frac{4}{r^2 - 2r + 4}.$$

Покажем, что эта оценка снизу точная. Для этого найдем $\alpha_i^{(0)} (i = 1, 2, 3)$ такие, что

$$T_i^{(0)} = \frac{4}{r^2 - 2r + 4} \quad (i = 1, \dots, 9).$$

Положим

$$\begin{aligned} \alpha_{14}^{(0)} = \alpha_{25}^{(0)} = \alpha_{36}^{(0)} &= \frac{r}{r^2 - 2r + 4}, \\ \alpha_{11}^{(0)} = \alpha_{17}^{(0)} = \alpha_{22}^{(0)} = \alpha_{28}^{(0)} = \alpha_{33}^{(0)} = \alpha_{39}^{(0)} &= \frac{2-r}{r^2 - 2r + 4}. \end{aligned}$$

Остальные α_{ij} положим равными нулю. Условия (2.2) при этом выполняются.

Тогда

$$\begin{aligned} T_1^{(0)} = T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = T_7^{(0)} = T_8^{(0)} = T_9^{(0)} &= |1 - \alpha_{11}^{(0)}| + (1+r)|\alpha_{11}^{(0)}| = \left| 1 - \frac{2-r}{r^2 - 2r + 4} \right| \\ &+ \frac{(1+r)(2-r)}{r^2 - 2r + 4} = \frac{r^2 - r + 2}{r^2 - 2r + 4} + \frac{2+r-r^2}{r^2 - 2r + 4} = \frac{4}{r^2 - 2r + 4}, \\ T_4^{(0)} = T_5^{(0)} = T_6^{(0)} &= |1 - r\alpha_{14}^{(0)}| + 2|\alpha_{14}^{(0)}| = \left| 1 - \frac{r^2}{r^2 - 2r + 4} \right| + \frac{2r}{r^2 - 2r + 4} \\ &= \frac{4-2r}{r^2 - 2r + 4} + \frac{2r}{r^2 - 2r + 4} = \frac{4}{r^2 - 2r + 4}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lambda(Y_6, l_\infty^9) = \|\pi_\alpha^{(0)}\| = \frac{4}{r^2 - 2r + 4}.$$

Очевидно, что $\frac{4}{r^2 - 2r + 4} > 1$, так как это неравенство равносильно условию $0 < r < 2$. □

Пусть теперь функционалы f_i ($i = 1, 2, 3$) имеют вид :

$$f_i = (f_{ij})_{j=1}^9, \text{ где } f_{ij} = \begin{cases} r, & \text{если } j = i, j = i + 6; \\ 1, & \text{если } j = i + 3; \\ 0, & \text{если } j \neq i, j \neq i + 3, j \neq i + 6. \end{cases} \quad (2.3)$$

где $r > 0$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\tilde{\pi}_\alpha^{(0)}$ – минимальный оператор проектирования пространства l_∞^9 на подпространство $\tilde{Y}_6$, определяемое функционалами (2.3). Тогда

$$(1) \lambda(\tilde{Y}_6, l_\infty^9) = \|\tilde{\pi}_\alpha^{(0)}\| = 1, \text{ если } 0 < r \leq \frac{1}{2};$$

$$(2) \lambda(\tilde{Y}_6, l_\infty^9) = \|\tilde{\pi}_\alpha^{(0)}\| = \frac{4r^2}{4r^2 - 2r + 1}, \text{ если } r > \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы 2 можно провести рассуждения аналогичные тем, которые были приведены при доказательстве теоремы 1. Поступим иначе. Рассмотрим функционалы $\hat{f}_i$ ($i = 1, 2, 3$), которые определяются так:

$$\hat{f}_i = \frac{f_i}{r} = (\hat{f}_{ij})_{j=1}^9, \text{ где } \hat{f}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, j = i + 6; \\ 1/r, & \text{если } j = i + 3; \\ 0, & \text{если } j \neq i, j \neq i + 3, j \neq i + 6. \end{cases} \quad (2.4)$$

