



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. G. Chentsov, Extensions in the class of finitely additive measures and conditions of asymptotic non-sensitivity under a weakening of the part of constraints,
Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2009, Issue 1, 131–152

<https://www.mathnet.ru/eng/vuu6>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 216.73.216.37

December 14, 2025, 19:31:29



УДК 517.972.8

© А. Г. Ченцов

РАСШИРЕНИЯ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР И УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ОСЛАБЛЕНИИ ЧАСТИ ОГРАНИЧЕНИЙ¹

Для абстрактной задачи управления рассматривается конструкция расширения в классе векторных конечно-аддитивных мер и исследуются условия асимптотической нечувствительности достижимого множества при ослаблении части ограничений.

Ключевые слова: расширение, конечно-аддитивная мера, асимптотическая нечувствительность.

§ 1. Содержательная постановка задачи

Рассматриваемая ниже абстрактная постановка имеет своим источником следующую содержательную задачу управления линейной системой:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)f(t) \quad (1.1)$$

на конечном промежутке времени $I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ (здесь и ниже $\triangleq$ — равенство по определению), $t_0 < \vartheta_0$; начальные условия заданы: $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, где n — размерность фазового пространства. В (1.1) $A(\cdot)$ — непрерывный покомпонентно $(n \times n)$ -матрицант на I_0 , $B(\cdot)$ — $(n \times r)$ -матрицант на $I \triangleq [t_0, \vartheta_0[$, допускающий покомпонентное равномерное приближение кусочно-постоянными (к.-п.) и непрерывными справа (н. спр.) вещественнозначными (в/з) функциями на I . Пусть F — множество всех к.-п. и н. спр. неотрицательных покомпонентно r -вектор-функций на I , U — непустое подмножество (п/м) F ; предполагаем, что в (1.1) $u \in U$, причем на выбор u накладывается ограничение

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} S(t)u(t)dt \in Y, \quad (1.2)$$

где $S(\cdot)$ есть $(m \times r)$ -матрицант на I того же типа, что и $B(\cdot)$, Y — замкнутое п/м $\mathbb{R}^m$. Ограничение (1.2) порождает множество U_∂ , $U_\partial \subset U$, всех допустимых (в смысле (1.2)) управлений из U . При этом каждая функция $f \in F$, рассматриваемая как управление в системе (1.1), формирует единственную траекторию φ_f данной системы, определенную на отрезке I_0 и принимающую значения в $\mathbb{R}^n$. Множество $\mathbb{G} \triangleq \{\varphi_u(\vartheta_0) : u \in U_\partial\}$ есть область достижимости (ОД) в момент ϑ_0 ; см. [1].

Если Y в (1.2) меняется, то меняется и ОД. Ограничимся сейчас обсуждением ослаблений условия (1.2), имея в виду замену Y каким-то множеством Y_1 , $Y \subset Y_1 \subset \mathbb{R}^m$, что приводит к новой ОД $\mathbb{G}_1$. Зачастую бывает трудно указать конкретную степень ослабления (1.2), в то время как тип ослабления понятен. В этой связи полагаем, что Y «заменяется» непустым семейством п/м $\mathbb{R}^m$, пересечение всех множеств которого совпадает с Y . Рассматриваем (сейчас) две версии упомянутого семейства: $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$; в обоих случаях полагаем, что множества из упомянутых семейств — метрические ε -окрестности Y , $\varepsilon > 0$. Одна из метрик — нормируемая (сопоставляем вектору из $\mathbb{R}^m$ наибольший из модулей его компонент), а другая отвечает ситуации, когда ослабление Y -ограничения (1.2) касается лишь части координат, и является

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (06-01-00414, 07-01-96088).

некоторой композицией нормируемой и дискретной метрик. В результате ОД заменяется двумя сравнимыми множествами притяжения (МП) AS_1 и AS_2 . В первом случае имеем семейство $\{G^{(\varepsilon)}, \varepsilon > 0\}$ «больших» ОД (отвечающих ослаблению (1.2) по всем координатам), во втором — семейство $\{G_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ «малых» ОД; AS_1 совпадает с пересечением всех множеств $\overline{G^{(\varepsilon)}}$, где черта сверху обозначает замыкание, а AS_2 — с пересечением всех множеств $\overline{G_\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Исследуются представления абстрактных аналогов AS_1 и AS_2 , а также условия их совпадения; последнее свойство (представляющее практический интерес) имеет смысл асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений. Для этих целей используется специальный аппарат расширений исходной задачи. В связи с конструкциями расширений отметим [2, 3, 4, 5]; особо выделяем общий подход Н. Н. Красовского в [4] к исследованию задач импульсного управления, связанный с применением обобщенных функций.

В дальнейшем рассматривается абстрактная постановка, включающая вышеупомянутую содержательную задачу как частный случай.

§ 2. Общие понятия и обозначения

Перечислим некоторые соглашения, следуя в основном [6, 7, 8]. Выражение def заменяет фразу «по определению». Для всякого объекта x через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x ; $\emptyset$ — пустое множество. Если x и y — объекты, то $\{x; y\} \triangleq \{x\} \cup \{y\}$ — неупорядоченная пара объектов x и y . Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X ; $\text{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Если A и B — множества, а $f: A \rightarrow B$, то:

- 1) для всякого множества $C \in \mathcal{P}(A)$ множество

$$f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

есть образ C при действии f , а $(f|C)$ есть def отображение из C в B (сужение f на C), для которого $(f|C)(x) \triangleq f(x) \quad \forall x \in C$;

- 2) $\forall B \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$

$$f^{-1}[B] \triangleq \{f^{-1}(V) : V \in B\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A)). \quad (2.1)$$

Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство, а B — множество, то

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)).$$

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ и $\forall k \in \mathcal{N}$

$$(\overline{1, k} \triangleq \{i \in \mathcal{N} | i \leq k\}) \& (\overline{k, \infty} \triangleq \{i \in \mathcal{N} | k \leq i\}).$$

Если T — множество и $s \in \mathcal{N}$, то через T^s обозначаем множество всех кортежей $(t_i)_{i \in \overline{1, s}} : \overline{1, s} \rightarrow T$ (в частности, $\mathbb{R}^s$ — s -мерное арифметическое пространство). Речь, стало быть, идет о функциях, определенных на $\overline{1, s}$.

Для всяких топологического пространства (ТП) (X, t) и множества $A \in \mathcal{P}(X)$: 1) $\text{cl}(A, t)$ есть def замыкание A в (X, t) ; 2) $t|_A$ — топология A , индуцированная из (X, t) ; 3) $\mathcal{N}_t[A]$ — семейство всех окрестностей A в (X, t) , понимаемых в смысле [9, гл. I]. Если (X, t) — ТП и $x \in X$, то полагаем $\mathcal{N}_t(x) \triangleq \mathcal{N}_t[\{x\}]$, получая фильтр [9, гл. I] окрестностей точки x . Если (X, t) — ТП, то через $\mathcal{F}_t$ (через $(t - \text{comp})[X]$) обозначаем семейство всех п/м X , замкнутых (компактных [10]) в (X, t) . Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) — ТП, то через $C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$ обозначаем множество всех (τ_1, τ_2) -непрерывных отображений из X в Y ,

$$C_{\text{cl}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{g \in C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \mid g^1(F) \in \mathcal{F}_{\tau_2} \quad \forall F \in \mathcal{F}_{\tau_1}\}$$

(множество всех замкнутых отображений из X в Y) и, наконец,

$$C_{\text{ap}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{g \in C_{\text{cl}}(X, \tau_1, Y, \tau_2) \mid g^{-1}(\{y\}) \in (\tau_1 - \text{comp})[X] \ \forall y \in Y\}$$

(множество всех почти совершенных [10, с. 287] отображений из X в Y).

Если P и $\mathbf{T}$ — непустые множества и $\mathbf{t}$ — топология $\mathbf{T}$, то через $\otimes^P(\mathbf{t})$ обозначаем [7, с. 269] топологию множества всех отображений из P в $\mathbf{T}$, соответствующую тихоновской степени ТП $(\mathbf{T}, \mathbf{t})$ при использовании P в качестве индексного множества. Если при этом $P = \overline{1, k}$, где $k \in \mathcal{N}$, то $\otimes^k[\mathbf{t}] \triangleq \otimes^{\overline{1, k}}(\mathbf{t})$; ТП $(\mathbf{T}^k, \otimes^k[\mathbf{t}])$ — конечная степень ТП $(\mathbf{T}, \mathbf{t})$.

Если X — множество, то $\beta[X]$ (или $\beta_0[X]$) — множество всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ (всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$) таких, что

$$\forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2;$$

$$\mathfrak{F}[X] \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \ \& (\{G \in \mathcal{P}(X) \mid F \subset G\} \subset \mathcal{F} \ \forall F \in \mathcal{F})\}$$

есть множество всех фильтров [9, гл. I] X (элементы $\beta_0[X]$ — суть базы фильтров X и только они), причем

$$(X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \triangleq \{L \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset L\} \in \mathfrak{F}[X] \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[X].$$

Обычным образом [9, гл. I] определяем сходимость фильтров: если (X, t) — ТП, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ и $x \in X$, то свойство $\mathcal{F} \xrightarrow{t} x$ эквивалентно вложению $N_t(x) \subset \mathcal{F}$.

