Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Соболев, А. Е. Кондратенко, О стационарных распределениях некоторых систем массового обслуживания, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2021, выпуск 4, 5–13

DOI: <https://doi.org/10.26456/vtpmk626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:00:15

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.872, 519.217.2, 519.113.3

О СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Соболев В.Н.* , Кондратенко А.Е.**

*Лаборатория ТВП, г. Москва

**Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 11.11.2021, после переработки 02.12.2021.

В статье рассматриваются стационарные распределения числа требований в системах массового обслуживания $M_\lambda|G|n|\infty$ и $GI_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$, и показывается, что введение в данные системы массового обслуживания вспомогательных распределений с понятным вероятностным смыслом вместе с их производящими функциями позволяет упростить как доказательство так и его восприятие, а также приводит к новой записи полученных результатов. В первой системе рассматривается усечённое распределение искомого стационарного распределения для вложенной цепи Маркова. Данное усечение связано с количеством каналов n и описывает вероятностные веса состояний системы, когда существует хотя бы один незанятый канал. Во второй системе для описания результатов используется распределение, связанное с распределением количества заявок во входящей группе требований: определяются вероятности хвостов описанного распределения, а потом для получения вспомогательного вероятностного распределения берётся их удельный вес между собой.

Ключевые слова: система массового обслуживания, стационарное распределение, производящая функция вероятностей, вложенная цепь Маркова, процесс восстановления.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 4. С. 5–13.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk626>

Введение

При нахождении стационарных распределений числа требований в системах массового обслуживания часто используется метод вложенных цепей Маркова. Рассмотрим на двух примерах некоторые вопросы, связанные с данным методом, которые существенно (см. доказательство для системы $M_\lambda|G|n|\infty$ здесь и в [1],

где оно проводится на стр. 320-322) упрощают доказательство, принося в него дополнительный вероятностный смысл.

Пусть $\xi(t)$ — число требований в системе в момент t . В рамках данной системы в [2, стр. 171-175] (подробнее см. [3, стр. 97-108]) было найдено стационарное распределение процесса

$$P(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} Mz^{\xi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n,$$

в котором искомое распределение определялось через стационарное распределение вложенной однородной цепи Маркова

$$\xi_n = \xi(t_n - 0), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \xi_1 = 0$$

с производящей функцией

$$\pi(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} Mz^{\xi_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k. \quad (1)$$

Почти всегда выражения для $P(z)$ и $\pi(z)$ носят чисто аналитический характер. Однако оказывается, что в ряде случаев данной взаимосвязи можно придать вероятностную интерпретацию, а из доказательств убрать некоторые чисто технические моменты путем переориентации их от применения аналитических методов в сторону формальной алгебры.

1. О вложенной цепи Маркова системы $M_\lambda | D | n | \infty$

Система массового обслуживания $M_\lambda | D | n | \infty$ представляет собой частный случай системы $M_\lambda | G | n | \infty$. Она характеризуется тем, что каждая заявка обслуживается постоянное неслучайное время, которое для определенности здесь считается равным 1. При этом времена обслуживания заявок независимы в совокупности, не зависят от моментов их поступления. Обслуживание происходит с помощью n одинаковых приборов, и каждая заявка может обслуживаться на любом из них. Можно считать, что заявки на обслуживание выбираются из очереди в порядке их поступления в систему. Интенсивность входящего пуассоновского потока будет обозначаться через λ .