Очевидно, что подпространство $\hat{Y}_6 = \cap_{i=1}^3 \hat{f}_i^{-1}(0)$ совпадает с подпространством $\tilde{Y}_6$ и при $s = 1/r$ для функционалов (2.4) справедлива теорема 1. Это значит, что

$$(1) \lambda(\hat{Y}_6, l_\infty^9) = 1, \text{ если } s \geq 2; (2) \lambda(\hat{Y}_6, l_\infty^9) = \frac{4}{s^2 - 2s + 4}, \text{ если } 0 < s < 2.$$

Заменив в полученных константах s на $1/r$, получим относительные проекционные константы из условия теоремы 2. □

3. Константы сильной единственности

Лемма 1. Значение константы сильной единственности k из неравенства (1.2) для оператора проектирования $\pi_\alpha^{(0)}$, который определяется функционалами (2.1), удовлетворяет условию

$$k \leq \frac{r}{r + 2},$$

если $r \geq 2$.

Доказательство. Для получения оценки константы k сверху рассмотрим оператор $\bar{\pi}x = x - \sum_{k=1}^3 \bar{\alpha}_k f_k(x)$. Значения $\bar{\alpha}_k$ ($k = 1, 2, 3$) определим следующим образом: $0 < \bar{\alpha}_{11} \leq 1, \bar{\alpha}_{11} = \bar{\alpha}_{22} = \bar{\alpha}_{33} = \bar{\alpha}_{17} = \bar{\alpha}_{28} = \bar{\alpha}_{39}, \bar{\alpha}_{14} = \bar{\alpha}_{25} = \bar{\alpha}_{36} \geq 0$. Значения всех остальных α_{ij} положим равными нулю.

Вычислим нормы операторов $\bar{\pi}$ и $\bar{\pi} - \pi^{(0)}$.

Имеем

$$\|\bar{\pi}\| = \max_{1 \leq i \leq 9} \bar{T}_i = \max_i \sum_{j=1}^9 \left| \delta_{ij} - \sum_{k=1}^3 \bar{\alpha}_{ki} f_{kj} \right|.$$

Найдем значения $\bar{T}_i$, учитывая, что $1 - \bar{\alpha}_{11} \geq 0, 1 - r\bar{\alpha}_{14} = \bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{17} > 0$.