Направленность в множестве P определяем в дальнейшем как всякий триплет $(D, \preceq, l)$, где $(D, \preceq)$ — непустое направленное множество (НМ), $l : D \longrightarrow P$. Каждой направленности $(D, \preceq, l)$ в множестве P сопоставляем фильтр

$$(P - \text{ass})[D; \preceq; l] \triangleq \{V \in \mathcal{P}(P) \mid \exists d \in D \ \forall \delta \in D ((d \preceq \delta) \implies (l(\delta) \in V))\} \in \mathfrak{F}[P],$$

ассоциированный с $(D, \preceq, l)$. Если (X, t) — ТП, $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, g)$ — направленность в X и $x \in X$, то

$$((\mathbb{D}, \sqsubseteq, g) \xrightarrow{t} x) \stackrel{\text{def}}{\iff} ((X - \text{ass})[\mathbb{D}; \sqsubseteq; g] \xrightarrow{t} x) \quad (2.2)$$

(в (2.2)) введена «обычная» сходимость по Мору-Смиту; см. [10, 11]). Используем ниже известное [10] представление непрерывности в терминах сходимости (2.2). Последовательность есть частный случай направленности: оснащая $\mathcal{N}$ обычной упорядоченностью $\leq$, получаем непустое НМ $(\mathcal{N}, \leq)$; если $(x_i)_{i \in \mathcal{N}}$ — последовательность в множестве X , то триплет $(\mathcal{N}, \leq, (x_i)_{i \in \mathcal{N}})$ — направленность в X и для всяких топологии t множества X и точки $x \in X$

$$((x_i)_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{t} x) \stackrel{\text{def}}{\iff} ((\mathcal{N}, \leq, (x_i)_{i \in \mathcal{N}}) \xrightarrow{t} x).$$

Получили обычную секвенциальную сходимость в ТП.

Множества притяжения. До конца настоящего параграфа фиксируем непустое множество E (в дальнейшем E будет конкретизировано). Если $(X, \mathbf{t})$ — ТП, $l : E \longrightarrow X$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $(\text{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}]$ обозначаем множество всех $x \in X$ таких, что для некоторой направленности $(D, \preceq, g)$ в множестве E

$$(\mathcal{E} \subset (E - \text{ass})[D; \preceq; g]) \ \& \ ((D, \preceq, l \circ g) \xrightarrow{\mathbf{t}} x)$$

($\circ$ — символ суперпозиции); называем $(\text{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}]$ множеством притяжения (МП). Если в условиях, упомянутых выше, $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то [12, с. 39, 40]

$$(\text{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}] = \bigcap_{P \in \mathcal{E}} \text{cl}(l^1(P), \mathbf{t}). \quad (2.3)$$

Свойство (2.3) широко используется в дальнейшем. Если $\mathcal{E} \in \beta[E]$ имеет счетную базу (см. [8, (3.3.17)]), а $(X, \mathbf{t})$ — ТП с первой аксиомой счетности, то (см. [8, с. 38], [13], [14]) $(\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}]$ есть множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует последовательность $(e_i)_{i \in \mathcal{N}}$ в E со свойствами

$$(\forall V \in \mathcal{E} \exists k \in \mathcal{N} : e_j \in V \ \forall j \in \overline{k, \infty}) \ \& \ ((l(e_i))_{i \in \mathcal{N}} \xrightarrow{\mathbf{t}} x).$$

Отметим, что в [13, 14] даны эквивалентные представления МП на языке фильтров и ультра-фильтров множества E , играющего здесь роль пространства обычных решений.

§ 3. Конечно-аддитивные меры

Фиксируем далее полуалгебру [15] $\mathcal{L}$ п/м непустого множества I произвольной природы; итак, в дальнейшем $(I, \mathcal{L})$ — абстрактное измеримое пространство (ИП) с полуалгеброй множеств. Через $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех в/з неотрицательных конечно-аддитивных (к.-а.) мер на $\mathcal{L}$; здесь и ниже используем обозначения [6, 7, 8, 12]. Через $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$; $(\text{add})_+[\mathcal{L}], (\text{add})_+[\mathcal{L}] \subset \mathbf{A}(\mathcal{L})$, есть конус, порождающий $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ как линейное пространство. Через $B_0(I, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех ступенчатых, в смысле ИП $(I, \mathcal{L})$, в/з функций на I ; $B_0(I, \mathcal{L})$ — линейная оболочка множества всех индикаторов [15, с. 56] множеств из $\mathcal{L}$. Пространство $\mathbf{B}(I)$ всех ограниченных в/з функций на I оснащаем традиционной суп-нормой $\|\cdot\|$, а замыкание множества $B_0(I, \mathcal{L})$, $B_0(I, \mathcal{L}) \subset \mathbf{B}(I)$, в топологии этой суп-нормы обозначаем через $B(I, \mathcal{L})$, что согласуется с [16, гл. IV]. Оснащая $B(I, \mathcal{L})$ как (линейное) подпространство $\mathbf{B}(I)$ нормой, индуцированной из банахова пространства $(\mathbf{B}(I), \|\cdot\|)$, мы также получаем банахово пространство, причем пространство $B^*(I, \mathcal{L})$, топологически сопряженное к $B(I, \mathcal{L})$, при традиционном нормировании изометрически изоморфно $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме-вариации; см. [8, с. 40]. Сам же изометрический изоморфизм $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(I, \mathcal{L})$ определяется простейшей конструкцией интегрирования [12, гл. 3] (используемой ниже без дополнительных пояснений) и имеет вид

$$\mu \longmapsto \left(\int_I g d\mu \right)_{g \in B(I, \mathcal{L})} : \mathbf{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow B^*(I, \mathcal{L}).$$

Двойственности $(B(I, \mathcal{L}), \mathbf{A}(\mathcal{L}))$ отвечает обычная $*$ -слабая топология $\tau_*(\mathcal{L})$ [8, с. 41] множества $\mathbf{A}(\mathcal{L})$, для которой

$$(\mathbf{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})) \tag{3.1}$$

есть локально выпуклый σ -компакт; условия компактности в (3.1) определяются теоремой Алаоглу [16, гл. V]. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ (через τ_{∂}) обозначаем обычную (дискретную) топологию $\mathbb{R}$. В виде

$$\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \triangleq \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_{\mathbf{A}(\mathcal{L})}, \quad \tau_0(\mathcal{L}) \triangleq \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})|_{\mathbf{A}(\mathcal{L})}$$

имеем [8, 12] две топологии $\mathbf{A}(\mathcal{L})$, для которых

$$\tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \subset \tau_*(\mathcal{L}), \quad \tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \subset \tau_0(\mathcal{L});$$

$$\tau_*^+(\mathcal{L}) \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{(\text{add})_+[\mathcal{L}]} = \tau_{\otimes}(\mathcal{L})|_{(\text{add})_+[\mathcal{L}]} \subset \tau_0^+(\mathcal{L}), \tag{3.2}$$

где $\tau_0^+(\mathcal{L}) \triangleq \tau_0(\mathcal{L})|_{(\text{add})_+[\mathcal{L}]}$. Через $B_0^+(I, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех неотрицательных функций из $B_0(I, \mathcal{L})$. Всюду в дальнейшем фиксируем $r \in \mathcal{N}$ (смысл параметра r аналогичен § 1) и полагаем

$$((\text{add})_r^+[\mathcal{L}] \triangleq (\text{add})_+[\mathcal{L}]^r) \ \& \ (B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}] \triangleq B_0^+(I, \mathcal{L})^r); \tag{3.3}$$

если $\mu \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$, то $\mu : \overline{1, r} \longrightarrow (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и, стало быть,

$$\mu(j) \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall j \in \overline{1, r}.$$

Аналогичное замечание справедливо относительно

$$f \in B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}] : f(j) \in B_0^+(I, \mathcal{L}) \quad \forall j \in \overline{1, r}.$$

В силу (3.2) топологии $\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]$ и $\otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]$ непустого множества $(\text{add})_r^+[\mathcal{L}]$ сравнимы:

$$\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})] \subset \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]. \quad (3.4)$$

Более подробные сведения о топологиях, используемых в (3.4), см. в [7, 17]. Если $k \in \mathcal{N}$, то через $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}$ условимся обозначать обычную топологию покоординатной сходимости множества $\mathbb{R}^k$; при этом $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} = \otimes^k[\tau_{\mathbb{R}}]$.

§ 4. Аппроксимативная реализация конечно-аддитивных мер

Всюду в дальнейшем фиксируем к.-а. меру $\eta \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ и полагаем

$$(\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \triangleq \{\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ ((\eta(L) = 0) \implies (\mu(L) = 0))\}, \quad (4.1)$$

получая при этом множество всех в/з неотрицательных слабо абсолютно η -непрерывных [18] к.-а. мер на $\mathcal{L}$. Следуя [12, с. 69], полагаем при $f \in B(I, \mathcal{L})$, что $f * \eta$ есть def к.-а. мера, $f * \eta \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$, являющаяся неопределенным η -интегралом функции f . Имеем [12, с. 86]

$$(\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] = \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(I, \mathcal{L})\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \text{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(I, \mathcal{L})\}, \tau_0(\mathcal{L})). \quad (4.2)$$

Конкретный способ аппроксимативной реализации к.-а. мер из множества (4.1) указан в [8, 12, 17]. Через $\mathbf{D}$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{L})$, для каждого из которых:

- 1) I есть объединение всех множеств из $\mathcal{K}$,
- 2) $A \cap B = \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{K} \quad \forall B \in \mathcal{K} \setminus \{A\}$.

