Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Х. Бештоков, Экономичные факторизованные схемы для псевдопараболических уравнений третьего порядка, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2021, выпуск 3, 44–57

DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:25:04

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.63

ЭКОНОМИЧНЫЕ ФАКТОРИЗОВАННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА¹

Бештоков М.Х.

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского
научного центра РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 13.04.2021, после переработки 05.07.2021.

Изучены экономичные факторизованные схемы для псевдопараболических уравнений третьего порядка. На основе общей теории устойчивости разностных схем доказаны устойчивость и сходимость разностных схем.

Ключевые слова: краевые задачи, псевдопараболическое уравнение, устойчивость и сходимость схемы, экономичные факторизованные схемы.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 44–57.
<https://doi.org/10.26456/vtprm622>

Введение

В математической литературе уравнения вида

$$u_t - Au_t - Bu = f(x, t)$$

принято называть псевдопараболическими уравнениями, где A и B – операторы второго или более высокого порядка по пространственным переменным.

Краевые задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка возникают при изучении движения почвенной влаги [1]–[2], фильтрации жидкости в пористых телах [3]–[4].

Краевые задачи для различных классов уравнений третьего порядка изучались в работах [5]–[8]. Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболических уравнений высокого порядка изучена в работе [9]. Численным методам решения краевых задач для псевдопараболических уравнений посвящены работы [10], [11]. Данная работа посвящена построению экономичных факторизованных схем для псевдопараболических уравнений третьего порядка.

---

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ГФЕН Китая в рамках научного проекта №20-51-53007.

© Бештоков М.Х., 2021

При построении разностных схем воспользовались уравнением с искусственной вязкостью [12], [13]. Заметим, что подобные уравнения можно использовать для реализации некорректно поставленных для параболических уравнений краевых задач [14].

1. Постановка задачи А

В цилиндре $Q_T = G \times [0 \leq t \leq T]$, основанием которого служит p -мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ , рассматривается первая краевая задача для псевдопараболического уравнения

$$u_t = Lu + \mu Lu_t + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \bar{G} = G + \Gamma, \quad (3)$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u$, $L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$, $0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1$, $\mu = const > 0$.

Как отмечено в работе [2] второе слагаемое в правой части уравнения (1) мало при впитывании и велико при испарении.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом h_α , $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Совокупность $\bar{\omega}_h$ точек $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \dots, x_\alpha^{(i_\alpha)}, \dots, x_p^{(i_p)})$ пересечения этих плоскостей назовем узлами разностной сетки.

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad N_\alpha h_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p\},$$

Множество узлов, принадлежащих границе Γ , назовем граничными узлами, $\gamma_h = (x_i \in \Gamma)$, где $\gamma_{-\alpha}$ – левый граничный узел $x_\alpha = 0$, $\gamma_{+\alpha}$ – правый граничный узел $x_\alpha = l_\alpha$.

На отрезке $[0, T]$ введём равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$.

Пусть H_h – пространство сеточных функций, определенных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на границе (при $x_\alpha = 0$, $x_\alpha = l_\alpha$).

Задаче (1) поставим в соответствие двухслойную разностную схему:

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma)y^j) + \mu \Lambda y_t + \varphi^j, \quad (4)$$

$$y|_{\gamma, h} = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad (5)$$

где

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \left[a_{\alpha, i_\alpha+1} \frac{y_{i_\alpha+1} - y_{i_\alpha}}{h_\alpha} - a_{\alpha, i_\alpha} \frac{y_{i_\alpha} - y_{i_\alpha-1}}{h_\alpha} \right],$$

$$y = y^j, \quad a_{\alpha, i_\alpha} = k_\alpha(x_{i_\alpha - \frac{1}{2}}, \bar{t}), \quad \varphi_i^j = f(x_i, \bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}, \quad y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Приведем разностную схему (4) к каноническому виду, тогда с учетом $y^{j+1} = y^j + \tau y_t^j$ получим

$$B \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + Ay^j = \varphi^j, \quad 0 \leq t = j\tau < t_0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0,$$

где $B = E + \bar{\sigma}\tau A \geq 0.5\tau A$ при $\bar{\sigma} = \sigma + \frac{\mu}{\tau} \geq 0.5$, если $\sigma \geq 0$, $\mu = \mu(\tau)$ стремится к нулю как и τ (т.е. $\mu = O(\tau)$, $\mu \in (0, \tau]$), $\Lambda = -A$, $A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha$, $-A_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$, E – единичный оператор.

