Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Дадеркин, О табличных уноидах, не удовлетворяющих условиям Ужичина, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2021, выпуск 3, 33–43

DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:18:48

О ТАБЛИЧНЫХ УНОИДАХ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ УЖИЧИНА

Дадеркин Д.О.

Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 07.08.2021, после переработки 04.10.2021.

Достаточные условия табличности, одного из важных свойств, характеризующих работу программы в алгебраической системе, были предложены в работах П. Ужичина [1–3]. В данной работе описываются такие достаточные условия табличности, которые позволяют строить табличные уноиды, не удовлетворяющие условиям Ужичина.

Ключевые слова: алгебраическая система, алгебра, уноид, свойство табличности, динамические логики, терм.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 33–43.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk621>

Введение

Хорошо известно, что обычные арифметические операции сложения и умножения определяются программами, не использующими других операций, кроме одноместных операций следования (прибавления единицы). Поэтому многие вопросы теории динамических логик являются содержательными уже для систем, в которых нет неодноместных операций. Такие системы обычно называются уноидами.

Далее под программой, если не оговорено, будем понимать тотальную детерминированную регулярную программу.

Одним из самых важных свойств, характеризующих работу программы в алгебраической системе, является свойство табличности.

Говорят, что программа обладает свойством табличности, если на любом входе результат её работы совпадает с результатом работы некоторой бесцикловой программы. Алгебраические системы, в которых каждая тотальная программа эквивалентна бесцикловой, будем называть табличными.

Свойство свёртки – тоже важное свойство, характеризующее работу программ. Говорят, что программа обладает свойством свёртки, если существует такое натуральное число n , что при любом входе программа в процессе своей работы посещает не более n элементов. Мы будем говорить, что алгебраическая система обладает свойством свёртки, если каждая программа в ней обладает свойством свёртки.

Совершенно очевидно, что каждая программа, обладающая свойством свёртки, обладает и свойством табличности. Поэтому каждый обладающий свойством свёртки уноид является табличным.

Все необходимые базовые понятия изложены в [4–7] и [8].

1. Слабо разделённый уноид

Условия Ужичина - это наличие в каждой системе равенств эквивалентной конечной подсистемы и наличие конечного базиса для каждой системы равенств, однако, исходя из этих алгебраических условий Ужичина, достаточно сложно построить нетривиальные примеры табличных уноидов, так, единственным табличным уноидом, известным Ужичину (см. [2]), был уноид с несвязным основным множеством.

В [7] доказано существование табличного уноида со связным основным множеством, тем самым показано, что требование несвязности основного множества уноида не является существенным.

В [8] показано, что существуют в некотором смысле просто проверяемые достаточные условия, при выполнении которых уноид удовлетворяет условиям Ужичина.

Построенный в [4] уноид, называемый уноидом Адяна, удовлетворяет, как показано в [5], условию свёртки и, следовательно, обладает свойством табличности, однако, как легко видеть, не удовлетворяет условиям Ужичина. Таким образом, условия Ужичина не являются необходимыми для того, чтобы уноид обладал свойством табличности.

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ - множество натуральных чисел, $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{A}, \Omega \rangle$ - алгебраическая система, $\mathbb{A}$ - основное множество, Ω - сигнатура, $n \in \mathbb{N}$.

Через $T_\Omega(n)$ будем обозначать множество всех термов сигнатуры Ω с индивидуальными переменными из множества $\mathbb{V}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Пусть t — некоторый терм сигнатуры Ω . Через $|t|$ будем обозначать *длину* терма t , которую определим как число функциональных символов сигнатуры Ω , содержащихся в t .

Определим расстояние $\delta(x, y)$ между элементами x и y основного множества $\mathbb{A}$. Для натурального числа l , если $|t| = l, x = t(y)$ либо $y = t(x)$, то скажем, что $\delta_0(x, y) \leq l$. Если существуют последовательности $x_0, \dots, x_m$ элементов $\mathbb{A}$ такие, что $x_0 = x, x_m = y, \delta_0(x_i, x_j) \leq l_i$ для $i \in 0, \dots, m$,

$$\sum_{i=0}^{m-1} (l_i) = l,$$

то наименьшее из таких l назовем *расстоянием* $\delta(x, y)$ между элементами x и y . Будем говорить, что $\delta(x, y) = \infty$, если такие l не существуют.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Подмножество $\mathfrak{D}$ в уноиде $\mathfrak{A}$ назовём *r-окрестностью*, если для любых $x, y \in \mathfrak{D}$ $\delta(x, y) \leq r$.