Через $\prec$ обозначаем направление на $\mathbf{D}$, определяемое на основе вписанности одного разбиения из $\mathbf{D}$ в другое; см. [12, с. 83]. Тогда $(\mathbf{D}, \prec)$ — непустое НМ. Если $\mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ и $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$, то в согласии с [8, с. 49] определяем $\Theta_{\mu}^+[\mathcal{K}] \in B_0^+(I, \mathcal{L})$. Это позволяет определить нужные отображения из $\mathbf{D}$ в $B_0^+(I, \mathcal{L})$ и в $(\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$. Сейчас отметим второе: если $\mu \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$, то $\Theta_{\mu}^+[\cdot] * \eta$ есть def оператор $\mathcal{K} \mapsto \Theta_{\mu}^+[\mathcal{K}] * \eta : \mathbf{D} \longrightarrow (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$, причем для получающейся направленности $(\mathbf{D}, \prec, \Theta_{\mu}^+[\cdot] * \eta)$ в $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$ имеем [8, с. 50] свойства:

$$((\mathbf{D}, \prec, \Theta_{\mu}^+[\cdot] * \eta) \xrightarrow{\tau_*^+(\mathcal{L})} \mu) \ \& \ ((\mathbf{D}, \prec, \Theta_{\mu}^+[\cdot] * \eta) \xrightarrow{\tau_0^+(\mathcal{L})} \mu). \quad (4.3)$$

Введем

$$(\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta] \triangleq (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]^r, \quad (\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta] \subset (\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta];$$

для элементов этого множества аппроксимативная конструкция на основе (4.3) реализуется покомпонентно. Для $\mu \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta]$ имеем $\mu(j) \in (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ при $j \in \overline{1, r}$ и

$$\Theta_{\mu}^{(r)}[\mathcal{K}] \triangleq (\Theta_{\mu(i)}^+[\mathcal{K}])_{i \in \overline{1, r}} \in B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}] \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}.$$

Если $\mu \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta]$, то через $\Theta_{\mu}^{(r)}[\cdot]$ обозначаем отображение

$$\mathcal{K} \mapsto \Theta_{\mu}^{(r)}[\mathcal{K}] : \mathbf{D} \longrightarrow B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}]. \quad (4.4)$$

Введем также отображение $\mathbb{P}$ в виде правила

$$(f_i)_{i \in \overline{1, r}} \mapsto (f_i * \eta)_{i \in \overline{1, r}} : B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}] \longrightarrow (\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta]. \quad (4.5)$$

Тогда из (4.3) и (4.5) имеем с очевидностью $\forall \mu \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta]$

$$((\mathbf{D}, \prec, \mathbb{P} \circ \Theta_{\mu}^{(r)}[\cdot]) \xrightarrow{\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]} \mu) \ \& \ ((\mathbf{D}, \prec, \mathbb{P} \circ \Theta_{\mu}^{(r)}[\cdot]) \xrightarrow{\otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]} \mu). \quad (4.6)$$

В качестве добавления к (4.6) отметим с учетом [8, с. 49], что

$$\left(\int_I \Theta_{\mu}^{(r)}[\mathcal{K}](i)d\eta\right)_{i \in \overline{1,r}} = \left(\int_I \Theta_{\mu(i)}^+[\mathcal{K}]d\eta\right)_{i \in \overline{1,r}} = (\mu(i)(I))_{i \in \overline{1,r}} \quad \forall \mu \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta] \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}. \quad (4.7)$$

В дальнейшем (3.4), (4.6) и (4.7) используются в естественном сочетании при установлении свойства плотности при погружении пространства обычных управлений в пространство обобщенных.

§ 5. Пространство возможных управлений и его расширение

В настоящем параграфе вводится одно специальное множество вектор-функций, которое по смыслу аналогично U § 1. Вектор-функции из упомянутого множества называем управлениями, хотя какого-либо аналога системы (1.1) здесь не рассматривается. Обсудим естественную (и восходящую к [7, 8]) схему расширения в классе векторных к.-а. мер.

Через $\mathbb{R}_+^r$ обозначаем множество всех элементов $\mathbb{R}^r$ (r -мерных векторов) с неотрицательными компонентами. Фиксируем $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+^r)$ и полагаем всюду в дальнейшем, что множество $\mathbf{F}$ замкнуто в $(\mathbb{R}^r, \tau_{\mathbb{R}}^{(r)}) = (\mathbb{R}^r, \otimes^r[\tau_{\mathbb{R}}])$. Итак, $\mathbf{F}$ — непустое замкнутое (в обычном смысле) п/м $\mathbb{R}_+^r$. Пусть

$$\mathbf{U} \triangleq \{(f_i)_{i \in \overline{1,r}} \in B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}] \mid \left(\int_I f_i d\eta\right)_{i \in \overline{1,r}} \in \mathbf{F}\} \quad (5.1)$$

(напомним, что I — непустое множество произвольной природы; см. § 3). Кроме того, пусть

$$\tilde{\mathbf{U}} \triangleq \{(\mu_i)_{i \in \overline{1,r}} \in (\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta] \mid (\mu_i(I))_{i \in \overline{1,r}} \in \mathbf{F}\}. \quad (5.2)$$

Элементы множества (5.1) (множества (5.2)) именуем обычными (обобщенными) управлениями. Вполне очевидно вложение

$$\mathbb{P}^1(\mathbf{U}) \subset \tilde{\mathbf{U}}, \quad (5.3)$$

вытекающее из (4.7) и свойств неопределенного интеграла (см. [12, с. 69]). Напомним здесь же, что из (4.2) вытекает по определению топологии произведения цепочка равенств

$$(\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta] = \text{cl}(\mathbb{P}^1(B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}]), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) = \text{cl}(\mathbb{P}^1(B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}]), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]). \quad (5.4)$$

Из (5.4) вытекает, что $\mathbb{P}^1(B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}])$ есть множество, всюду плотное в $(\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta]$ в смысле каждого из ТП

$$((\text{add})_r^+[\mathcal{L}], \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]), (\text{add})_r^+[\mathcal{L}], \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]). \quad (5.5)$$

Предложение 1. *Отображение*

$$(\mu_i)_{i \in \overline{1,r}} \longmapsto (\mu_i(I))_{i \in \overline{1,r}} : (\text{add})_r^+[\mathcal{L}] \longrightarrow \mathbb{R}^r \quad (5.6)$$

непрерывно в смысле топологий $\otimes^r[\tau_^+(\mathcal{L})]$ и $\tau_{\mathbb{R}}^{(r)}$.*

Доказательство практически очевидно и по этой причине опущено.

Предложение 2. *Множество $\tilde{\mathbf{U}}$ замкнуто в первом из упоминаемых в (5.5) ТП: $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{F}_{\mathbf{t}}$ при $\mathbf{t} = \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]$.*

Доказательство. Обозначим через φ отображение (5.6). Тогда в силу (5.2) $\tilde{\mathbf{U}} = (\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta] \cap \varphi^{-1}(\mathbf{F})$, где в силу предложения 1 множество $\varphi^{-1}(\mathbf{F})$ замкнуто в топологии $\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]$ (см. первое ТП в (5.5)). Поскольку множество $(\text{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta]$ замкнуто (см. (5.4)), то требуемое утверждение установлено. $\square$

С учетом (3.4) получаем следующее очевидное вложение:

$$\text{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]) \subset \text{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]). \quad (5.7)$$

Предложение 3. *Справедливо вложение $\tilde{\mathbf{U}} \subset \text{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})])$.*

Доказательство. Пусть $\nu \in \tilde{\mathbf{U}}$. Тогда имеем отображение $\nu : \overline{1, r} \longrightarrow (\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$. Для оператора $\varphi \triangleq \Theta_\nu^{(r)}[\cdot]$ (из $\mathbf{D}$ в $B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}]$) имеем, что

$$\varphi(\mathcal{K})(j) = \Theta_{\nu(j)}^+[\mathcal{K}] \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D} \quad \forall j \in \overline{1, r}.$$

С учетом (4.7) имеем, следовательно, очевидное свойство

$$\left(\int_I \varphi(\mathcal{K})(i) d\eta \right)_{i \in \overline{1, r}} = (\nu(i)(I))_{i \in \overline{1, r}} \in \mathbf{F} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}.$$

С учетом (5.1) получаем, в частности, что $\varphi : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{U}$. Тогда $(\mathbf{D}, \prec, \mathbb{P} \circ \varphi)$ — направленность в $\mathbb{P}^1(\mathbf{U})$ и с учетом (4.6) имеем (см. [10, с. 89]) включение $\nu \in \text{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})])$. $\square$

Теорема 1. *Справедлива следующая цепочка равенств:*

$$\tilde{\mathbf{U}} = \text{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) = \text{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]).$$

Доказательство. Из (5.3) и предложения 2 имеем: $\text{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) \subset \tilde{\mathbf{U}}$. Теперь из (5.7) и предложения 3 имеем цепочку вложений

$$\tilde{\mathbf{U}} \subset \text{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]) \subset \text{cl}(\mathbb{P}^1(\mathbf{U}), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) \subset \tilde{\mathbf{U}}.$$

Через $\mathcal{O}$ обозначаем в/з функцию на $\mathcal{L}$, для которой $\mathcal{O}(L) \triangleq 0 \quad \forall L \in \mathcal{L}$. Введена нулевая мера на $\mathcal{L}$. Всюду в дальнейшем полагаем, что $\eta \neq \mathcal{O}$. Тогда $\mathbf{U} \neq \emptyset$, т.е. $\mathbf{U} \in \mathcal{P}'(B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}])$. Разумеется (см. теорему 1), $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{P}'((\text{add})^+[\mathcal{L}])$ и

$$\tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}) \triangleq \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]|_{\tilde{\mathbf{U}}}, \quad \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}) \triangleq \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]|_{\tilde{\mathbf{U}}} \quad (5.8)$$

суть хаусдорфовы топологии $\tilde{\mathbf{U}}$, причем

$$\tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}) \subset \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}) \quad (5.9)$$

((5.9) наследуется от (3.4)). Справедлива следующая

Теорема 2. *Если $\mathbf{F} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(r)} - \text{comp})[\mathbb{R}^r]$, то $(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}))$ — непустой компакт.*

Доказательство сводится к элементарной комбинации простейших свойств компактных ТП (см., например, [10, § 3.1]) и теоремы Алаоглу [16, гл. V]. Отметим, что содержательные варианты некомпактного множества $\tilde{\mathbf{U}}$ легко извлекаются из построений [7, 17, 19] (см. также [8, гл. IV], где проведено систематическое исследование расширений в классе неотрицательных векторных к.-а. мер). Сейчас рассмотрим одну детализацию весьма общей процедуры [19], использующей т.н. битопологические пространства (БТП).