Отметим, что для двухслойных схем в канонической форме $B y_t + A y^j = \varphi^j$ условия устойчивости следующие [см. 15, стр. 602]:

$$B > 0, \quad A = A^* > 0, \quad B \geq 0.5\tau A.$$

Пусть известно значение $y = y^j$ на j -м слое, требуется найти y^{j+1} . Для этого получаем уравнение

$$B y^{j+1} = F^j, \quad F^j = (B - \tau A) y^j + \tau \varphi^j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (6)$$

$$y^j|_{\gamma_h} = 0, \quad y^0 = u_0(x),$$

где F^j – известная правая часть, γ_h – граница сетки $\bar{\omega}_h$.

Факторизуем оператор $B = E + \tau \bar{\sigma} (A_1 + A_2 + \dots + A_p)$, т.е. запишем его факторизованным оператором

$$\tilde{B} = B_1 \cdot B_2 \cdots B_p, \quad B_\alpha = E + \bar{\sigma}\tau A_\alpha.$$

и перейдем от исходной схемы (6) к факторизованной схеме

$$B_1 \cdot B_2 \cdots B_p y_t + Ay = \varphi^j, \quad (7)$$

где $\tilde{B} = B_1 \cdot B_2 \cdots B_p = (E + \bar{\sigma}\tau (A_1 + A_2 + \dots + A_p) + \tau^2 Q_p) = B + \tau^2 Q_p \geq B$, $Q_p^* = Q_p \geq 0$.

Таким образом, $\tilde{B} \geq B \geq E + 0.5\tau A$, т.е. факторизованная схема (7) устойчива, если $\bar{\sigma} = \sigma + \frac{\mu}{\tau} \geq 0.5$, $\sigma \geq 0$, $\mu = O(\tau)$, $A(t) = A^*(t) > 0$ для всех $t \in \bar{\omega}_\tau$, $A(t)$ – непрерывен по Липшицу по t , $B(t) > 0$ для всех $t \in \bar{\omega}_\tau$, $B(t) \geq 0.5\tau A(t)$ для всех $t \in \omega_\tau$ и существует оператор $B^{-1}(t)$.

Справедлива следующая [15, стр. 349].

Теорема 1. Если выполнены условия $0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1$, $\mu = \text{const} > 0$, $\mu = O(\tau)$, $\bar{\sigma} = \sigma + \frac{\mu}{\tau} \geq 0.5$, $\sigma \geq 0$, существует оператор $A^{-1}(t)$, то для схемы (4)-(5) верна оценка

$$\|y(t+\tau)\|_{A(t_j)} \leq M \left(\|y^0\|_{A(0)} + \|\varphi^0\|_{A^{-1}(0)} + \|\varphi^j\|_{A^{-1}(t_j)} + \sum_{j'=0}^j \|(A^{-1}\varphi)_{\bar{t}_{j'}}\|_{A(t_{j'})} \tau \right),$$

где $\|y\|_A = \|y\|_{A(t)} = \sqrt{(A(t)y, y)}$, $M, c_0, c_1 = \text{const} > 0$.

Очевидно, что $B_\alpha y^{j+1} = E + \bar{\sigma}\tau A_\alpha$ — трехточечные разностные операторы с переменными коэффициентами. Они являются экономичными так как уравнения

$$B_\alpha y^{j+1} = (E + \bar{\sigma}\tau A_\alpha) y^{j+1} = F^j, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

могут быть решены методом прогонки.

Факторизованная схема (7) сходится с первым порядком точности по τ , т.е. со скоростью $O(\tau)$.

2. Постановка задачи Б

Вместо уравнения (1) рассмотрим следующее псевдопараболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \frac{\partial}{\partial t} Lu - u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (8)$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u$, $L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$, $0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

Преобразуем уравнение (8), тогда умножая обе части уравнения (8) на e^t и интегрируя затем от 0 до t по τ , получаем

$$Lu - u = -F, \quad (9)$$

где $F = \int_0^t e^{\tau-t} f(x, \tau) d\tau - (Lu_0(x) - u_0(x)) e^{-t}$.

В той же области вместо уравнения (9) будем рассматривать следующее уравнение с малым параметром ε

$$\varepsilon u_t = \bar{L}u + F, \quad (10)$$

с краевыми и начальными условиями

$$u|_\Gamma = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \bar{G} = G + \Gamma,$$

где $\bar{L}u = Lu - u$.