Будем говорить, что две r -окрестности $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ *изоморфны*, если существует одно-однозначное отображение ψ из $\mathfrak{D}_1$ на $\mathfrak{D}_2$, при котором для любых термов t_1, t_2 , если $|t_1| \leq r, |t_2| \leq r$, то $t_1(x) = t_2(y)$ в $\mathfrak{D}_1$ тогда и только тогда, когда $t_1(\psi(x)) = t_2(\psi(y))$ в $\mathfrak{D}_2$.

Уноид $\mathfrak{A}$ назовем *l-локально-заданным*, если существует такое натуральное l , что для любого $r > l$ любой изоморфизм любых двух r -окрестностей $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ в $\mathfrak{A}$ продолжается до изоморфизма подуноида, порождённого r -окрестностью $\mathfrak{D}_1$ в $\mathfrak{A}$ на подуноид, порождённый r -окрестностью $\mathfrak{D}_2$ в $\mathfrak{A}$.

Уноид назовем *локально-заданным*, если найдётся такое натуральное l , что уноид - l -локально-заданный.

Пусть $R \in \mathbb{N}$. R -локально-заданный уноид назовём *разделённым*, если для любых $r > R$, $n \in \mathbb{N}$ для любых n заранее заданных r -окрестностей $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_n$ найдутся такие r -окрестности $\mathfrak{D}'_1, \dots, \mathfrak{D}'_n$, что

- a) для $i \in \{1, \dots, n\}$ r -окрестности $\mathfrak{D}_i$ и $\mathfrak{D}'_i$ изоморфны;
- b) r -окрестности $\mathfrak{D}'_1, \dots, \mathfrak{D}'_n$ порождают попарно непересекающиеся подуноиды.

Пусть $t_1, \dots, t_n \in T_\Omega(n)$, $\{a_1, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, \dots, b_n\}$ — r -окрестности, $|t_i| \leq r$ для $i \in \{1, \dots, n\}$, и пусть b_i будет значением терма t_i в уноиде $\mathfrak{A}$, когда $x_1, \dots, x_n$ принимают значения $a_1, \dots, a_n$ из $\mathbb{A}$, соответственно, тогда будем говорить, что набор $(b_1, \dots, b_n)$ получается из набора $(a_1, \dots, a_n)$ *r-отображением* $(t_1, \dots, t_n)$.

Последовательность наборов $(a_1^0, \dots, a_n^0)$, $(a_1^1, \dots, a_n^1)$, $(a_1^2, \dots, a_n^2)$ будем называть *r-циклом*, если набор $(a_1^{i+1}, \dots, a_n^{i+1})$ получается из набора $(a_1^i, \dots, a_n^i)$ некоторым r -отображением для $i \in \{0, 1\}$, а отображение, переводящее a_j^1 в a_j^2 для $j \in \{1, \dots, n\}$, задаёт изоморфизм r -окрестности $\{a_1^1, \dots, a_n^1\}$ на r -окрестность $\{a_1^2, \dots, a_n^2\}$.

Уноид $\mathfrak{A}$ будем называть *слабо разделённым*, если существует такое натуральное число R , что для всякого $r > R$, всякого натурального Q и всяких таких r -циклов $(a_{1j}^0, \dots, a_{nj}^0)$, $(a_{1j}^1, \dots, a_{nj}^1)$, $(a_{1j}^2, \dots, a_{nj}^2)$ ($j \in \{1, \dots, Q\}$), что набор $(a_{1j}^{i+1}, \dots, a_{nj}^{i+1})$ получается из набора $(a_{1j}^i, \dots, a_{nj}^i)$ r -отображением $(t_{1j}^i, \dots, t_{nj}^i)$ (для $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, \dots, Q\}$), найдутся такие r -циклы $(b_{1j}^0, \dots, b_{nj}^0)$, $(b_{1j}^1, \dots, b_{nj}^1)$, $(b_{1j}^2, \dots, b_{nj}^2)$, что