Фиксируем множество $\mathbf{X}$, оператор $\mathbf{s} : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{X}$ и множество $\mathbf{Y} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Последнее формирует (стандартное) ограничение $\mathbf{s}(u) \in \mathbf{Y}$ на выбор $u \in \mathbf{U}$. Для конструирования асимптотических аналогов данного ограничения введем топологии τ_1 и $\tau_{\mathbf{u}}$ множества $\mathbf{X}$, полагая при этом, что $\tau_1 \subset \tau_{\mathbf{u}}$ (топология $\tau_{\mathbf{u}}$ сильнее). Получающийся триплет

$$(\mathbf{X}, \tau_1, \tau_{\mathbf{u}}) \quad (5.10)$$

именуем БТП в согласии с [19]. Наряду с (5.10), имеем (см. (5.9)) БТП

$$(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})). \quad (5.11)$$

Фиксируем семейство $\mathcal{Y}_1 \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_{\tau_1}[\mathbf{Y}])$ и полагаем в дальнейшем, что

$$\forall x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y} \exists O_1 \in N_{\tau_1}(x) \exists O_2 \in \mathcal{Y}_1 : O_1 \cap O_2 = \emptyset. \quad (5.12)$$

Свойство (5.12) называем $\mathcal{Y}_1$ -регулярностью множества $\mathbf{Y}$ или просто регулярностью $\mathbf{Y}$, если понятно, о каком семействе $\mathcal{Y}_1$ идет речь.

Замечание 1. Условие (5.12) выполняется, когда $(\mathbf{X}, \tau_1)$ — регулярное [11] ТП, $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\tau_1}$ и $\mathcal{Y}_1 = \mathbb{N}_{\tau_1}[\mathbf{Y}]$. Последнее не всегда естественно. В этой связи отметим другой случай в (5.12): $(\mathbf{X}, \tau_1)$ — метризуемое ТП, $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, $\mathbf{Y} \neq \emptyset$; ; $\mathcal{Y}_1$ — семейство всех ε -окрестностей $\mathbf{Y}$ в метрике, порождающей топологию τ_1 , $\varepsilon > 0$. В общем случае (5.12) непременно имеем свойство замкнутости $\mathbf{Y}$, то есть $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\tau_1}$.

Пусть $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}} \triangleq \mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[\mathbf{Y}]$. По свойствам БТП

$$\mathcal{Y}_1 \subset \mathbb{N}_{\tau_1}[\mathbf{Y}] \subset \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}. \quad (5.13)$$

Возвращаясь к МП § 2, полагаем $\mathcal{E}_1 \triangleq \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_1]$ и $\mathcal{E}_{\mathbf{u}} \triangleq \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}]$ (см. (2.1)); из (5.13) имеем вложение

$$\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_{\mathbf{u}}. \quad (5.14)$$

Всюду в дальнейшем используем определение МП § 2 при условии $E = \mathbf{U}$. Если (T, t) — ТП и $g \in T^{\mathbf{U}}$, то

$$(\mathbf{as})[T; t; g; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] \subset (\mathbf{as})[T; t; g; \mathcal{E}_1]. \quad (5.15)$$

Пусть $\mathbf{p} \triangleq (\mathbb{P}|\mathbf{U})$; $\mathbf{p}: \mathbf{U} \longrightarrow \tilde{\mathbf{U}}$ (см. (5.3)); при этом $\mathbf{p}^1(\mathbf{U}) = \mathbb{P}^1(\mathbf{U})$ и (см. (5.8), теорему 1, а также [10, с.111])

$$\tilde{\mathbf{U}} = \text{cl}(\mathbf{p}^1(\mathbf{U}), \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L})) = \text{cl}(\mathbf{p}^1(\mathbf{U}), \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})). \quad (5.16)$$

Пусть $\mathbf{r} \in C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_1) \cap C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}})$ (это свойство $\mathbf{r}$ именуем далее универсальной непрерывностью) и при этом

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} \circ \mathbf{p}. \quad (5.17)$$

Теорема 3. *Справедлива следующая цепочка равенств:*

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1] = (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] = (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1] = (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] = \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}).$$

Доказательство. Из (5.15) имеем два очевидных вложения:

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] \subset (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1], \quad (5.18)$$

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] \subset (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1]. \quad (5.19)$$

Из (5.9) непосредственно следует система вложений: $N_{\tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L})}(\mu) \subset N_{\tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})}(\mu) \quad \forall \mu \in \tilde{\mathbf{U}}$. Как следствие (см. (2.2)) имеем очевидные вложения

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}] \subset (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{U})). \quad (5.20)$$

В частности, из (5.18) и (5.20) следуют вложения

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] \subset (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] \subset (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1]. \quad (5.21)$$

В свою очередь, из (5.19) и (5.20) имеем цепочку вложений

$$(\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] \subset (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1] \subset (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1]. \quad (5.22)$$

Выберем произвольно $\mu \in (\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1]$ и подберем направленность $(D, \preceq, \varphi)$ в множестве $\mathbf{U}$, для которой

$$(\mathcal{E}_1 \subset (\mathbf{U} - \text{ass})[D; \preceq; \varphi]) \ \& \ ((D, \preceq, \mathbf{p} \circ \varphi) \xrightarrow{\tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L})} \mu). \quad (5.23)$$

С учетом непрерывности $\mathbf{r}$ имеем (см. [20, с.47]) из (5.23) следующее свойство сходимости:

$$(D, \preceq, \mathbf{r} \circ \mathbf{p} \circ \varphi) \xrightarrow{\tau_1} \mathbf{r}(\mu).$$

С учетом (5.17) получаем очевидное свойство

$$(D, \preccurlyeq, \mathbf{s} \circ \varphi) \xrightarrow{\eta} \mathbf{r}(\mu). \quad (5.24)$$

Тогда $\mathbf{r}(\mu) \in \mathbf{Y}$. В самом деле, допустим противное: $\mathbf{r}(\mu) \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}$. С учетом регулярности $\mathbf{Y}$ (см. (5.12)) подберем окрестности $O_1 \in N_{\eta}(\mathbf{r}(\mu))$ и $O_2 \in \mathcal{Y}_1$, для которых $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Тогда $\mathbf{s}^{-1}(O_2) \in \mathcal{E}_1$, а потому (см. (5.23))

$$\mathbf{s}^{-1}(O_2) \in (\mathbf{U} - \text{ass})[D; \preccurlyeq; \varphi]. \quad (5.25)$$

Из (5.24) следует, что $O_1 \in (\mathbf{X} - \text{ass})[D; \preccurlyeq; \mathbf{s} \circ \varphi]$, откуда легко следует, что

$$\mathbf{s}^{-1}(O_1) \in (\mathbf{U} - \text{ass})[D; \preccurlyeq; \varphi]. \quad (5.26)$$

Из (5.25) и (5.26) имеем по аксиомам фильтра следующее свойство:

$$\mathbf{s}^{-1}(O_1 \cap O_2) = \mathbf{s}^{-1}(O_1) \cap \mathbf{s}^{-1}(O_2) \in (\mathbf{U} - \text{ass})[D; \preccurlyeq; \varphi], \quad (5.27)$$

откуда, в частности, следует (см. § 2), что $\mathbf{s}^{-1}(O_1 \cap O_2) \neq \emptyset$, что противоречит выбору O_1 и O_2 . Данное противоречие означает: $\mathbf{r}(\mu) \in \mathbf{Y}$. Поэтому $\mu \in \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})$, чем завершается обоснование вложения

$$(\text{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1] \subset \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}). \quad (5.28)$$

Выберем произвольно $\nu \in \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})$. Тогда $\nu \in \tilde{\mathbf{U}}$ и при этом $\mathbf{r}(\nu) \in \mathbf{Y}$. По выбору $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ имеем свойство $\mathcal{E}_{\mathbf{u}} \in \beta[\mathbf{U}]$, а тогда (см. (2.3))

$$(\text{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] = \bigcap_{M \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}} \text{cl}(\mathbf{p}^1(M), \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})). \quad (5.29)$$

Пусть $V \in \mathcal{E}_{\mathbf{u}}$, а $W \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ таково, что $V = \mathbf{s}^{-1}(W)$. По определению $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ имеем, что $W_0 \subset W$ для некоторого множества $W_0 \in \tau_{\mathbf{u}}$ со свойством $\mathbf{Y} \subset W_0$; см. § 2. С учетом непрерывности $\mathbf{r}$ имеем:

$$\mathbf{r}^{-1}(W_0) \in \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}), \quad (5.30)$$