В виду того, что при $t = 0$ начальные условия для уравнения (8) и (10) совпадают, поэтому в окрестности $t = 0$ у производной u_t^ε не возникает особенности типа пограничного слоя [11], (см. [12], стр. 120).

Покажем теперь, что $u^\varepsilon \rightarrow u$ в некоторой норме при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим для этого через $\tilde{z} = u^\varepsilon - u$ и подставим $u^\varepsilon = \tilde{z} + u$ в задачу (10):

$$\varepsilon \tilde{z}_t = \bar{L}\tilde{z} + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (11)$$

$$\tilde{z}|_\Gamma = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\tilde{z}(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{G}, \quad \bar{G} = G + \Gamma,$$

где $\tilde{f}(x, t) = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}$.

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Получим энергетическое тождество, для чего умножим уравнение (11) скалярно на $\tilde{z}$:

$$\left(\varepsilon \tilde{z}_t, \tilde{z} \right) = \left(\bar{L} \tilde{z}, \tilde{z} \right) + \left(\tilde{f}(x, t), \tilde{z} \right). \quad (12)$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u, v) = \int_G uv dx, \quad (u, u) = \|u\|_0^2, \quad \|u\|_{L_2(0, l_k)}^2 = \int_0^{l_k} u^2(x, t) dx_k.$$

Далее через M_i , $i = 1, 2, \dots$ обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Оценим слагаемые, входящие в (12):

$$\left(\varepsilon \tilde{z}_t, \tilde{z} \right) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\tilde{z}\|_0^2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left(\bar{L} \tilde{z}, \tilde{z} \right) &= \sum_{\alpha=1}^p \left(\bar{L}_\alpha \tilde{z}, \tilde{z} \right) = \sum_{\alpha=1}^p \left((k_\alpha(x, t) \tilde{z}_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \tilde{z} \right) - \sum_{\alpha=1}^p (\tilde{z}, \tilde{z}) = \\ &= - \sum_{\alpha=1}^p (k_\alpha(x, t) \tilde{z}_{x_\alpha}, \tilde{z}_{x_\alpha}) - \sum_{\alpha=1}^p (1, \tilde{z}^2) \leq -c_0 \|\tilde{z}_x\|_0^2 - \|\tilde{z}\|_0^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\left(\tilde{f}(x, t), \tilde{z} \right) \leq \frac{1}{2} \|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{f}\|_0^2. \quad (15)$$

Учитывая преобразования (13)-(15), из ((12) получаем неравенство

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + 2c_0 \|\tilde{z}_x\|_0^2 \leq \|\tilde{f}\|_0^2. \quad (16)$$

Проинтегрируем (16) по τ от 0 до t , тогда получим

$$\varepsilon \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2, Q_t}^2 \leq M \int_0^t \|\tilde{f}\|_0^2 d\tau = \varepsilon^2 M \int_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau, \quad (17)$$

где M — зависит только от входных данных задач (11), $\|\tilde{z}_x\|_{2, Q_t}^2 = \int_0^t \|\tilde{z}_x\|_0^2 d\tau$.

Будем предполагать, что u_t есть ограниченная функция при $t \rightarrow 0$, т.е. в классе достаточно гладких функций $\varepsilon^2 \int_0^t \|u_\tau\|_0^2 d\tau = O(\varepsilon^2)$. Тогда из априорной оценки (17) следует сходимост u^ε к u при $\varepsilon \rightarrow 0$ в норме $\|\tilde{z}\|_1^2 = \varepsilon \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2, Q_t}^2$. Поэтому при малом ε решение задачи (10) будем принимать за приближенное решение первой краевой задачи для псевдопараболического уравнения (8).

Построим для задачи (10) двухслойную разностную схему:

$$\varepsilon \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} + A(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma) y^j) = \varphi^j, \quad (18)$$

$$y^j|_{\gamma_n} = 0, \quad y^0 = u_0(x),$$

где $A > 0$ — самосопряженный оператор.

Приведем разностную схему (18) к каноническому виду, тогда с учетом $y^{j+1} = y^j + \tau y_t^j$ получим

$$By_t + Ay^j = \varphi^j,$$

где $B = \varepsilon E + \sigma \tau A \geq 0.5 \tau A$ при $\sigma \geq 0.5$, $\varepsilon > 0$, E — единичный оператор, $\Lambda = -A$, $A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha$, $-A_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$, $a_{\alpha, i_\alpha} = k_\alpha(x_{i_\alpha - \frac{1}{2}}, \bar{t})$, $\varphi_i^j = f(x_i, \bar{t})$, $\bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}$.