- a) $(b_{1j}^{i+1}, \dots, b_{nj}^{i+1})$ получается из $(b_{1j}^i, \dots, b_{nj}^i)$ r -отображением $(t_{1j}^i, \dots, t_{nj}^i)$ для $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, \dots, Q\}$;
- b) для $i \in \{0, 1, 2\}$ и $j \in \{1, \dots, Q\}$ отображение, переводящее $(a_{1j}^i, \dots, a_{nj}^i)$ в $(b_{1j}^i, \dots, b_{nj}^i)$, является изоморфизмом r -окрестностей;
- c) для $j \in \{1, \dots, Q\}$ отображение, переводящее b_{1j}^1 в $b_{1j}^2, \dots, b_{nj}^1$ в b_{nj}^2 , продолжается до изоморфизма подуноида $\mathfrak{B}_j$, порождённого $(b_{1j}^1, \dots, b_{nj}^1)$ в $\mathfrak{A}$, на подуноид, порождённый $(b_{1j}^2, \dots, b_{nj}^2)$ в $\mathfrak{A}$;
- d) подуноиды $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_Q$ попарно не пересекаются.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{A}$ - разделённый уноид. Тогда $\mathfrak{A}$ - слабо разделённый уноид.

Доказательство прямо следует из предыдущих определений. Заметим, что обратное, вообще говоря, неверно, и утверждение 1 доказывает существование слабо разделённого уноида, не являющегося разделённым. Этот уноид по теореме 1 табличен, но, как легко заметить, не удовлетворяет условиям Ужичина.

2. О табличности слабо разделённых уноидов

Будем следовать введённым в [4] определениям кусочно-линейного отображения и линейного отображения, каждое из которых имеет дело лишь с конечным

числом переменных и определяет отображение множества всех состояний всякой алгебраической системы в себя.

Теорема 1. Каждый слабо разделённый уноид является табличным.

Доказательство. Пусть P — тотальная бесцикловая детерминированная регулярная программа, Θ — равенство вида $t_1 = t_2$, где $t_1, t_2 \in T_\Omega(n)$, RR — тотальная детерминированная регулярная программа с n программными переменными. Пусть RR имеет вид

$$WHILE \ \Theta \ DO \ P \ OD \quad (1)$$

В [4] и [6] показано, что всякая детерминированная регулярная программа может быть задана с использованием одного цикла. В [4] доказано, что P определяет некоторое кусочно-линейное отображение и что композиция двух линейных отображений является линейным отображением, а композиция двух кусочно-линейных отображений — кусочно-линейным отображением.

Итак, рассмотрим работу программы RR на уноиде $\mathfrak{A}$. Пусть P определяет кусочно-линейное отображение

$$[P_1, \dots, P_m, P_{m+1}; \tau_1, \dots, \tau_m], \quad (2)$$

где $m \in \mathbb{N}$ и для $i \in \{1, \dots, m+1\}$ каждое P_i — это линейное отображение вида

$$P_i(x_1, \dots, x_n) = (t_1^i, \dots, t_n^i), \quad (3)$$

где $t_j^i \in T_\Omega(n)$ для $j \in \{1, \dots, n\}, i \in \{1, \dots, m+1\}$; τ_i — это конъюнкции конечного числа равенств вида $t_1^i = t_2^i$ и неравенств вида $t_1^i \neq t_2^i$, где $t_1^i, t_2^i \in T_\Omega(n)$ ($i \in \{1, \dots, m\}$).

Пусть $T_P \subseteq T_\Omega(n)$ — множество всех термов, используемых в $[P_1, \dots, P_m, P_{m+1}; \tau_1, \dots, \tau_m]$. Пусть

$$l = R + 2m_1 + 1, \quad (4)$$

где m_1 — максимальная длина термов из T_P .

Если $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, где $a_i \in \mathbb{A}$ для $(i \in \{1, \dots, n\})$, то $\bar{a}$ будем называть *точкой* с координатами $a_1, \dots, a_n$. Если программа P останавливается на входе $\bar{a}$ в $\mathbb{A}$ и заключительные значения $b_1, \dots, b_n$ переменных $x_1, \dots, x_n$ задают точку $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$, то скажем, что $\bar{b} = P(\bar{a})$. Пусть $P^0(\bar{a}) = \bar{a}$ и $P^{i+1}(\bar{a}) = P(P^i(\bar{a}))$.