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_2 = \bar{T}_3 = \bar{T}_7 = \bar{T}_8 = \bar{T}_9 = 1 - \bar{\alpha}_{11} + (1 + r)\bar{\alpha}_{11} = 1 + r\bar{\alpha}_{11} > 1,$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_4 = \dots = \bar{T}_5 = \bar{T}_6 &= 1 - r\bar{\alpha}_{14} + 2\bar{\alpha}_{14} = 1 - r\bar{\alpha}_2 + (1 + (n-2)r)\bar{\alpha}_2 \\ &= 1 + (2-r)\bar{\alpha}_{14} \leq 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\max_{1 \leq i \leq 9} \bar{T}_i = \bar{T}_1 = 1 + r\bar{\alpha}_{11}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \|\bar{\pi} - \pi^{(0)}\| &= \max_{1 \leq i \leq 9} \bar{B}_i = \max_{1 \leq i \leq 9} \sum_{j=1}^9 \left| \sum_{k=1}^3 (\bar{\alpha}_{ki} - \alpha_{ki}^{(0)}) f_{kj} \right| \\ &= \max \left\{ \sum_{j=1}^9 |\bar{\alpha}_{11} f_{1j}|; \sum_{j=1}^9 |\bar{\alpha}_{22} f_{2j}|; \sum_{j=1}^9 |\bar{\alpha}_{33} f_{3j}|; \sum_{j=1}^9 \left| \left(\bar{\alpha}_{14} - \frac{1}{r} \right) f_{1j} \right|; \right. \\ &\quad \sum_{j=1}^9 \left| \left(\bar{\alpha}_{25} - \frac{1}{r} \right) f_{2j} \right|; \sum_{j=1}^9 \left| \left(\bar{\alpha}_{36} - \frac{1}{r} \right) f_{3j} \right|; \sum_{j=1}^9 |\bar{\alpha}_{17} f_{1j}|; \sum_{j=1}^9 |\bar{\alpha}_{28} f_{2j}|; \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^9 |\bar{\alpha}_{39} f_{3j}| \right\} = \max \left\{ (r+2)|\bar{\alpha}_{11}|; (r+2)|\bar{\alpha}_{22}|; (r+2)|\bar{\alpha}_{33}|; (r+2) \left| \bar{\alpha}_{14} - \frac{1}{r} \right|; \right. \\ &\quad \left. (r+2) \left| \bar{\alpha}_{25} - \frac{1}{r} \right|; (r+2) \left| \bar{\alpha}_{36} - \frac{1}{r} \right|; (r+2)|\bar{\alpha}_{17}|; (r+2)|\bar{\alpha}_{28}|; (r+2)|\bar{\alpha}_{39}| \right\} \\ &= (r+2) \cdot \max \left\{ |\bar{\alpha}_{11}|; \left| \bar{\alpha}_{14} - \frac{1}{r} \right| \right\} = (r+2) \cdot \max \left\{ |\bar{\alpha}_{11}|; \frac{1}{r} |1 - r\bar{\alpha}_{14}| \right\} \\ &= (r+2) \cdot \max \left\{ |\bar{\alpha}_{11}|; \frac{1}{r} |\bar{\alpha}_{11} + \bar{\alpha}_{17}| \right\} = (r+2) \cdot \max \left\{ |\bar{\alpha}_{11}|; \frac{2}{r} |\bar{\alpha}_{11}| \right\} = (r+2)\bar{\alpha}_{11}, \end{aligned}$$

так как $r \geq 2$.

Найдем для k оценку сверху. Неравенство (1.2) примет вид $1 + k \cdot (r+2)\bar{\alpha}_{11} \leq 1 + r\bar{\alpha}_{11}$, откуда получим, что $k \leq \frac{r}{r+2}$. Очевидно, что $k \in (0, 1]$.

□

Теорема 3. Оператор проектирования $\pi_\alpha^{(0)}$ пространства l_∞^9 на подпространство Y_6 , определяемое функционалами (2.1), является сильно единственным и максимальное значение константы сильной единственности k_0 равно $\frac{r}{r+2}$, если $r \geq 2$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{j=1}^9 \left| \delta_{1j} - \sum_{k=1}^3 \alpha_{k1} f_{kj} \right| = |1 - \alpha_{11}| + (1+r)|\alpha_{11}| + (2+r)(|\alpha_{21}| + |\alpha_{31}|), \\ T_2 &= |1 - \alpha_{22}| + (1+r)|\alpha_{22}| + (2+r)(|\alpha_{12}| + |\alpha_{32}|), T_3 = |1 - \alpha_{33}| + (1+r)|\alpha_{33}| \\ &\quad + (2+r)(|\alpha_{13}| + |\alpha_{23}|), T_4 = |1 - r\alpha_{14}| + 2|\alpha_{14}| + (2+r)(|\alpha_{24}| + |\alpha_{34}|), \\ T_5 &= |1 - r\alpha_{25}| + 2|\alpha_{25}| + (2+r)(|\alpha_{15}| + |\alpha_{35}|), T_6 = |1 - r\alpha_{36}| + 2|\alpha_{36}| \\ &\quad + (2+r)(|\alpha_{16}| + |\alpha_{26}|), T_7 = |1 - \alpha_{17}| + (1+r)|\alpha_{17}| + (2+r)(|\alpha_{27}| + |\alpha_{37}|), \\ T_8 &= |1 - \alpha_{28}| + (1+r)|\alpha_{28}| + (2+r)(|\alpha_{18}| + |\alpha_{38}|), T_9 = |1 - \alpha_{39}| + (1+r)|\alpha_{39}| \\ &\quad + (2+r)(|\alpha_{19}| + |\alpha_{29}|). \end{aligned}$$