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \subset \mathbf{r}^{-1}(W_0). \quad (5.31)$$

Это означает, что $\mathbf{r}^{-1}(W_0)$ есть открытая окрестность ν : выполнено (5.30) и в силу (5.31) $\nu \in \mathbf{r}^{-1}(W_0)$. Пусть $H_* \in N_{\tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})}(\nu)$, а $G_* \in \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})$ обладает свойствами $G_* \subset H_*$ и $\nu \in G_*$; см. [9, гл. I]. Тогда

$$G_0 \triangleq G_* \cap \mathbf{r}^{-1}(W_0) \in \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}) : \nu \in G_0. \quad (5.32)$$

Тогда, в частности, $G_0 \in N_{\tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})}(\nu)$. В силу (5.16) $G_0 \cap \mathbf{p}^1(\mathbf{U}) \neq \emptyset$. Пусть $\nu_0 \in G_0 \cap \mathbf{p}^1(\mathbf{U})$. В силу (5.32) $\mathbf{r}(\nu_0) \in W_0$. С другой стороны, $\nu_0 = \mathbf{p}(u_0)$ для некоторого управления $u_0 \in \mathbf{U}$, а тогда (см. (5.17)) $\mathbf{s}(u_0) = \mathbf{r}(\mathbf{p}(u_0)) = \mathbf{r}(\nu_0) \in W_0$ и, стало быть, $u_0 \in \mathbf{s}^{-1}(W)$. Тогда $u_0 \in V$ и $\nu_0 \in \mathbf{p}^1(V) \cap H_*$. Установили, что $\mathbf{p}^1(V) \cap T \neq \emptyset \quad \forall T \in N_{\tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})}(\nu)$. Поэтому $\nu \in \text{cl}(\mathbf{p}^1(V), \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}))$. Поскольку выбор V был произвольным, имеем из (5.29) включение $\nu \in (\text{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]$, чем и завершается обоснование вложения

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \subset (\text{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]. \quad (5.33)$$

Из (5.22), (5.28) и (5.33) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = (\text{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] = (\text{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1] = (\text{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_1]. \quad (5.34)$$

Из (5.21) и (5.34) следует также равенство $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = (\text{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]$; комбинируя последнее с (5.34), получаем требуемое утверждение. $\square$

Итак, $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})$ есть «универсальное» МП в пространстве обобщенных элементов (ОЭ).

§ 6. Конечномерная версия ограничений

В пределах данного параграфа полагаем, что $\mathbf{X} = \mathbb{R}^m$, где $m \in \mathcal{N}$. Кроме того, в настоящем параграфе предполагается, что $\tau_1 = \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}$, то есть

$$(\mathbf{X}, \tau_1) = (\mathbb{R}^m, \tau_{\mathbb{R}}^{(m)}) = (\mathbb{R}^m, \otimes^m[\tau_{\mathbb{R}}]) \quad (6.1)$$

(позднее мы вернемся к рассмотрению общего случая § 5). Имеем в (6.1) нормируемое и, в частности, метризуемое ТП. Условимся о некоторых обозначениях.

Если A — непустое множество, то через $(\text{Dist})[A]$ обозначаем множество всех метрик на A ; для $z \in A \times A$ через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первую и вторую компоненты z : $\text{pr}_1(z) \in A$, $\text{pr}_2(z) \in A$, $z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z))$. Полагаем для всякого непустого множества A , что $\text{diag}(A) \triangleq \{z \in A \times A \mid \text{pr}_1(z) = \text{pr}_2(z)\}$ и $\mathbf{d}_A^0 \in (\text{Dist})[A]$ (дискретная метрика A) такова, что

$$(\mathbf{d}_A^0(z) \triangleq 0 \quad \forall z \in \text{diag}(A)) \ \& \ (\mathbf{d}_A^0(z) \triangleq 1 \quad \forall z \in (A \times A) \setminus \text{diag}(A)).$$

Если A , B и C — множества, $g: A \times B \longrightarrow C$, $a \in A$ и $b \in B$, то (как обычно) $g(a, b) \triangleq g(z)$, где $z = (a, b)$.

Через $\mathbf{d}$, $\mathbf{d} \in (\text{Dist})[\mathbb{R}]$, обозначаем обычную $|\cdot|$ -метрику $\mathbb{R}$ ($\mathbf{d}(x, y) = |x - y|$ при $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$); кроме того, $\mathbf{d}_{\mathbb{R}}^0 \in (\text{Dist})[\mathbb{R}]$.

В целях построения $\tau_{\mathbf{u}}$ фиксируем множество $M \in \mathcal{P}(\overline{1, m})$: $M \subset \overline{1, m}$. Кортеж

$$(\rho_i)_{i \in \overline{1, m}}: \overline{1, m} \longrightarrow (\text{Dist})[\mathbb{R}] \quad (6.2)$$

определяем условиями: $(\rho_j \triangleq \mathbf{d}_{\mathbb{R}}^0 \quad \forall j \in M) \ \& \ (\rho_j \triangleq \mathbf{d} \quad \forall j \in \overline{1, m} \setminus M)$. В терминах (6.2) конструируем метрику $\rho \in (\text{Dist})[\mathbf{X}]$ по следующему правилу:

$$\rho((x_i)_{i \in \overline{1, m}}, (\tilde{x}_i)_{i \in \overline{1, m}}) \triangleq \max_{k \in \overline{1, m}} \rho_k(x_k, \tilde{x}_k) \quad \forall (x_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathbf{X} \quad \forall (\tilde{x}_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathbf{X} \quad (6.3)$$

(случай $M = \emptyset$ не исключается; при $M = \overline{1, m}$ в силу (6.3) имеем равенство $\rho = \mathbf{d}_{\mathbf{X}}^0$). Всюду в настоящем параграфе полагаем, что $\tau_{\mathbf{u}}$ — топология $\mathbf{X}$, порожденная метрикой ρ .

Пусть, кроме того, $\delta \in (\text{Dist})[\mathbf{X}]$ — обычная нормируемая метрика покоординатной сходимости: $\delta((x'_i)_{i \in \overline{1, m}}, (x''_i)_{i \in \overline{1, m}}) = \max_{i \in \overline{1, m}} |x'_i - x''_i| \quad \forall (x'_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathbf{X} \quad \forall (x''_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathbf{X}$. Если $d \in (\text{Dist})[\mathbf{X}]$

и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то $\mathbf{B}_d^0(x, \varepsilon) \triangleq \{y \in \mathbf{X} \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ (открытый шар в $(\mathbf{X}, d)$). В качестве d можно использовать δ и ρ . Если $(x_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathbf{X}$ и $\varepsilon \in]0, 1]$, то

$$\mathbf{B}_{\rho}^0((x_i)_{i \in \overline{1, m}}, \varepsilon) = \{(y_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathbf{X} \mid (x_j = y_j \quad \forall j \in M) \ \& \ (|x_j - y_j| < \varepsilon \quad \forall j \in \overline{1, m} \setminus M)\}. \quad (6.4)$$

Итак, топологии τ_1 и $\tau_{\mathbf{u}}$ порождены (в настоящем параграфе) метриками δ и ρ соответственно; ясно, что $\tau_1 \subset \tau_{\mathbf{u}}$, а рассматриваемый вариант триплета (5.10) есть БТП. Пусть до конца данного параграфа

$$\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\tau_1} \setminus \{\emptyset\}. \quad (6.5)$$

Если $d \in (\text{Dist})[\mathbf{X}]$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то полагаем, что

$$\mathfrak{B}_d^0(\mathbf{Y}, \varepsilon) \triangleq \bigcup_{y \in \mathbf{Y}} \mathbf{B}_d^0(y, \varepsilon).$$

Тем самым введена открытая ε -окрестность $\mathbf{Y}$ в метрическом пространстве $(\mathbf{X}, d)$. Полагаем в настоящем параграфе, что

$$\mathcal{Y}_1 \triangleq \{\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon) : \varepsilon \in]0, \infty[\}.$$

В силу (6.5) непременно выполнено свойство (5.12). Как и в общем случае, $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}} = \mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[\mathbf{Y}]$. С учетом (6.4) можно сказать, что у нас много окрестностей в сильнейшей из двух топологий и мало окрестностей в слабейшей из этих топологий; в этой связи заметим, что

$$\mathbf{B}_{\rho}^0(x, \varepsilon) \subset \mathbf{B}_{\delta}^0(x, \varepsilon) \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1].$$

Для введения требуемого варианта $\mathbf{s}$ введем предварительно следующее отображение:

$$(i, j) \longmapsto S_{i,j} : \overline{1, m} \times \overline{1, r} \longrightarrow B(I, \mathcal{L}), \quad (6.6)$$

в терминах которого как раз и будет определен оператор $\mathbf{s}$ § 5:

$$\mathbf{s}((f_j)_{j \in \overline{1, r}}) \triangleq \left(\sum_{j=1}^r \int_I S_{i,j} f_j d\eta \right)_{i \in \overline{1, m}} \quad \forall (f_j)_{j \in \overline{1, r}} \in \mathbf{U}. \quad (6.7)$$

Постулируем до конца настоящего параграфа, что

$$S_{i,j} \in B_0(I, \mathcal{L}) \quad \forall i \in M \quad \forall j \in \overline{1, r}. \quad (6.8)$$

Оператор $\mathbf{r} : \tilde{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathbf{X}$ определяем сейчас посредством интегрирования матрицанта (6.6) по векторной к.-а. мере:

$$\mathbf{r}((\mu_j)_{j \in \overline{1, r}}) \triangleq \left(\sum_{j=1}^r \int_I S_{i,j} d\mu_j \right)_{i \in \overline{1, m}} \quad \forall (\mu_j)_{j \in \overline{1, r}} \in \tilde{\mathbf{U}}. \quad (6.9)$$

Тогда (см. (6.7), (6.9)) по свойствам неопределенного интеграла [12, с. 70] имеем равенство (5.17) в его конкретной редакции: $\mathbf{s} = \mathbf{r} \circ \mathbf{p}$.