Как хорошо известно, распределение вероятностей $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$, определяемое равенством (1), может быть найдено как решение системы уравнений равновесия [1, стр. 31]

$$\pi = \pi \mathbb{P}, \quad (2)$$

которая для системы массового обслуживания $M_\lambda | D | n | \infty$ записывается в виде [1, стр. 320]

$$(\pi_0, \pi_1, \dots) = (\pi_0, \pi_1, \dots) \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\ 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & \dots \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где стохастический вектор $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ задает переходные вероятности вложенной цепи Маркова. Данный вектор можно описать с помощью производящей функции

$$\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k. \quad (4)$$

Поскольку в матрице $\mathbb{P}$ первые $n+1$ строк полностью совпадают, то оказывается удобным ввести величину

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k,$$

с помощью которой определить компоненты

$$\alpha_k = \frac{\pi_k}{\Gamma}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

вектора α с производящей функцией

$$\Lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k.$$

При этом очевидно, что

$$\alpha(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k z^k$$

является производящей функцией некоторого дискретного распределения. Данное распределение является усечением распределения $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$.

Из (2) следует справедливость представления производящей функции

$$\pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$$

в виде произведения матриц

$$\pi(z) = (\pi_0, \pi_1, \dots) \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\ 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots \\ 0 & 0 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\pi(z) = (\pi_0, \pi_1, \dots) \begin{pmatrix} \gamma(z) \\ \dots \\ \gamma(z) \\ z^1 \gamma(z) \\ z^2 \gamma(z) \\ z^3 \gamma(z) \\ \dots \end{pmatrix}$$

и далее

$$\pi(z) = \gamma(z) \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k + \gamma(z) z^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \pi_k z^k,$$

что, в свою очередь, может быть записано через производящие функции

$$\Lambda(z) = \gamma(z) + \gamma(z) z^{-n} (\Lambda(z) - \alpha(z)). \quad (5)$$

Аналогично рассуждениям из [1, стр. 322] легко показать, что уравнение

$$\gamma(z) = z^n$$

в единичном круге $|z| \leq 1$ при $\rho = \frac{\lambda}{n} < 1$ имеет ровно n корней. Это непосредственно следует из теоремы Руше. Обозначим эти корни через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Равенства

$$\gamma(\lambda_i) = \lambda_i^n \quad (6)$$

вместе с соотношением (5) позволяют выписать справедливые при любом $i = 1, \dots, n$ соотношения

$$\Lambda(\lambda_i) = \lambda_i^n + (\Lambda(\lambda_i) - \alpha(\lambda_i)),$$

или, что то же самое

$$\alpha(\lambda_i) = \lambda_i^n. \quad (7)$$

Напомним, что $\alpha(z)$ есть производящая функция усечённого (см. [4, Т. 1, стр. 252]) распределения $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$, связанного со значениями ξ_n равными $0, 1, \dots, n-1$, т.е. с количеством каналов и распределением их занятости. Дополнительно отметим, что в матричной записи системы уравнений равновесия (3) данным значениям соответствуют полностью совпадающие начальные строки матрицы $\mathbb{P}$, и если их удалить, то матрица станет верхнетреугольной.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнено условие $\rho = \lambda/n < 1$, то стационарные вероятности $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ находятся из системы (7). После чего остальные π_k вычисляются из (5).*

Замечание 1. В заключении этой части обратим внимание на то, что данное выше доказательство верно для любой системы массового обслуживания, вложенная цепь Маркова которой удовлетворяет системе (3), поскольку явный вид

$$\gamma_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

вероятностей $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ использовался только при вычислении значения $\rho = \frac{\lambda}{n}$.

2. О стационарных вероятностях в системе $GI_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$

В системе массового обслуживания $GI_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ моменты поступления требований $t_0 = 0, t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ образуют процесс восстановления [5] с функцией распределения $P\{X_n < t\} = G(t)$, где $X_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geq 1$.

В каждый момент t_n поступает группа из ν_n требований, причем величины ν_n независимы, одинаково распределены и ограничены. Величины ν_n независимы от величин X_n .

В системе имеется один обслуживающий прибор, время обслуживания распределено по показательному закону с интенсивность обслуживания μ и функцией распределения $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$, а число мест для ожидания неограниченно.