Далее найдем

$$B_i = \sum_{j=1}^9 \left| \sum_{k=1}^3 (\bar{\alpha}_{ki} - \alpha_{ki}^{(0)}) f_{kj} \right| \quad (i = 1, \dots, 9).$$

Для $i = 1, 2, 3, 7, 8, 9$ получим $B_i = (2+r) \sum_{k=1}^3 |\alpha_{ki}|$. Остальные B_i будут иметь вид:

$$\begin{aligned} B_4 &= (2+r) \left(\left| \alpha_{14} - \frac{1}{r} \right| + |\alpha_{24}| + |\alpha_{34}| \right), B_5 = (2+r) \left(|\alpha_{15}| + \left| \alpha_{25} - \frac{1}{r} \right| + |\alpha_{35}| \right), \\ B_6 &= (2+r) \left(|\alpha_{16}| + |\alpha_{26}| + \left| \alpha_{36} - \frac{1}{r} \right| \right). \end{aligned}$$

Покажем, что $k_0 = \frac{r}{r+2}$ ($r \geq 2$) – максимально возможное значение константы сильной единственности. Для этого надо доказать, что неравенство

$$\|\pi_\alpha^{(0)}\| + k_0 \cdot \max_{1 \leq i \leq 9} B_i \leq \max_{1 \leq i \leq 9} T_i \quad (3.1)$$

выполняется при любых значениях α_i , ($i = 1, 2, 3$).

Сравним значения B_i . Докажем неравенство

$$B_1 + B_7 \geq 2B_4. \quad (3.2)$$

Оно равносильно неравенству

$$\sum_{k=1}^3 |\alpha_{k1}| + \sum_{k=1}^3 |\alpha_{k7}| \geq 2 \left(\left| \alpha_{14} - \frac{1}{r} \right| + |\alpha_{24}| + |\alpha_{34}| \right).$$

Теперь достаточно доказать два неравенства:

$$\sum_{k=2}^3 |\alpha_{k1}| + \sum_{k=2}^3 |\alpha_{k7}| \geq 2 \sum_{k=2}^3 |\alpha_{k4}| \text{ и } |\alpha_{11}| + |\alpha_{17}| \geq 2 \left| \alpha_{14} - \frac{1}{r} \right|.$$

Так как $|\alpha_{k1}| + |\alpha_{k7}| \geq |\alpha_{k1} + \alpha_{k7}|$, $|\alpha_{k4}| = (1/r)|\alpha_{k1} + \alpha_{k7}|$ ($k = 2, 3$) и $2/r \leq 1$, то

$$\sum_{k=2}^3 |\alpha_{k1}| + \sum_{k=2}^3 |\alpha_{k7}| \geq \sum_{k=2}^3 |\alpha_{k1} + \alpha_{k7}| \geq \frac{2}{r} \sum_{k=2}^3 |\alpha_{k1} + \alpha_{k7}| = 2 \sum_{k=2}^3 |\alpha_{k4}|,$$

что доказывает первое неравенство. Для доказательства второго неравенства воспользуемся тем, что $\alpha_{11} + \alpha_{17} = 1 - r\alpha_{14}$. Получим

$$|\alpha_{11}| + |\alpha_{17}| \geq |\alpha_{11} + \alpha_{17}| = |1 - r\alpha_{14}| = r \left| \frac{1}{r} - \alpha_{14} \right| \geq 2 \left| \alpha_{14} - \frac{1}{r} \right|.$$

Таким образом, неравенство (3.2) доказано.