Если $P(\bar{a}) = P_i(\bar{a})$, P_i определяется по (3), t_j содержит x_q , $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $\bar{b} = P(\bar{a})$, то скажем, что b_j есть *образ* a_q , а a_q есть *прообраз* b_j . Если $\bar{a}$ — точка с координатами $(a_1, \dots, a_n)$ и $\delta(a_i, a_j) \geq l$, где l определено по (4), то все встречающиеся в $\tau_1, \dots, \tau_m$ и содержащие одновременно x_i и x_j равенства будут ложны в точке $\bar{a}$.

Определим теперь обратной индукцией по i натуральные числа $l(i)$ и $\Phi(i) = ((1+n)^n \Psi(l(i)))^i$, где функция Ψ определяется из того, что в уноиде $\mathfrak{A}$ существует не более чем $\Psi(l)$ попарно неизоморфных n -элементных l -окрестностей.

Пусть

$$\begin{cases} l(n) = l \\ l(i-1) = 4l(i) + (\Phi(i) + 1)l, \end{cases} \quad (5)$$

$$L = l(1), \quad G = ((1+n)^n \Psi(L)), \quad \gamma = nG. \quad (6)$$

В (5) l определяется по (4).

Рассмотрим последовательность

$$\bar{a}, P(\bar{a}), \dots, P^{\gamma+1}(\bar{a}), \dots, \quad (7)$$

где P - тотальная бесцикловая регулярная прогамма из (1), а точка $\bar{a}$ такова, что тело цикла (1) на входе $\bar{a}$ выполняется более γ раз.

Будем говорить, что *выполнено (k, h) - условие*, если для

$j \in \{(n-k)G, (n-k)G+1, \dots, \gamma\}$ координаты точки $P^j(\bar{a})$ можно разбить на k h -окрестностей.

Для доказательства основной теоремы необходимы некоторые технические результаты.

Лемма 2. $(n, l(n))$ - условие выполнено.

Доказательство. По определению выполнимости (k, h) - условия при $k = n$, учитывая (7), координаты точки $P^j(\bar{a})$ можно разбить на n частей так, чтобы в каждой части содержалось только по одной координате. Но в таком случае $(n, l(n))$ -условие выполнено. $\square$

Лемма 3. $(1, l(1))$ - условие не выполнено.

Доказательство. Пусть $(1, l(1))$ - условие выполнено.

Тогда для $j \in \{(n-k)G, (n-k)G+1, \dots, \gamma\}$ все координаты точки $P^j(\bar{a})$ находятся в одной $l(1)$ -окрестности. Тогда найдутся такие натуральные числа J_1 и J_2 , что отображение, отображающее координаты точки $P^{J_1}(\bar{a})$ на координаты точки $P^{J_2}(\bar{a})$, определяет изоморфизм $l(1)$ -окрестностей. Учитывая слабую разделенность уноида $\mathfrak{A}$, можно заменить точку $\bar{a}$ на такую точку $\bar{b}$, что для $j \in \{0, 1, \dots, \gamma\}$ условие Θ из (1) будет истинно в $P^j(\bar{b})$, но тогда программа RR не будет тотальной в $\mathfrak{A}$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Лемма 4. Пусть $(i, l(i))$ - условие выполнено, а $(i-1, l(i-1))$ условие не выполнено.

Тогда найдётся такое натуральное число $j \in \{(n-(i-1))G, (n-(i-1))G+1, \dots, \gamma\}$, что для всех натуральных чисел $q \in \{j - \Phi(i) + 1, \dots, j\}$, если координаты точки $P^q(\bar{a})$ разбиты на i $l(i)$ -окрестностей, то расстояние между любыми двумя элементами из различных $l(i)$ -окрестностей этого разбиения больше l , а образы координат из различных $l(i)$ -окрестностей этого разбиения лежат в различных $l(i)$ -окрестностях, возникающих при разбиении координат точки $P^{q+1}(\bar{a})$ на i $l(i)$ -окрестностей. Следовательно, образы координат из одной и той же $l(i)$ -окрестности этого разбиения попадут в одну и ту же $l(i)$ -окрестность из тех i $l(i)$ -окрестностей, на которые разбиты координаты точки $P^{q+1}(\bar{a})$.

Доказательство. Итак, $(i-1, l(i-1))$ условие не выполнено. Следовательно, для некоторого $j \in \{(n-(i-1))G, (n-(i-1))G+1, \dots, \gamma\}$ координаты точки $P^j(\bar{a})$ нельзя разбить на $(i-1)$ $l(i-1)$ окрестности.