Определим T как среднее время между поступлениями групп заявок в систему

$$T = MX_n = \int_0^{\infty} tdG(t). \quad (8)$$

Пусть

$$\alpha(z) = Mz^{\nu_n} = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_m z^m, \quad \alpha_m \neq 0 \quad (9)$$

производящая функция вероятностей $\alpha_k = P\{\nu_n = k\}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Тогда

$$\nu = M\nu_n = \alpha'(z)|_{z=1} = \sum_{k=1}^m k\alpha_k \quad (10)$$

— это среднее число заявок в поступающей группе.

Для входящей группы требований можно определить [4, т. 1, стр. 271] вероятности хвоста распределения, которые при $k = 0, \dots, m$ обозначим через

$$A_k = P\{\nu_n \geq k\} = P\{\nu_n > k-1\} = \sum_{k=0}^m \alpha_l.$$

В силу равенства

$$\sum_{k=0}^m A_k = \sum_{k=0}^m (\alpha_k + \dots + \alpha_m) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m) = \nu$$

скалярные величины

$$q_k = \frac{A_k}{\nu}, \quad k = 1, \dots, m,$$

представляют собой распределение вероятностей с производящей функцией

$$A(z) = \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^m A_k z^k = \sum_{k=0}^m q_k z^k. \quad (11)$$

Пусть случайная величина Y_n обозначает время обслуживания n -ой заявки. Величины Y_n независимы друг от друга и от величин X_n , а также имеют одинаковое распределение.

В этом случае среднее время обслуживания n -ой заявки τ конечно и равно

$$\tau = MY_n = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} x \mu e^{-\mu x} dx.$$

Пусть η_n — это число точек пуассоновского потока, с параметром μ , приходящих на интервале (t_n, t_{n+1}) . Поскольку в системе имеется один обслуживающий

прибор, а время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ , то величину η_n можно интерпретировать как количество заявок обслуженных за время $X_{n+1} = t_{n+1} - t_n$. Среднее число обслуженных на интервале (t_n, t_{n+1}) требований равно

$$M\eta_n = \mu T = \frac{1}{\rho_0} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Тогда нагрузка рассматриваемой системы массового обслуживания может быть найдена по формуле

$$\rho = \nu \rho_0. \quad (12)$$

Для стационарного распределения аналогичными выше рассуждениями можно получить следующие представления (см. также [6]).

Теорема 2. *Если выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и задается производящей функцией*

$$P(z) = \rho \pi(z) A(z) + 1 - \rho, \quad (13)$$

где $A(z)$ определяется равенством (11), а ρ — это нагрузка данной системы массового обслуживания (12).

Замечание 2. Формула (13) показывает, что искомое распределение есть смесь вырожденного распределения и распределения представляющего собой сумму распределений: стационарного распределения вложенной цепи Маркова с распределением “хвоста” входящей группы требований.

Следствие 1. *Если для системы $M_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и совпадает со стационарным распределением последовательности $\xi(t_n - 0)$, а для их производящих функцией справедливо представление*

$$P(z) = \pi(z) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho A(z)}. \quad (14)$$

Заключение

В системе массового обслуживания $M_\lambda | D | n | \infty$ использование производящей функции усечённого распределения позволяет в достаточно простой форме записать решение и наглядно объяснить возникновение дополнительной системы ограничений. При этом ход самого доказательства становится более очевидным.

В системе массового обслуживания $GI_\lambda^\nu | M_\mu | 1 | \infty$ для распределения числа требований во входящей группе вероятностей хвоста данного распределения применение производящей функции хвостовых вероятностей позволяет представить искомые вероятности p_n как свёртку двух распределений, одно из которых — распределение вложенной цепи Маркова, а другое — описанное выше хвостовое распределение.