Если $B_i < B_4$ ($i = 1, 7$), то неравенство (3.2) не выполняется. Следовательно, или $B_1 \geq B_4$, или $B_7 \geq B_4$ (или справедливы оба неравенства). Значит,

$$\max_{i=1,4,7} B_i = \max_{i=1,7} B_i.$$

Аналогично доказывается, что

$$\max_{i=2,5,8} B_i = \max_{i=2,8} B_i, \quad \max_{i=3,6,9} B_i = \max_{i=3,9} B_i. \quad (3.3)$$

Пусть

$$\max_{1 \leq i \leq 9} B_i = \max_{i=1,7} B_i.$$

Для доказательства неравенства (3.1) достаточно доказать неравенства

$$1 + \frac{r}{r+2} \cdot B_i \leq T_i \quad (i = 1, 7).$$

т.е.

$$1 + r \sum_{k=1}^3 |\alpha_{ki}| \leq |1 - \alpha_{1i}| + (1+r)|\alpha_{1i}| + (2+r) \sum_{k=2}^3 |\alpha_{ki}|.$$

Так как $|1 - \alpha_{1i}| + (1+r)|\alpha_{1i}| \geq 1 - |\alpha_{1i}| + (1+r)|\alpha_{1i}| = 1 + r|\alpha_{1i}|$, то остается доказать неравенство $r \sum_{k=2}^3 |\alpha_{ki}| \leq (2+r) \sum_{k=2}^3 |\alpha_{ki}|$, которое очевидно, так как $r < 2+r$.

Случаи (3.3) доказываются аналогично. □

Теорема 4. Оператор проектирования $\tilde{\pi}_\alpha^{(0)}$ пространства l_∞^9 на подпространство $\tilde{Y}_6$, определяемое функционалами (2.3), является сильно единственным и максимальное значение константы сильной единственности k_0 равно $\frac{1}{2r+1}$, если $0 < r \leq \frac{1}{2}$.

Доказательство. Снова от функционалов (2.3) перейдем к функционалам (2.4). Обозначив $s = 1/r$, легко заметить, что для функционалов (2.4) выполняется теорема 3. Тогда $k_0 = \frac{s}{s+2} = \frac{1}{2r+1}$, если $s \geq 2$ (или $0 < r \leq \frac{1}{2}$). $\square$

Замечание 1. Вопрос о сильной единственности минимальных проекций с неединичной нормой, найденных в теоремах 1 и 2 при $0 < r < 2$ и $r > 1/2$ соответственно, остается нерешенным.

Заключение

В работе найдены проекционные константы для минимальных операторов проектирования на некоторый класс подпространств коразмерности 3 в пространстве l_∞^9 . Подпространства образованы с помощью гиперплоскостей рассматриваемого конечномерного пространства. Относительные проекционные константы вычислены как для минимальных проекций с единичной нормой, так и для минимальных проекций с нормой больше единицы. Максимальные значения констант сильной единственности найдены только для минимальных операторов проектирования с единичной нормой.

Список литературы

- [1] Blätter J., Cheney E.W. Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces // *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1974. Vol. 101. Pp. 215–227.
- [2] Bohnenblust H.F. Convex regions and projections in Minkowski spaces // *Annals of Mathematics*. 1938. Pp. 301–308.
- [3] Chalmers B. L., Lewicki G. Three-dimensional subspace of with maximal projection constants // *Journal of Functional Analysis*. 2009. Vol. 257. Pp. 553–592.
- [4] König H.P., Lewis D.R., Lin P.-K. Finite dimensional projections // *Studia Mathematica*. 1983. Vol. 75, № 3. Pp. 341–358.
- [5] Lewicki G. Best Approximation in Spaces of Bounded Linear Operators: *Dissertationes Mathematicae*. Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1994. 103 p.
- [6] Lewicki G., Micek A. Equality of two strong unique projection constants // *Journal of Approximation Theory*. 2010. Vol. 162, № 12. Pp. 2278–2289.
- [7] Lokot' V.V. On a class of minimal projections in finite dimensional spaces // *Optimization*. 1994. Vol. 29. Pp. 311–317.
- [8] Локоть В.В. Константы сильной единственности минимальных проекций на гиперплоскости в пространстве l_∞^n ($n \geq 3$) // *Математические заметки*. 2002. Т. 72, № 5. С. 723–728. <https://doi.org/10.4213/mzm461>