Пусть известно значение $y = y^j$ на j -м слое, требуется найти y^{j+1} , тогда получаем уравнение

$$By^{j+1} = F^j, \quad F^j = (B - \tau A) y^j + \tau \varphi, \quad j = 0, 1, \dots \quad (19)$$

$$y^j|_{\gamma_h} = 0, \quad y^0 = u_0(x),$$

где F^j — известная правая часть, γ_h — граница сетки ω_h .

Факторизуем оператор $B = \varepsilon \left(E + \frac{\tau}{\varepsilon} \sigma (A_1 + A_2 + \dots + A_p) \right)$, т.е. запишем его факторизованным оператором

$$\tilde{B} = B_1 \cdot B_2 \cdots B_p, \quad B_\alpha = \varepsilon E + \sigma \tau A_\alpha$$

и перейдем от исходной схемы (19) к факторизованной схеме

$$B_1 \cdot B_2 \cdots B_p y_t + Ay = \varphi, \quad (20)$$

где

$$\tilde{B} = B_1 \cdot B_2 \cdots B_p = \varepsilon \left(E + \sigma \frac{\tau}{\varepsilon} (A_1 + A_2 + \dots + A_p) + \frac{\tau^2}{\varepsilon^2} Q_p \right) = B + \frac{\tau^2}{\varepsilon} Q_p \geq B,$$

$$Q_p^* = Q_p \geq 0.$$

Таким образом, $\tilde{B} \geq B \geq \varepsilon E + 0.5 \tau A$, т.е. факторизованная схема (20) устойчива, если $\sigma \geq 0.5$, $A(t) = A^*(t) > 0$ для всех $t \in \bar{\omega}_\tau$, $A(t)$ — липшиц-непрерывен по t , $B(t) > 0$ для всех $t \in \bar{\omega}_\tau$, $B(t) \geq \varepsilon E + 0.5 \tau A(t)$ для всех $t \in \omega_\tau$, $0 < \varepsilon \leq 1$.

Итак справедлива следующая [15, стр. 349]

Теорема 2. Если выполнено условие $0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1$, $\sigma \geq 0.5$, то для схемы (18) верна оценка

$$\|y(t + \tau)\|_{A(t)}^2 \leq M \left(\|y^0\|_{A(0)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|^2 \tau \right),$$

где $\|y\|_A = \|y\|_{A(t)} = \sqrt{(A(t)y, y)}$, $M, c_0, c_1 = \text{const} > 0$.

Факторизованная схема (20) сходится со скоростью $O\left(\frac{\tau}{\varepsilon} + \varepsilon\right)$.

Следствие 1. Если выбрать $\varepsilon = \sqrt{\tau}$, тогда факторизованная схема (20) сходится со скоростью $O(\sqrt{\tau})$, т.е. с порядком точности $\frac{1}{2}$ по τ .

3. Постановка задачи В

Уравнение (1) перепишем в виде уравнения с искусственной вязкостью [12]:

$$\varepsilon u_{tt} + u_t = Lu + \mu Lu_t + f(x, t), \quad (21)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad (22)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (23)$$

где $Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}u$, $L_{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right)$, $0 < c_0 \leq k_{\alpha}(x, t) \leq c_1$, $|k_{\alpha t}(x, t)| \leq c_2$, $\varepsilon > 0$.

Покажем теперь, что решение u^{ε} задачи (21)-(23) стремится к решению u задачи (1)-(3) в некоторой норме при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим для этого через $\tilde{z} = u^{\varepsilon} - u$ и подставим $u^{\varepsilon} = \tilde{z} + u$ в задачу (21)-(23):

$$\varepsilon \tilde{z}_{tt} + \tilde{z}_t = L\tilde{z} + \mu L\tilde{z}_t + \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (24)$$

$$\tilde{z}(x, 0) = 0, \quad \tilde{z}_t(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma,$$

$$\tilde{z}|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\tilde{f}(x, t) = -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Методом энергетических неравенств получим априорную оценку, для этого умножим уравнение (24) скалярно на $Z = \tilde{z} + \tilde{z}_t$:

$$\left(\varepsilon \tilde{z}_{tt}, Z \right) + \left(\tilde{z}_t, Z \right) = \left(L\tilde{z}, Z \right) + \mu \left(L\tilde{z}_t, Z \right) + \left(\tilde{f}(x, t), Z \right). \quad (25)$$