Пусть для некоторого $q \in \{j - \Phi(i) + 1, \dots, j\}$ координаты точки $P^q(\bar{a})$ так разбиты на i $l(i)$ -окрестностей, что либо расстояние между некоторыми двумя элементами из различных $l(i)$ -окрестностей этого разбиения не превосходит l , либо образы этих элементов попадут в одну $l(i)$ -окрестность. Объединим эти две $l(i)$ -окрестности в одну, в этой новой окрестности расстояние между любыми двумя

её элементами не превосходит $l(i) + 2l(i) + 2l = 3l(i) + 2l \leq 4l(i) + 1$, поскольку по (5) $l < l(i)$ для $i \leq n$.

За $\Phi(i)$ шагов расстояние между координатами возрастет не более чем на $\Phi(i)l$, и для $h \in \{q, \dots, j\}$ координаты точки $P^h(\bar{a})$ можно будет разбить на $(i-1) l(i-1)$ -окрестность, так как по (5) $4l(i) + (\Phi(i) + 1)l = l(i-1)$, а это противоречит выбору j , что и завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 5. Если $(i, l(i))$ -условие выполнено, то $(i-1, l(i-1))$ -условие тоже выполнено.

Доказательство. Пусть $(i, l(i))$ -условие выполнено, а $(i-1, l(i-1))$ -условие не выполнено. В таком случае координаты точки $P^j(\bar{a})$ нельзя разбить на $(i-1) l(i-1)$ -окрестности для $j \in \{(n - (i-1))\Phi(i), \dots, \gamma\}$.

Учтём, что $(i, l(i))$ -условие выполнено, следовательно, каждую точку $P^q(\bar{a})$, где $q \in \{j - \Phi(i) + 1, \dots, j\}$, можно разбить на $i l(i)$ -окрестностей. По лемме 4, расстояние между любыми координатами из различных $l(i)$ -окрестностей больше l , и образы координат из одной $l(i)$ -окрестности находятся в одной $l(i)$ -окрестности, а образы координат из различных $l(i)$ -окрестностей находятся в различных $l(i)$ -окрестностях.

Учитывая слабую разделенность уноида $\mathfrak{A}$, можно заменить входные значения $\bar{a}$ на такие новые значения $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$, что точка $P^q(\bar{c})$ есть $(b_1, \dots, b_n)$, где $q \in \{1, \dots, \Phi(i)\}$, и отображение, переводящее c_1 в $b_1, \dots, c_n$ в b_n , продолжается до изоморфизма подуноида, порожденного элементами $c_1, \dots, c_n$ в $\mathfrak{A}$, на подуноид, порожденный элементами $b_1, \dots, b_n$ в $\mathfrak{A}$. Эти подуноиды попарно не пересекаются, поскольку уноид $\mathfrak{A}$ слабо разделённый, тогда последовательность (7) на входе $\bar{c}$ будет выполняться более γ раз, следовательно, цикл (1) будет бесконечным, что невозможно, так как по условию RR - тотальная программа. Следовательно, $(i-1, l(i-1))$ - условие выполнено. $\square$

Итак, по лемме 5 $(1, l(1))$ — условие выполнено, а по лемме 3 $(1, l(1))$ -условие не выполнено. Таким образом, предположение о том, что в цикле (1) совершается γ шагов, неверно, то есть не существует такой точки $\bar{a}$, в которой последовательность (7) содержит более $(\gamma + 1)$ элементов. Следовательно, любой тотальный цикл в уноиде $\mathfrak{A}$ останавливается не более чем за γ шагов. $\square$

Утверждение 1. Существует такой слабо разделённый уноид $\mathfrak{D}$, что $\mathfrak{D}$ не удовлетворяет условиям Ужичина.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_0 &= \{0^i : i = 0, 1, \dots\}, \\ \mathbb{K}_m &= \{0^i : i \leq m\} \cup \{0^m a : a \in \{0, 1\}^*\}, \text{ где } m > 0, \\ D &= \{< j, m, b > : m, j = 0, 1, 2, \dots; b \in \mathbb{K}_m\}. \end{aligned}$$