- [9] Локоть В.В., Мартынов О.М. Проекционные константы. Мурманск: МГГУ, 2013. 302 с.
- [10] Martinov O.M. Constants of strong unicity of minimal projections onto some two-dimensional subspaces of l_∞^4 // Journal of Approximation Theory. 2002. Vol. 118. Pp. 175–187.
- [11] Мартынов О.М. Некоторые свойства операторов проектирования в банаховых пространствах: Диссертация к.ф.-м.н.. СПб: РГПУ им. А.И. Герцена, 2002.
- [12] Мартынов О.М. Проекционные константы некоторого класса подпространств коразмерности два в пространстве l_∞^{2n} // Функциональный анализ и его приложения. 2019. Т. 53, № 3. С. 33–44.
- [13] Мартынов О.М. О сильной единственности некоторых проекций с единичной нормой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. Т. 2. С. 33–48.
- [14] Newman D.J., Shapiro H.S. Some theorems on Chebyshev approximation // Duke Mathematical Journal. 1963. Vol. 30, № 4. Pp. 673–681.
- [15] Newman D.J., Shapiro H.S. Approximation by Generalized Rational Functions // On Approximation Theory. Eds. by P.L. Butzer, J. Korevaar. Vol. 5. Basel: Springer, 1964. Pp. 245–251. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-4131-3_25
- [16] Одинец В.П. О семинаре по геометрии банаховых пространств в 1990-97 гг. // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения 2007. Т. LX. СПб: Изд-во БАН, 2007. С. 12–26.
- [17] Odyniec W., Lewicki G. Minimal Projections in Banach Spaces. Series: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1449. Berlin, New York: Springer, 1990.
- [18] Odyniec W., Prophet M. The strong unicity constant and its applications // Banach Center Publications. 2008. Vol. 79, № 1. Pp. 167–172. <http://dx.doi.org/10.4064/bc79-0-13>
- [19] Odyniec W., Prophet M.P. A lower bound of the strongly unique minimal projection constant of $l_\infty^n, (n \geq 3)$ // Journal of Approximation Theory. 2007. Vol. 145. Pp. 111–121.
- [20] Одинец В.П., Якубсон М.Я. Проекторы и базисы в нормированных пространствах. М.: Едиториал УРСС, 2004.

Образец цитирования

Мартынов О.М. О сильной единственности минимальных проекций в пространстве l_∞^9 // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 4. С. 28–42. <https://doi.org/10.26456/vtpmk603>

Сведения об авторах**1. Мартынов Олег Михайлович**

доцент кафедры №13 военной академии воздушно-космической обороны имени Маршала Советского Союза Г.К. Жукова.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Жигарева, д.50, ВА ВКО им. Маршала Советского Союза Г.К. Жукова. E-mail: olegmartynov@yandex.ru

ON THE STRONG UNIQUENESS OF MINIMAL PROJECTIONS IN THE SPACE l_∞^9

Martynov Oleg Mikhailovich

Associate professor at department №13,

Zhukov Air and Space Defense Academy

Russia, 170100, Tver, Zhigarev Str., 50, Military Aerospace Defense Academy.

E-mail: olegmartynov@yandex.ru

Received 30.09.2020, revised 23.10.2020.

In this paper we consider minimal projections of the space l_∞^9 on some subspaces of codimension 3. Relative projection constants are found for them, and in the case of a minimal projection with a unit norm, we find maximum value of the strong uniqueness constant.

Keywords: space, subspace, projection operator, relative projection constant, the constant of strong uniqueness.