Оценим слагаемые, входящие в (25):

$$\left(\varepsilon \tilde{z}_{tt}, Z \right) = (\varepsilon \tilde{z}_{tt}, \tilde{z} + \tilde{z}_t) = (\varepsilon \tilde{z}_{tt}, \tilde{z}) + (\varepsilon \tilde{z}_{tt}, \tilde{z}_t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{z}_t, \tilde{z}) - \varepsilon \|\tilde{z}_t\|_0^2 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\tilde{z}_t\|_0^2, \quad (26)$$

$$\left(\tilde{z}_t, Z \right) = (\tilde{z}_t, \tilde{z} + \tilde{z}_t) = (\tilde{z}_t, \tilde{z}) + (\tilde{z}_t, \tilde{z}_t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_t\|_0^2, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \left(L\tilde{z}, Z \right) &= \left(L\tilde{z}, \tilde{z} + \tilde{z}_t \right) = \sum_{\alpha=1}^p \left(L_{\alpha}\tilde{z}, \tilde{z} + \tilde{z}_t \right) = \sum_{\alpha=1}^p \left((k_{\alpha}\tilde{z}_{x_{\alpha}})_{x_{\alpha}}, \tilde{z} + \tilde{z}_t \right) = \\ &= - \sum_{\alpha=1}^p \left(k_{\alpha}\tilde{z}_{x_{\alpha}}, \tilde{z}_{x_{\alpha}} + \tilde{z}_{x_{\alpha}t} \right) \leq -c_0 \|\tilde{z}_{x_{\alpha}}\|_0^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\sqrt{k_{\alpha}}\tilde{z}_{x_{\alpha}}\|_0^2 + M_1 \|\tilde{z}_{x_{\alpha}}\|_0^2, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mu \left(L\tilde{z}_t, Z \right) &= \mu \left(L\tilde{z}_t, \tilde{z} + \tilde{z}_t \right) = \mu \sum_{\alpha=1}^p \left(L_{\alpha}\tilde{z}_t, \tilde{z} + \tilde{z}_t \right) = \mu \sum_{\alpha=1}^p \left((k_{\alpha}\tilde{z}_{x_{\alpha}t})_{x_{\alpha}}, \tilde{z} + \tilde{z}_t \right) = \\ &= -\mu \sum_{\alpha=1}^p \left(k_{\alpha}\tilde{z}_{x_{\alpha}t}, \tilde{z}_{x_{\alpha}} + \tilde{z}_{x_{\alpha}t} \right) \leq -\mu c_0 \|\tilde{z}_{x_{\alpha}t}\|_0^2 - \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\sqrt{k_{\alpha}}\tilde{z}_{x_{\alpha}}\|_0^2 + M_2 \|\tilde{z}_{x_{\alpha}}\|_0^2, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\left(\tilde{f}(x, t), Z \right) = \left(\tilde{f}(x, t), \tilde{z} + \tilde{z}_t \right) \leq \frac{1}{2} \|\tilde{z}_t\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + M_1 \|\tilde{f}\|_0^2. \quad (30)$$

Учитывая преобразования (26)-(30), из (25) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \|\tilde{z}_t\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t} \|\tilde{z}\|_0^2 + (1 - 2\varepsilon) \|\tilde{z}_t\|_0^2 + 2c_0 \|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + 2\mu c_0 \|\tilde{z}_{x_\alpha t}\|_0^2 + \frac{\mu + 1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\sqrt{k_\alpha} \tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 \leq \\ \leq -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{z}_t, \tilde{z}) + M_2 (\|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2) + M_3 \|\tilde{f}\|_0^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Проинтегрируем (31) по τ от 0 до t , тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\tilde{z}_t\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{\mu + 1}{2} c_0 \|\tilde{z}_x\|_0^2 + 2c_0 \|\tilde{z}_x\|_{2, Q_t}^2 + (1 - 2\varepsilon) \|\tilde{z}_t\|_{2, Q_t}^2 + 2\mu c_0 \|\tilde{z}_{xt}\|_{2, Q_t}^2 \leq \\ \leq -\varepsilon (\tilde{z}_t, \tilde{z}) + M_2 \int_0^t (\|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2) d\tau + M_3 \int_0^t \|\tilde{f}\|_0^2 d\tau \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\tilde{z}_t\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{z}\|_0^2 + M_2 \int_0^t (\|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2) d\tau + M_3 \int_0^t \|\tilde{f}\|_0^2 d\tau, \end{aligned}$$

где $\|\tilde{z}_x\|_{2, Q_t}^2 = \int_0^t \|\tilde{z}_x\|_0^2 d\tau$.