Определим операции 0 и 1:

$$\begin{aligned} 0(< j, 0, b >) &= < j, 0, b0 >, \\ 1(< j, 0, b >) &= < j, 0, b0 >, \\ 0(< j, m, 0^i >) &= < j, m, 0^{i+1} >, \end{aligned}$$

$$1(< j, m, 0^i >) = \begin{cases} < j, m, 0^{i+1} >, & \text{если } i + 1 \leq m, \\ < j, m, 0^i 1 >, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
0(< j, m, 0^m a >) &= < j, m, 0^m a 0 >, \\
1(< j, m, 0^m a >) &= < j, m, 0^m a 1 >.
\end{aligned}$$

Рис. 1. Уноид $\mathfrak{D}$

Ясно, что этот уноид - слабо разделённый. Достаточно заметить, что $\mathfrak{D}$ задаётся тройками $< j, m, b >$, в которых два первых элемента - натуральные числа, а третий элемент есть цепочка нулей произвольной длины ($b = \mathbb{K}_0$) либо цепочка нулей конечной длины, после которой идёт бинарное дерево $a \in \{0, 1\}^*$, возможно, пустое ($b = \mathbb{K}_m$). Понятно, что для любого r -цикла, находящегося на некотором $\mathbb{K}_s$, найдутся такие r -циклы, расположенные на других $\mathbb{K}_u$, ($u \neq s$, $u, s = 0, 1, 2, \dots$), что условия $a) - d)$ из определения слабо разделённого уноида выполнены. По теореме 1 $\mathfrak{D}$ - табличный уноид.

Легко проверить, что уноид $\mathfrak{D}$ не удовлетворяет условиям Ужичина. Для этого достаточно заметить, что на этом уноиде для входных значений $\bar{a}$ можно различать, имеет ли место расположение $\bar{a}$ на $\mathbb{K}_0$ либо на $\mathbb{K}_l, l > 0$, с непустым бинарным

деревом. Для этого для элементов из r -окрестности, определяемой $\bar{a}$, выполним некоторое конечное число раз операции 0 и 1 из сигнатуры уноида $\mathfrak{D}$, и если результаты выполнения этих операций совпадают, то по заданию операций 0 и 1 $\bar{a}$ расположен в $\mathbb{K}_0$, иначе - в некотором $\mathbb{K}_l, l > 0$. Отсюда следует отсутствие базиса для любого конечного совместного множества равенств с n переменными, таким образом, условия Ужичина не выполнены. $\square$

Заключение

Одним из самых важных свойств, характеризующих работу программы в алгебраической системе, является свойство табличности, и в работах П. Ужичина [1–3] сформулированы достаточные условия табличности уноидов, однако они не позволяют строить нетривиальные примеры табличных уноидов.

В работе [8] приведены легко проверяемые достаточные условия табличности, из которых вытекают условия Ужичина: с использованием введённых понятий r -окрестности, локально-заданного и разделённого уноида показано, что каждый разделённый уноид удовлетворяет условиям Ужичина, и приведён пример такого уноида.

В данной работе введено понятие слабо разделённого уноида, в теореме 1 доказано, что каждый слабо разделённый уноид является табличным, а утверждение 1 показывает существование являющегося табличным слабо разделённого уноида, не удовлетворяющего условиям Ужичина.

Список литературы

- [1] Urzyczyn P. Algorithmic triviality of abstract structures // Fundamenta Informaticae. 1981. № 4. Pp. 819–849.
- [2] Urzyczyn P. The unwind property in certain algebras // Information and Control. 1981. Vol. 50, № 2. Pp. 91–109.
- [3] Urzyczyn P. Deterministic context-free dynamic logic is more expressive than deterministic dynamic logic of regular programs // Foundation of computer theory. Berlin: Springer-Verlag, 1983. Pp. 469–504.
- [4] Столбоушкин А.П., Тайцлин М.А. Динамические логики // Кибернетика и вычислительная техника. 1986. № 2. С. 180–230.
- [5] Stolboushkin A.P., Taitslin M.A. Deterministic dynamic logic is stricly weaker than dynamic logic // Information and Control. 1983. Vol. 57, № 1. Pp. 48–55.
- [6] Дудаков С.М., Карлов Б.Н. Математическое введение в информатику. Учебник. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. 320 с.
- [7] Дадеркин Д.О. Об уноидах Ужичина со связным основным множеством // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 4. С. 117–125. <https://doi.org/10.26456/vtpmk551>