Citation

Martynov O.M., “On the strong uniqueness of minimal projections in the space l_∞^9 ”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2020, № 4, 28–42(in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk603>

References

- [1] Blätter J., Cheney E.W., “Minimal projections on hyperplanes in sequence spaces”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **101** (1974), 215–227.
- [2] Bohnenblust H.F., “Convex regions and projections in Minkowski spaces”, *Annals of Mathematics*, 1938, 301–308.
- [3] Chalmers B. L., Lewicki G., “Three-dimensional subspace of with maximal projection constants”, *Journal of Functional Analysis*, **257** (2009), 553–592.
- [4] König H.P., Lewis D.R., Lin P.-K., “Finite dimensional projections”, *Studia Mathematica*, **75**:3 (1983), 341–358.
- [5] Lewicki G., *Best Approximation in Spaces of Bounded Linear Operators*, Dissertationes Mathematicae, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, 1994, 103 pp.
- [6] Lewicki G., Micek A., “Equality of two strong unique projection constants”, *Journal of Approximation Theory*, **162**:12 (2010), 2278–2289.
- [7] Lokot’ V.V., “On a class of minimal projections in finite dimensional spaces”, *Optimization*, **29** (1994), 311–317.

- [8] Lokot' V.V., "Constants of Strong Uniqueness of Minimal Projections onto Hyperplanes in the Space l_{∞}^n ($n \geq 3$)", *Mathematical Notes*, **72**:5 (2002), 667–671, <https://doi.org/10.4213/mzm461>.
- [9] Lokot V.V., Martynov O.M., *Proektsionnye konstanty [Projection constants]*, MGPU, Murmansk, 2013 (in Russian), 302 pp.
- [10] Martinov O.M., "Constants of strong unicity of minimal projections onto some two-dimensional subspaces of l_{∞}^4 ", *Journal of Approximation Theory*, **118** (2002), 175–187.
- [11] Martynov O.M., *Nekotorye svoystva operatorov proektirovaniya v banakhovykh prostranstvakh*, PhD Thesis, RGPU im. A.I. Gertsena, SPb, 2002 (in Russian).
- [12] Martynov O.M., "Projection constants of a certain class of subspaces of codimension two in the space l_{∞}^{2n} ", *Funktsionalnyy analiz i ego prilozheniya [Functional analysis and its applications]*, **53**:3 (2019), 33–44 (in Russian).
- [13] Martynov O.M., "On the strong uniqueness of some projections with unit norm", *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya [Differential equations and control processes]*, **2** (2020), 33–48 (in Russian).
- [14] Newman D.J., Shapiro H.S., "Some theorems on Chebyshev approximation", *Duke Mathematical Journal*, **30**:4 (1963), 673–681.
- [15] Newman D.J., Shapiro H.S., "Approximation by Generalized Rational Functions", *On Approximation Theory*. V. 5, eds. P.L. Butzer, J. Korevaar, Springer, Basel, 1964, 245–251, https://doi.org/10.1007/978-3-0348-4131-3_25.
- [16] Odinets V.P., "On the seminar on the geometry of Banach spaces in 1990-97.", *Nekotorye aktualnye problemy sovremennoy matematiki i matematicheskogo obrazovaniya. Gertsenovskie chteniya 2007 [Some actual problems of modern mathematics and mathematical education. Herzen Readings 2007]*. V. LX, Izd-vo BAN, SPb, 2007, 12–26 (in Russian).
- [17] Odyniec W., Lewicki G., *Minimal Projections in Banach Spaces*. V. 1449, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, New York, 1990.
- [18] Odyniec W., Prophet M., "The strong unicity constant and its applications", *Banach Center Publications*, **79**:1 (2008), 167–172, <http://dx.doi.org/10.4064/bc79-0-13>.
- [19] Odyniec W., Prophet M.P., "A lower bound of the strongly unique minimal projection constant of l_{∞}^n , ($n \geq 3$)", *Journal of Approximation Theory*, **145** (2007), 111–121.
- [20] Odinets V.P., Yakubson M.Ya., *Proektory i bazy v normirovannykh prostranstvakh [Projectors and bases in normed spaces]*, Editorial URSS Publ., Moscow, 2004 (in Russian).