Предложение 4. *Отображение (6.9) универсально непрерывно:*

$$\mathbf{r} \in C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_1) \cap C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство $\mathbf{r} \in C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_1)$ вытекает из (6.9) и определения *-слабой топологии. Пусть $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi)$ есть направленность в $\tilde{\mathbf{U}}$, $\mu^* \in \tilde{\mathbf{U}}$ и при этом

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi) \xrightarrow{\tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L})} \mu^*. \quad (6.10)$$

При $d \in \mathbb{D}$ имеем: $\psi(d) : \overline{1, r} \longrightarrow (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. Кроме того, $\mu^* : \overline{1, r} \longrightarrow (\text{add})_+[\mathcal{L}]$. При этом в силу (5.8) и (6.10)

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi) \xrightarrow{\otimes^r [\tau_0^+(\mathcal{L})]} \mu^*. \quad (6.11)$$

Если $i \in \overline{1, r}$, то отображение $d \longmapsto \psi(d)(i) : \mathbb{D} \longrightarrow (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем через $\psi(\cdot)(i)$. Тогда из (6.11) вытекает, что

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi(\cdot)(i)) \xrightarrow{\tau_0^+(\mathcal{L})} \mu^*(i) \quad \forall i \in \overline{1, r}. \quad (6.12)$$

С учетом (3.2) и (6.12) получаем также свойства: $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi(\cdot)(i)) \xrightarrow{\tau_*^+(\mathcal{L})} \mu^*(i) \quad \forall i \in \overline{1, r}$. Итак, справедливы утверждения относительно *-слабой сходимости:

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi(\cdot)(i)) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \mu^*(i) \quad \forall i \in \overline{1, r}. \quad (6.13)$$

В силу (6.6) и (6.13)

$$\left(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \left(\sum_{j=1}^r \int_I S_{i,j} d\psi(\partial)(j) \right)_{\partial \in \mathbb{D}} \right) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \sum_{j=1}^r \int_I S_{i,j} d\mu^*(j) \quad \forall i \in \overline{1, m}. \quad (6.14)$$

Если $i \in \overline{1, m}$, то отображение $d \mapsto (\mathbf{r} \circ \psi)(d)(i) : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ обозначаем через $(\mathbf{r} \circ \psi)(\cdot)(i)$. Тогда из (6.9) и (6.14) вытекает, что

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, (\mathbf{r} \circ \psi)(\cdot)(i)) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} \mathbf{r}(\mu^*)(i) \quad \forall i \in \overline{1, m}. \quad (6.15)$$

Наконец, из (6.12) и определений § 3 вытекает, что $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi(\cdot)(j)) \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \mu^*(j) \quad \forall j \in \overline{1, r}$. Последнее означает, что

$$\forall j \in \overline{1, r} \quad \forall L \in \mathcal{L} \quad \exists d_1 \in \mathbb{D} \quad \forall d_2 \in \mathbb{D} \quad (d_1 \sqsubseteq d_2) \implies (\psi(d_2)(j)(L) = \mu^*(j)(L)).$$

Из (6.8) следует теперь, что $\forall i \in M \quad \exists d_1 \in \mathbb{D} \quad \forall d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \implies \left(\sum_{j=1}^r \int_I S_{i,j} d\psi(d_2)(j) = \sum_{j=1}^r \int_I S_{i,j} d\mu^*(j) \right). \quad (6.16)$$

Из (6.9) и (6.16) получаем очевидное следствие: $\exists d_1 \in \mathbb{D} \quad \forall d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \implies ((\mathbf{r} \circ \psi)(d_2)(i) = \mathbf{r}(\mu^*)(i) \quad \forall i \in M). \quad (6.17)$$

Рассмотрим (6.15) и (6.17) в естественной комбинации. Из (6.4) получаем: $\forall \varepsilon \in]0, 1] \quad \exists d_1 \in \mathbb{D} \quad \forall d_2 \in \mathbb{D}$

$$(d_1 \sqsubseteq d_2) \implies ((\mathbf{r} \circ \psi)(d_2) \in \mathbf{B}_\rho^0(\mathbf{r}(\mu^*), \varepsilon)). \quad (6.18)$$

С учетом (6.18) и определения $\tau_{\mathbf{u}}$ имеем при условии (6.10) свойство

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \mathbf{r} \circ \psi) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{u}}} \mathbf{r}(\mu^*). \quad (6.19)$$

Итак, (6.10) $\implies$ (6.19). Поскольку выбор $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi)$ и μ^* был произвольным, имеем [20, с. 47] требуемое свойство $\mathbf{r} \in C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^0(\mathcal{L}), \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}})$. $\square$

С учетом предложения 4 можно говорить о конкретном варианте построений § 5; следовательно, в рассматриваемом сейчас случае справедливо утверждение теорем 1, 3.

§ 7. Множества притяжения (общий случай)

Вернемся к общей постановке § 5, в рамках которой справедливы теоремы 1, 3. Всюду в настоящем параграфе фиксируем ТП

$$(\mathbf{H}, \tau); \quad (7.1)$$

буква τ используется далее только в смысле (7.1) и обозначает фиксированную топологию множества $\mathbf{H}$. Пусть

$$\mathbf{h} : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{H}. \quad (7.2)$$

Оператор (7.2) именуем целевым, а ТП (7.1) — пространством оценок (результатов) в смысле, оговоренном в [14, 21]. Рассматриваем МП

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_1], (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]. \quad (7.3)$$

Для построения МП (7.3) привлекаем процедуры [19], следуя при этом общим соглашениям § 5 в части определения семейств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}$, отвечающих (потенциально) вариантам ослабления $\mathbf{Y}$ -ограничения при заданном БТП (5.10). Полагаем, разумеется, что для заданного универсально непрерывного отображения $\mathbf{r}$ (см. § 5) выполнено равенство (5.17), где $\mathbf{p}$ — сужение оператора $\mathbb{P}$ на $\mathbf{U}$. Итак, справедливы теоремы 1, 3.

Полагаем, кроме того, до конца настоящего параграфа, что

$$\mathbf{q} \in C_{\mathbf{ap}}(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau) : \mathbf{h} = \mathbf{q} \circ \mathbf{p}. \quad (7.4)$$

Итак, у нас задан совершенный (в данном случае; см. [10, с. 287]) оператор $\mathbf{q}$ со значениями в ТП (7.1), реализующий представление $\mathbf{h}$ в виде суперпозиции с оператором погружения $\mathbf{p}$.

Теорема 4. *Справедлива следующая цепочка равенств, характеризующая МП (7.3):*

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) = (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_1] = (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}]. \quad (7.5)$$

Доказательство получается простой конкретизацией положений [6, 7, 8, 19, 22], где следует учитывать (2.3) и возможность сведения задачи, в которой $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, к случаю (2.3) путем замены семейства $\mathcal{E}$ семейством конечных пересечений множеств из $\mathcal{E}$; см. [14, с. 53]. В итоге

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = \mathbf{q}^1((\mathbf{as})[\tilde{\mathbf{U}}; \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}); \mathbf{p}; \mathcal{E}]) \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).$$

Данное свойство следует дополнить теоремой 3.

Итак, $\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))$ есть МП, универсальное в диапазоне «асимптотических ограничений», определяемых семействами $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_u$. Точнее, $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$(\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_u) \implies (\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) = (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}]).$$

Данное свойство получается непосредственной комбинацией теоремы 4 и определений § 2.

§ 8. Компактифицируемый случай

В настоящем параграфе предполагается, что множество $\mathbf{F}$, используемое в (5.1) и (5.2), компактно: всюду в дальнейшем

$$\mathbf{F} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(r)} - \text{comp})[\mathbb{R}^r]. \quad (8.1)$$

Следовательно (см. (8.1)), в дальнейшем $\mathbf{F}$ — непустой компакт в $(\mathbb{R}^r, \tau_{\mathbb{R}}^{(r)})$.

Кроме того, всюду в дальнейшем полагаем, что $(\mathbf{H}, \tau)$ — хаусдорфово ТП. Пусть, наконец, до конца статьи

$$\mathbf{q} \in C(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \mathbf{H}, \tau) : \mathbf{h} = \mathbf{q} \circ \mathbf{p}. \quad (8.2)$$

Из (8.2) имеем очевидное следствие (см. [10, § 3.7], [20, с.77], а также теорему 2): в рассматриваемом далее случае (см., в частности, (8.1), (8.2)) непременно выполнено (7.4), чем обеспечивается справедливость теоремы 4. Итак, имеем в виде итогового следствия свойство: всюду в дальнейшем справедливо (7.5).