Список литературы

- [1] Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
- [2] Соловьёв А.Д., Соболев В.Н. Одна система массового обслуживания с групповым поступлением требований // Материалы Международной научной конференции “Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях”, АВМТВ-2017 (Россия, Москва, 23–27 октября 2017). Под ред. А. В. Лебедева. М.: Изд-во РУДН, 2017. С. 171–175.
- [3] Soloviev A.D., Sobolev V.N. One Server Queue with Bulk Arrivals // Analytical and Computational Methods in Probability Theory. Eds. by V. Rykov, N. Singpurwalla, A. Zubkov. Series: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 10684. Cham: Springer. Pp. 97–108. https://doi.org/10.1007/978-3-319-71504-9_10
- [4] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964. 752 с.
- [5] Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории массового обслуживания. Киев: Мир, 1963. 315 с.
- [6] Соболев В.Н. О законе стационарной очереди для одной системы массового обслуживания с групповым поступлением требований // Управление большими системами. 2019. № 77. С. 6–19. <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.1>

Образец цитирования

Соболев В.Н., Кондратенко А.Е. О стационарных распределениях некоторых систем массового обслуживания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 4. С. 5–13. <https://doi.org/10.26456/vtpmk626>

Сведения об авторах

1. Соболев Виталий Николаевич

научный сотрудник лаборатории теории вероятностей и математической статистики.

Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр-кт, дом 47, лаборатория ТВП.

E-mail: sobolev_vn@mail.ru

2. Кондратенко Александр Евгеньевич

доцент кафедры теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.

E-mail: ae_cond@mech.math.msu.su

ON THE STATIONARY DISTRIBUTIONS IN SOME QUEUEING SYSTEMS

Sobolev Vitaliy Nickolayevich

Research Officer, Laboratory of TVP

Russia, 117418, Moscow, 47 Nachimovskiy av., Laboratory of TVP.

E-mail: sobolev_vn@mail.ru

Condratenko Alexandr Evgenyevich

Associate Professor at the Department of Mechanics and Mathematics,

Lomonosov Moscow State University

Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.

E-mail: ae_cond@mech.math.msu.su

Received 11.11.2021, revised 02.12.2021.

This paper deals with two queueing system: $M_\lambda|G|n|\infty$ and $GI_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$. The purpose is to find the steady-state results in terms of the probability-generating functions.

Keywords: queueing system, batch arrivals, probability generating functions, embedded Markov chain, renewal process.

Citation

Sobolev V.N., Condratenko A.E., “On the stationary distributions in some queueing systems”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]*, 2021, № 4, 5–13 (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtprmk626>

References

- [1] Bocharov P.P., Pechinkin A.V., *Teoriya massovogo obsluzhivaniya [Queueing theory]*, Publishing House of RUDN, Moscow, 1995 (in Russian), 529 pp.
- [2] Solovyov A.D., Sobolev V.N., “One queueing system with group receipt of requirements”, *Proceedings of the International Scientific Conference "Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications"*, ACMPT-2017 (Russia, Moscow, October 23-27, 2017), ed. A. V. Lebedev, Publishing House of RUDN, Moscow, 2017, 171–175 (in Russian).
- [3] Soloviev A.D., Sobolev V.N., “One Server Queue with Bulk Arrivals”, *Analytical and Computational Methods in Probability Theory*. V.10684, Lecture Notes in Computer Science, eds. V. Rykov, N. Singpurwalla, A. Zubkov, Springer, Cham, 97–108, https://doi.org/10.1007/978-3-319-71504-9_10.
- [4] Feller W., *Vvedenie v teoriyu veroyatnostej i ee prilozheniya [Introduction to probability theory and its applications]*, Mir Publ., Moscow, 1964 (in Russian), 752 pp.

- [5] Gnedenko B.V., Kovalenko I.N., *Lektsii po teorii massovogo obsluzhivaniya [Lectures on queuing theory]*, KVIRTU Publisher, Kyiv, 1963 (in Russian), 315 pp.
- [6] Sobolev V.N., “Khinchin’s basic law of a stationary queue for single-server queueing systems with batch arrivals”, *Upravlenie bolshimi sistemami [Large-Scale Systems Control]*, 2019, № 77, 6–19 (in Russian), <https://doi.org/10.25728/ubs.2019.77.1>.