Из последнего получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\tilde{z}_t\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{z}_t\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{z}_{xt}\|_{2, Q_t}^2 \leq \\ \leq M_4 \int_0^t (\|\tilde{z}_{x_\alpha}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2) d\tau + M_5 \int_0^t \|\tilde{f}\|_0^2 d\tau. \end{aligned} \quad (32)$$

На основании леммы Гронуолла [16] из (32) получаем оценку

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{z}_t\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{z}_{xt}\|_{2, Q_t}^2 \leq \\ \leq M \int_0^t \|\tilde{f}\|_0^2 d\tau = \varepsilon^2 M \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_0^2 d\tau, \end{aligned} \quad (33)$$

где M — зависит только от входных данных задачи (24).

Будем предполагать, что u_{tt} есть ограниченная функция при $t \rightarrow 0$, т.е. в классе достаточно гладких функций $\varepsilon^2 \int_0^t \|u_{\tau\tau}\|_0^2 d\tau = O(\varepsilon^2)$. Тогда из априорной оценки (33) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon \rightarrow 0$ в норме $\|\tilde{z}\|_1^2 = \varepsilon \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{z}_t\|_{2, Q_t}^2 + \|\tilde{z}_{xt}\|_{2, Q_t}^2$. Поэтому при малом ε решение задачи (21)-(23) будем принимать за приближенное решение первой краевой задачи для псевдопараболического уравнения (1)-(3).

Соответствующая разностная схема для задачи (21)-(23) имеет вид:

$$\varepsilon y_{\bar{t}t} + y_t = \Lambda \left(\sigma_1 y^{j+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 y^{j-1} \right) + \mu \Lambda y_t + \varphi^j, \quad (34)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y_t(x, 0) = u_1(x), \quad (35)$$

$$y|_{\gamma, h} = 0, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad \check{y} = y^{j-1}, \quad (36)$$

где

$$y_{\bar{t}} = \frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau}, \quad y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{y^{j+1} - 2y^j + y^{j-1}}{\tau^2},$$

$$\Lambda y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} y, \quad \Lambda_{\alpha} y = (a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}} = \frac{1}{h_{\alpha}} \left[a_{\alpha, i_{\alpha}+1} \frac{y_{i_{\alpha}+1} - y_{i_{\alpha}}}{h_{\alpha}} - a_{\alpha, i_{\alpha}} \frac{y_{i_{\alpha}} - y_{i_{\alpha}-1}}{h_{\alpha}} \right],$$

$$a_{\alpha, i_{\alpha}} = k_{\alpha}(x_{i_{\alpha}-\frac{1}{2}}, \bar{t}), \quad \varphi_i^j = f(x_i, \bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+\frac{1}{2}}.$$

Уравнение (34) перепишем в виде:

$$By_{\bar{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}\bar{t}} + Ay = \varphi^j, \quad (37)$$

$$y(0) = u_0(x), \quad y(\tau) = u_1(x),$$

где $B = E + (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A + \mu A$, $R = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} A + \frac{\varepsilon}{\tau^2} E \right) > \frac{1}{4} A$, E — единичный оператор, $\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1}{\tau\|A\|}$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0,5$, $\Lambda = -A$, $A = \sum_{\alpha=1}^p A_{\alpha}$, $-A_{\alpha} y = (a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}$.

Разрешая (37) относительно y^{j+1} , находим

$$(B + 2\tau R)y^{j+1} = 2\tau(2R - A)y^j + (B - 2\tau R)y^{j-1} + 2\tau\varphi^j.$$

Отсюда видно, что для экономичности трехслойной схемы (37) надо, чтобы оператор $B + 2\tau R$ на верхнем слое был факторизован. Найдем оператор $B + 2\tau R$

$$B + 2\tau R = E + 2\sigma_1\tau A + \left(\mu A + \frac{2\varepsilon}{\tau} E \right). \quad (38)$$