Напомним, что согласно (8.1) и теореме 2 ТП $(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}))$ — непустой компакт. Итак, в данном параграфе имеем компактифицируемый случай абстрактной задачи о достижимости. Будем предполагать в дальнейшем, что

$$\mathcal{Y}_1 \in \beta[\mathbf{X}]; \quad (8.3)$$

свойство $\mathcal{Y}_u \in \beta[\mathbf{X}]$ следует из определений § 5. В связи с (8.3) отметим соотношение (3.4) в [14]. Разумеется, из определений § 5 вытекают включения

$$(\mathcal{E}_1 \in \beta[\mathbf{U}]) \ \& \ (\mathcal{E}_u \in \beta[\mathbf{U}]). \quad (8.4)$$

Это позволяет использовать положения [23] (см. также [20, § 3.6]). Теперь с учетом (7.5) и положений [23], вытекающих из следствия 3.1.5 монографии [10], имеем (см. также [20, § 3.6]) $\forall S \in \mathbb{N}_{\tau}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]$

$$(\exists P \in \mathcal{E}_1 : S \in \mathbb{N}_{\tau}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(Q), \tau)] \quad \forall Q \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{P}(P)) \ \& \\ \& \ (\exists \tilde{P} \in \mathcal{E}_u : S \in \mathbb{N}_{\tau}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\tilde{Q}), \tau)] \quad \forall \tilde{Q} \in \mathcal{E}_u \cap \mathcal{P}(\tilde{P})).$$

Из определения семейств (8.4) вытекает, что $\forall S \in \mathbb{N}_{\tau}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]$

$$(\exists A \in \mathcal{Y}_1 : \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(B)), \tau) \subset S \quad \forall B \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{P}(A)) \ \& \\ \& \ (\exists \tilde{A} \in \mathcal{Y}_u : \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\tilde{B})), \tau) \subset S \quad \forall \tilde{B} \in \mathcal{Y}_u \cap \mathcal{P}(\tilde{A})). \quad (8.5)$$

В (8.5) указана принципиальная возможность «окрестностной» реализации универсального (в диапазоне «асимптотических ограничений») МП (7.5): имеется в виду попадание замыканий множеств $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T))$, где T — окрестность $\mathbf{Y}$ соответствующего типа, в наперед заданную «вилку» с некоторого момента.

Компактифицируемая задача о достижимости в метрическом пространстве. Всюду в дальнейшем предполагается, что $(\mathbf{H}, \tau)$ — метризуемое ТП (усиливаем условия на $(\mathbf{H}, \tau)$). Пусть $\mathcal{D}$ — метрика $\mathbf{H}$, порождающая топологию τ ;

$$\mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0(z, \varepsilon) \triangleq \{\tilde{z} \in \mathbf{H} \mid \mathcal{D}(z, \tilde{z}) < \varepsilon\} \quad \forall z \in \mathbf{H} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

Тогда τ — семейство всех множеств $G \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ таких, что $\forall z \in G \exists \varepsilon \in]0, \infty[: \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0(z, \varepsilon) \subset G$. Если $T \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то

$$\mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[T; \varepsilon] = \bigcup_{z \in T} \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0(z, \varepsilon) \in \mathbb{N}_{\tau}[T] \cap \tau \quad (8.6)$$

есть открытая ε -окрестность множества T .

Напомним, что в силу непрерывности $\mathbf{r}$ имеем (см. замечание 5.1), что $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \in \mathcal{F}_{\tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L})}$. Как следствие, $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \in (\tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}) - \text{comp})[\tilde{\mathbf{U}}]$, а тогда в силу известного свойства непрерывных отображений

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \in (\tau - \text{comp})[\mathbf{H}]. \quad (8.7)$$

Полезно отметить также и то, что

$$\mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}}) \in (\tau - \text{comp})[\mathbf{H}] \setminus \{\emptyset\}. \quad (8.8)$$

Если же $L \in \mathcal{P}(\mathbf{U})$, то, как легко видеть, $\mathbf{h}^1(L) \subset \mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}})$, а потому

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(L), \tau) \subset \mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}}). \quad (8.9)$$

В связи с (8.8) полагаем, что $\tilde{\tau} \triangleq \tau|_{\mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}})}$, получая непустой компакт

$$(\mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}}), \tilde{\tau}). \quad (8.10)$$

С учетом (8.9), компактности ТП (8.10) и свойства транзитивности операции перехода к подпространству имеем, что

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(L), \tau) \in (\tau - \text{comp})[\mathbf{H}] \quad \forall L \in \mathcal{P}(\mathbf{U}). \quad (8.11)$$

Из (8.11) следует, что

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) \in (\tau - \text{comp})[\mathbf{H}]$$

при $T \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$; с учетом (5.13) имеем, что

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\tilde{T})), \tau) \in (\tau - \text{comp})[\mathbf{H}]$$

при $\tilde{T} \in \mathcal{Y}_1$. Используя (2.3), (8.4) и определения § 5, получаем, что

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) \quad \forall T \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}. \quad (8.12)$$

В связи с (8.12) полезно учесть свойство (5.13). Рассмотрим отдельно следующие два возможных случая: 1') $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = \emptyset$; 2') $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \neq \emptyset$.

1') Пусть $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = \emptyset$. Тогда (см. (2.3), (8.4)) в силу теоремы 4 пересечение всех множеств $\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau)$, $T \in \mathcal{Y}_1$, пусто. Введем в рассмотрение семейство

$$\mathcal{T} \triangleq \{\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) : T \in \mathcal{Y}_1\} \quad (8.13)$$

с пустым пересечением всех своих множеств. С учетом (8.3) и (8.13) проверяется [20, с. 37], что

$$\forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{T}) \exists W \in \mathcal{T} : W \subset \bigcap_{T \in \mathcal{K}} T. \quad (8.14)$$

С учетом (8.9) имеем, что $T \subset \mathbf{q}^1(\tilde{\mathbf{U}}) \quad \forall T \in \mathcal{T}$. Наконец, все множества из $\mathcal{T}$ замкнуты в компакте (8.10). Поэтому с учетом пустоты пересечения всех множеств из $\mathcal{T}$ (8.13) и свойства (8.14) имеем, что $\exists T \in \mathcal{Y}_1 : \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) = \emptyset$. Из этого свойства вытекает с очевидностью, что $\exists T \in \mathcal{Y}_1 : \mathbf{s}^{-1}(T) = \emptyset$. С учетом (5.13) имеем также, что $\exists \tilde{T} \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}} : \mathbf{s}^{-1}(\tilde{T}) = \emptyset$. Итак, при $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = \emptyset$ имеем свойство несовместности некоторых ослабленных версий $\mathbf{Y}$ -ограничения. Сейчас отметим только импликацию $(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) = \emptyset) \implies (\exists T \in \mathcal{Y}_1 : \mathbf{s}^{-1}(T) = \emptyset)$.

2') Всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \neq \emptyset$. Как следствие, имеем

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \neq \emptyset. \quad (8.15)$$

Пусть $\mathcal{C} \triangleq (\tau - \text{comp})[\mathbf{H}] \setminus \{\emptyset\}$ ($\mathcal{C}$ — семейство всех непустых компактных п/м $\mathbf{H}$). С учетом (8.7) и (8.15)

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \in \mathcal{C}. \quad (8.16)$$

С учетом (8.11) и (8.12) имеем теперь, что

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) \in \mathcal{C} \quad \forall T \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}. \quad (8.17)$$

Из (5.13) и (8.17) вытекает, в частности, следующее свойство:

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) \in \mathcal{C} \quad \forall T \in \mathcal{Y}_1. \quad (8.18)$$

Через $\mathbf{B}[\mathcal{D}]$ обозначаем семейство всех множеств $\mathbf{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{H})$, для каждого из которых

$$\exists z \in \mathbf{H} \exists a \in]0, \infty[: \mathbf{G} \subset \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0(z, a).$$

Тогда $\mathbf{B}_{\mathcal{F}}[\mathcal{D}] \triangleq \mathbf{B}[\mathcal{D}] \cap \mathcal{F}_{\tau}$ есть семейство всех непустых, ограниченных и замкнутых п/м $\mathbf{H}$, причем $\mathcal{C} \subset \mathbf{B}_{\mathcal{F}}[\mathcal{D}]$. Если $\mathbf{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{H})$, то

$$(\mathcal{D} - \inf)[z; \mathbf{G}] \triangleq \inf(\{\mathcal{D}(z, \tilde{z}) : \tilde{z} \in \mathbf{G}\}) \in [0, \infty[\quad \forall z \in \mathbf{H}. \quad (8.19)$$

В частности, (8.19) определено при $\mathbf{G} \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$. Если $A \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$ и $B \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$, то

$$\exists c \in [0, \infty[: \{(\mathcal{D} - \inf)[z; A] : z \in B\} \in \mathcal{P}'([0, c]);$$

в силу этого очевидного свойства определено значение $\sup_{z \in B} (\mathcal{D} - \inf)[z; A] \in [0, \infty[$. Пусть отображение $\mathfrak{D} : \mathbf{B}[\mathcal{D}] \times \mathbf{B}[\mathcal{D}] \longrightarrow [0, \infty[$ определено условием

$$\mathfrak{D}(P, Q) \triangleq \sup_{z \in P} \{ \sup_{z \in Q} (\mathcal{D} - \inf)[z; Q]; \sup_{z \in Q} (\mathcal{D} - \inf)[z; P] \} \quad \forall P \in \mathbf{B}[\mathcal{D}] \quad \forall Q \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]. \quad (8.20)$$

Тогда сужение $\mathfrak{D}_{\mathcal{F}} \triangleq (\mathfrak{D}|_{\mathbf{B}_{\mathcal{F}}[\mathcal{D}] \times \mathbf{B}_{\mathcal{F}}[\mathcal{D}]})$ отображения $\mathfrak{D}$ есть «обычная» метрика Хаусдорфа [10, с. 441], порожденная метрикой $\mathcal{D}$. В частности, $\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(P, Q) \in [0, \infty[$, $P \in \mathcal{C}$, $Q \in \mathcal{C}$.