- [8] Дадеркин Д.О. Табличные уноиды, удовлетворяющие условиям Ужичина // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 59–70. <https://doi.org/10.26456/vtpmk609>
- [9] Kfoury A.J., Urzyczyn P. Necesseary and sufficient conditions for the universality of programming formalisms // Acta informatica. 1985. Vol. 22. Pp. 347–377.
- [10] Kfoury A.J. Definability by deterministic and nondeterministic programs (with applications to first-order dynamic logic) // Information and Control. 1985. Vol. 65. Pp. 98–121.
- [11] Tiuryn J. Unbounded program memory adds to the expressive power of first-order programming logic // Information and Control. 1984. Vol. 60. Pp. 12–35.
- [12] Tiuryn J., Urzyczyn P. Remarks on comparing expressive power of Logics of Programms // Mathematical Foundations of Computer Science. Eds. by M.P. Chytil, V. Koubek. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 176. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984. Pp. 535–543. <https://doi.org/10.1007/BFb0030337>

Образец цитирования

Дадеркин Д.О. О табличных уноидах, не удовлетворяющих условиям Ужичина // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 33–43. <https://doi.org/10.26456/vtpmk621>

Сведения об авторах

1. **Дадеркин Дмитрий Ольгердович**

доцент кафедры информатики Тверского государственного университета.

170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: d.daderkin@yandex.ru

TRUTH-TABLE UNOIDS NOT SATISFYING THE URZYCZYN'S CONDITIONS

Daderkin Dmitry Olgerdovich

Associate Professor at Computer Science department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabov st., TverSU.
E-mail: d.daderkin@yandex.ru

Received 07.08.2021, revised 04.10.2021.

Sufficient conditions of truth-table property, one of the important properties that characterize the work of a program in an algebraic system, were proposed in the works of P. Urzyczyn [1–3]. In this work such sufficient conditions of truth-table property are described, that allow constructing truth-table unoids that not satisfy the conditions of Urzyczyn.

Keywords: algebraic system, algebra, unoid, truth-table property, dynamic logics, term.

Citation

Daderkin D.O., “Truth-table Unoids not Satisfying the Urzyczyn’s Conditions”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 3, 33–43 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk621>

References

- [1] Urzyczyn P., “Algorithmic triviality of abstract structures”, *Fundamenta Informaticae*, 1981, № 4, 819–849.
- [2] Urzyczyn P., “The unwind property in certain algebras”, *Information and Control*, **50:2** (1981), 91–109.
- [3] Urzyczyn P., “Deterministic context-free dynamic logic is more expressive than deterministic dynamic logic of regular programs”, *Foundation of computer theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 469–504.
- [4] Stolboushkin A.P., Tajtslin M.A., “Dynamic logic”, *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika [Cybernetics and computing]*, 1986, № 2, 180–230 (in Russian).
- [5] Stolboushkin A.P., Taitlin M.A., “Deterministic dynamic logic is stricly weaker than dynamic logic”, *Information and Control*, **57:1** (1983), 48–55.
- [6] Dudakov S.M., Karlov B.N., *Matematicheskoe vvedenie v informatiku [Mathematical Introduction to Computer Science]*, Tutorial, Tver State University, Tver, 2017 (in Russian), 320 pp.

- [7] Daderkin D.O., “On Urzyczyn’s Unoids with a Connected Underlying Set”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2019, № 4, 117–125 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk551>.
- [8] Daderkin D.O., “Truth-table Unoids Satisfying the Urzyczyn’s Conditions”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 1, 59–70 (in Russian), <https://doi.org/10.26456/vtpmk609>.
- [9] Kfoury A.J., Urzyczyn P., “Necesseary and sufficient conditions for the universality of programming formalisms”, *Acta informatica*, **22** (1985), 347–377.
- [10] Kfoury A.J., “Definability by deterministic and nondeterministic programs (with applications to first-order dynamic logic)”, *Information and Control*, **65** (1985), 98–121.
- [11] Tiuryn J., “Unbounded program memory adds to the expressive power of first-order programming logic”, *Information and Control*, **60** (1984), 12–35.
- [12] Tiuryn J., Urzyczyn P., “Remarks on comparing expressive power of Logics of Programms”, *Mathematical Foundations of Computer Science. V. 176, Lecture Notes in Computer Science*, eds. M.P. Chytil, V. Koubek, Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, 535–543, <https://doi.org/10.1007/BFb0030337>.