Положим в (38) $\varepsilon = -0.5\mu\tau A$, $\mu = \text{const} > 0$, тогда получим

$$B + 2\tau R = E + \bar{\sigma}\tau A, \quad \bar{\sigma}_1 = 2\sigma_1.$$

Пусть теперь $A = A_1 + A_2$ (т. е. случай, когда $p = 2$), заменим тогда $B + 2\tau R$ факторизованным оператором

$$\tilde{B} + 2\tau\tilde{R} = \left(E + \bar{\sigma}_1\tau A_1 \right) \left(E + \bar{\sigma}_1\tau A_2 \right) = E + \bar{\sigma}_1\tau A + \bar{\sigma}_1^2\tau^2 A_1 A_2.$$

Таким образом, если $A = A(t) = A^*(t) > 0$, $R = R(t) = R^*(t) > 0$ — переменные операторы, $A(t), R(t)$ липшиц-непрерывные по t :

$$|((A(t) - A(t - \tau))v, v)| \leq \tau c_3 (A(t - \tau)v, v),$$

$$|((R(t) - R(t - \tau))v, v)| \leq \tau c_4 (R(t - \tau)v, v),$$

для всех v из конечномерного вещественного гильбертова пространства H , $0 < t < j_0\tau$, где $c_3, c_4 = \text{const} > 0$, не зависящие от h и τ , тогда условия

$$B = B(t) \geq 0, \quad \text{для всех } t \in \bar{\omega}_{\tau},$$

$$R(t) \geq \frac{1}{4} A(t),$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1}{\tau\|A\|}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 > 0,5$$

достаточны для устойчивости схемы (37) по начальным данным и правой части.

Итак, имеет место следующая (см. Теорема 6, [15, стр. 363])

Теорема 3. Если $0 < c_0 \leq k_\alpha(x, t) \leq c_1$, $\mu = \text{const} > 0$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 - \frac{1}{\tau \|A\|}$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0,5$ и существует оператор $A^{-1}(t)$, тогда для схемы (34)-(36) имеет место оценка

$$\|Y(t + \tau)\|_{(t)} \leq M_1 \|Y(\tau)\|_{(0)} + M_2 \max_{\tau < t' \leq t} (\|\varphi(t')\|_{A^{-1}(t')} + \|\varphi_{\bar{t}}(t')\|_{A^{-1}(t')}),$$

где $M_1, M_2 = \text{const} > 0$, не зависящие от h и τ и выбора начальных данных y^0, y^1 и правой части $\varphi(t)$, $c_0, c_1 = \text{const} > 0$,

$$\|Y(t + \tau)\|_{(t)}^2 = \frac{1}{4} \left(A(t)(y(t + \tau) + y(t)), y(t + \tau) + y(t) \right) + \tau^2 \left(\left(R(t) - \frac{1}{4} A(t) \right) y_t, y_t \right),$$

$$\|Y(\tau)\|_{(0)}^2 = \frac{1}{4} \left(A(0)(y(\tau) + y(0)), y(\tau) + y(0) \right) + \tau^2 \left(\left(R(0) - \frac{1}{4} A(0) \right) y_t(0), y_t(0) \right),$$

$$\varphi_{\bar{t}}(t') = \frac{\varphi(t') - \varphi(t' - \tau)}{\tau}.$$

Замечание 1. Если в (38) выбрать $\varepsilon = 0,5\tau$, тогда, выбирая $\mu = O(\tau)$, $\mu \in (0, \tau]$, получаем

$$B + 2\tau R = 2(E + \bar{\sigma}\tau A),$$

где $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + \frac{\mu}{2\tau} \geq 0,5$.

Заключение

В работе изучены экономичные факторизованные схемы для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. При построении некоторых разностных схем воспользовались уравнением с искусственной вязкостью. На основе общей теории устойчивости для двухслойных и трехслойных разностных схем А.А. Самарского доказаны устойчивость и сходимость предлагаемых в работе разностных схем.

Список литературы

- [1] Hallaire M. L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. № 9. Pp. 17–29.
- [2] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.
- [3] Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 25, № 5. С. 852–864.
- [4] Дзекцер Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Доклады Академии наук СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.
- [5] Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1970. № 1. Pp. 1–26.

- [6] Colton D. Pseudoparabolic Equations in One Space Variable // Journal of Differential Equations. 1972. Vol. 12, № 3. Pp. 559–565.
- [7] Шхануков М.Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнения третьего порядка // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 256, № 6. С. 1327–1330.
- [8] Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальные свойства его решений // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 567–570.
- [9] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболического уравнения высокого порядка // Доклады Академии наук СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
- [10] Бештоков М.Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдо-параболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1780–1794.
- [11] Бештоков М.Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 12. С. 2021–2041.
- [12] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1967. Т. 12, № 5. С. 3–122.
- [13] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.
- [14] Тхагапсоев Х.Г., Шхануков М.Х., Хапачев Б.С., Абрегов М.Х. Исследование контактной температуры при правке абразивных кругов алмазным инструментом // Сверхтвердые материалы. 1983. № 4. С. 44–49.
- [15] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- [16] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

Образец цитирования

Бештоков М.Х. Экономичные факторизованные схемы для псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 3. С. 44–57. <https://doi.org/10.26456/vtpmk622>

Сведения об авторах**1. Бештоков Мурат Хамидбиевич**

ведущий научный сотрудник отдела Вычислительных методов Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук.

Россия, 360000, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89А. E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

ECONOMICAL FACTORIZED SCHEMES FOR THIRD-ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS

Beshtokov Murat Khamidbievich

Leading Researcher in the Department of Computational Methods,
Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific
Center of the Russian Academy of Sciences
Russia, 360004, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, 89A Shortanova str.
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Received 13.04.2021, revised 05.07.2021.

Economical factorized schemes for pseudo-parabolic equations of the third order are studied. On the basis of the general theory of stability of difference schemes, the stability and convergence of difference schemes are proved.

Keywords: boundary value problems, pseudoparabolic equation, stability and convergence of the scheme, economical factorized schemes.

Citation

Beshtokov M.K., “Economical factorized schemes for third-order pseudoparabolic equations”, *Vestnik Tvgu. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 3, 44–57 (in Russian).
<https://doi.org/10.26456/vtpmk622>

References

- [1] Hallaire M., “L’eau et la production vegetable”, *Institut National de la Recherche Agronomique*, 1964, № 9, 17–29.
- [2] Chudnovskij A.F., *Teplofizika pochv*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (in Russian), 352 pp.
- [3] Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N., “Ob osnovnykh uravneniyakh filtratsii odnorodnykh zhidkostej v treshchinovatykh porodakh”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **25**:5 (1960), 852–864 (in Russian).
- [4] Dzekhtser E.S., “Generalization of the equation of motion of ground waters with a free surface”, *Soviet Mathematics. Doklady*, **202**:5 (1972), 108–110.
- [5] Showalter R.E., Ting T.W., “Pseudoparabolic partial differential equations”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1970, № 1, 1–26.
- [6] Colton D., “Pseudoparabolic Equations in One Space Variable”, *Journal of Differential Equations*, **12**:3 (1972), 559–565.
- [7] Shkhanukov M.Kh., “On a method for solving boundary value problems for a third-order equation”, *Soviet Mathematics. Doklady*, **256**:6 (1982), 1327–1330 (in Russian).

- [8] Shkhanukov M.Kh., “n some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions”, *Soviet Mathematics. Doklady*, **267**:3 (1982), 567–570 (in Russian).
- [9] Soldatov A.P., Shkhanukov M.Kh., “Boundary value problems with a general non-local condition Samarskii A.A. for a high-order pseudoparabolic equation”, *Soviet Mathematics. Doklady*, **297**:3 (1987), 547–552 (in Russian).
- [10] Beshtokov M.Kh., “Difference method for solving a nonlocal boundary value problem for a degenerating third-order pseudo-parabolic equation with variable coefficients”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:10 (2016), 1763–1777.
- [11] Beshtokov M.Kh., “Differential and Difference Boundary Value Problem for Loaded Third-Order Pseudo-Parabolic Differential Equations and Difference Methods for Their Numerical Solution”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **57**:12 (2017), 1973–1993.
- [12] Vishik M.I., Lyusternik L.A., “Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter”, *Uspekhi matematicheskikh nauk [Successes of mathematical sciences]*, **12**:5 (1967), 3–122 (in Russian).
- [13] Godunov S.K., Ryabenkij V.S., *Raznostnye skhemy*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (in Russian), 439 pp.
- [14] Tkhagapsoev Kh.G., Shkhanukov M.Kh., Khapachev B.S., Abregov M.Kh., “Investigation of contact temperature during dressing of abrasive wheels with a diamond tool”, *Sverkhтвердые материалы [Superhard materials]*, 1983, № 4, 44–49 (in Russian).
- [15] Samarskij A.A., *Teoriya raznostnykh skhem [Theory of Difference Schemes]*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (in Russian), 616 pp.
- [16] Ladyzhenskaya O.A., *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (in Russian), 407 pp.