Рассмотрим непустое множество $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$; если $\theta \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$, то через $\text{pr}_1(\theta)$ и $\text{pr}_2(\theta)$ обозначаем соответственно первую и вторую компоненты упорядоченной пары $\theta : \text{pr}_1(\theta) \in \mathcal{Y}_1$, $\text{pr}_2(\theta) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$, $\theta = (\text{pr}_1(\theta), \text{pr}_2(\theta))$. На $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ определяем бинарное отношение $\ll$ посредством условия: $\forall a \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}} \forall b \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$

$$(a \ll b) \stackrel{\text{def}}{\iff} ((\text{pr}_1(b) \subset \text{pr}_1(a)) \& (\text{pr}_2(b) \subset \text{pr}_2(a))).$$

Тогда $\ll$ — направление [11, гл. 2] на $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$, а пара $(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}, \ll)$ есть непустое НМ.

Теорема 5. *Имеет место следующее свойство асимптотической нечувствительности в окрестностной реализации: $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\exists a \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}} \forall b \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$*

$$(a \ll b) \implies (\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\text{pr}_1(b))), \tau), \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\text{pr}_2(b))), \tau)) < \varepsilon). \quad (8.21)$$

Доказательство. Пусть $\kappa \in]0, \infty[$. Тогда согласно (8.6) имеем свойство

$$\mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\kappa}{4}] \in \mathbb{N}_{\tau}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]. \quad (8.22)$$

В силу (8.5) и (8.22) имеем для некоторого множества $\Lambda \in \mathcal{Y}_1$ свойство

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(B)), \tau) \subset \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\kappa}{4}] \quad \forall B \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{P}(\Lambda). \quad (8.23)$$

Кроме того, имеем в силу (8.5) для некоторого $\Gamma \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(B)), \tau) \subset \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\kappa}{4}] \quad \forall B \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{P}(\Gamma). \quad (8.24)$$

Тогда $\zeta \triangleq (\Lambda, \Gamma) \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$, $\text{pr}_1(\zeta) = \Lambda$ и $\text{pr}_2(\zeta) = \Gamma$. Выберем произвольно $\theta \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ со свойством $\zeta \ll \theta$. Тогда

$$(\Theta_1 \triangleq \text{pr}_1(\theta) \in \mathcal{Y}_1) \ \& \ (\Theta_2 \triangleq \text{pr}_2(\theta) \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}})$$

обладают следующими свойствами: $(\Theta_1 \subset \Lambda) \ \& \ (\Theta_2 \subset \Gamma)$; см. определение $\ll$. Поэтому $\Theta_1 \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{P}(\Lambda)$ и $\Theta_2 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{P}(\Gamma)$. Из (8.23) и (8.24) получаем поэтому две цепочки вложений:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau) \subset \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\kappa}{4}], \quad (8.25)$$

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau) \subset \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\kappa}{4}]. \quad (8.26)$$

В силу включений (8.17), (8.18) имеем очевидные включения $(\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau) \in \mathcal{C})$ и $(\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau) \in \mathcal{C})$. Как следствие, имеем, что при $z \in \mathbf{H}$ определены три значения:

$$(\mathcal{D} - \inf)[z; \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau)] \in [0, \infty[, \quad (\mathcal{D} - \inf)[z; \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau)] \in [0, \infty[, \quad (\mathcal{D} - \inf)[z; \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))] \in [0, \infty[;$$

если $z \in \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))$, то каждое из этих значений равно 0. Из (8.6) и (8.25) вытекает, что

$$\forall z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau) \ \exists \tilde{z} \in \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) : \mathcal{D}(z, \tilde{z}) < \frac{\kappa}{4}; \quad (8.27)$$

аналогичным образом из (8.6) и (8.26) получаем, что

$$\forall z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau) \ \exists \tilde{z} \in \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) : \mathcal{D}(z, \tilde{z}) < \frac{\kappa}{4}. \quad (8.28)$$

Согласно (8.16) и (8.18) имеем по выбору θ , что $\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau) \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$, а тогда множество

$$\{(\mathcal{D} - \inf)[z; \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))] : z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau)\}$$

непусто и ограничено, а потому определено значение

$$\alpha_1 \triangleq \sup_{z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau)} (\mathcal{D} - \inf)[z; \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))] \in [0, \infty[;$$

аналогичным образом из (8.16), (8.17) следует, что $\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau) \in \mathbf{B}[\mathcal{D}]$ и, следовательно, множество $\{(\mathcal{D} - \inf)[z; \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))] : z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau)\}$ непусто и ограничено, а тогда определено значение

$$\alpha_2 \triangleq \sup_{z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau)} (\mathcal{D} - \inf)[z; \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))] \in [0, \infty[.$$

Легко видеть (см. (8.19), (8.27), (8.28)), что справедливы неравенства

$$\left(\alpha_1 \leq \frac{\kappa}{4}\right) \& \left(\alpha_2 \leq \frac{\kappa}{4}\right). \quad (8.29)$$

Учитывая (5.13), (8.12), (8.20) и (8.29), получаем следующие неравенства:

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau), \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))) \leq \frac{\kappa}{4}, \quad \mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})), \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau)) \leq \frac{\kappa}{4}.$$

Используя (для $\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}$) неравенство треугольника, получаем, что

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_1)), \tau), \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\Theta_2)), \tau)) \leq \frac{\kappa}{2} < \kappa.$$

Тем самым установлена импликация (учитывая определение Θ_1 и Θ_2)

$$(\zeta \ll \theta) \implies (\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\text{pr}_1(\theta))), \tau), \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\text{pr}_2(\theta))), \tau)) < \kappa). \quad (8.30)$$

Поскольку выбор θ был произвольным, имеем из (8.30), что $\forall b \in \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$

$$(\zeta \ll b) \implies (\mathfrak{D}_{\mathcal{F}}(\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\text{pr}_1(b))), \tau), \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\text{pr}_2(b))), \tau)) < \kappa).$$

Коль скоро и выбор числа κ был произвольным, требуемое утверждение полностью доказано.

Частный случай. Теорема 5 доставляет целый ряд полезных следствий; в этой связи см., в частности, [8, с. 109, 110]. Сейчас ограничимся простейшим вариантом, обращаясь к построениям § 6. Всюду в дальнейшем полагаем выполненным (6.1), следуем соглашениям § 6 относительно множества M , а также метрик $\rho \in (\text{Dist})[\mathbf{X}]$, $\delta \in (\text{Dist})[\mathbf{X}]$ и множества $\mathbf{Y}$ (6.5). Далее оператор $\mathbf{s}$ определяем посредством (6.6), (6.7), постулируя (6.8); оператор $\mathbf{r}$ понимается ниже в смысле (6.9), чем гарантируется равенство $\mathbf{s} = \mathbf{r} \circ \mathbf{p}$ и справедливость предложения 4. Как отмечалось в § 6, $\mathcal{Y}_1$ определяется в виде семейства всех множеств $\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon)$, $\varepsilon \in]0, \infty[$, чем обеспечивается справедливость (5.12).

Итак, в дальнейшем БТП (5.10) — суть $\mathbb{R}^m$ с парой метризуемых топологий. В отношении $(\mathbf{H}, \tau)$ сохраняем прежнее предположение о метризуемости посредством $\mathcal{D}$. Сохраняем предположение о том, что $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \neq \emptyset$. Следовательно, справедлива теорема 5.

Рассмотрим семейство $\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}$ всех множеств $\mathfrak{B}_{\rho}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon)$, $\varepsilon \in]0, \infty[$. Тогда $\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} \in \mathcal{P}'(\mathcal{Y}_{\mathbf{u}})$. Как следствие, для $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}} \triangleq \mathbf{s}^{-1}[\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{U}))$

$$(\text{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_{\mathbf{u}}] \subset (\text{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}}]; \quad (8.31)$$

см. определения § 2 (мы учли, что $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}} = \mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[\mathbf{Y}]$). При этом $\tilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} \in \beta[\mathbf{X}]$ и, как следствие, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}} \in \beta[\mathbf{U}]$. Это свойство позволяет использовать нужный вариант (2.3). Далее, из (6.4) вытекает, что

$$\mathfrak{B}_{\rho}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon) \subset \mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1].$$

Поэтому имеем с очевидностью свойство:

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\rho}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1].$$

Как следствие, имеем при всяком $\kappa \in]0, 1]$, что

$$\begin{aligned} (\text{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}}] &= \bigcap_{T \in \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}}} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) = \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\rho}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) \subset \\ &\subset \bigcap_{\varepsilon \in]0, 1]} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\rho}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau) \end{aligned} \quad (8.32)$$

Поскольку выбор κ был произвольным, установлено вложение

$$(\text{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}}] \subset \bigcap_{\varepsilon \in]0, 1]} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau).$$

Заметим теперь, что при $\varepsilon_* \in]0, \infty[$ для $\bar{\varepsilon}_* \triangleq \inf(\{\varepsilon_*; 1\}) \in]0, 1]$ имеет место цепочка вложений

$$\begin{aligned} (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}}] &\subset \bigcap_{\varepsilon \in]0, 1]} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) \subset \\ &\subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \bar{\varepsilon}_*))), \tau) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon_*))), \tau), \end{aligned} \quad (8.33)$$

поскольку $\bar{\varepsilon}_* \leq \varepsilon_*$. Коль скоро ε_* в (8.33) выбиралось произвольно, то (см. (2.3))

$$\begin{aligned} (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}}] &\subset \bigcap_{\varepsilon \in]0, \infty[} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))), \tau) = \bigcap_{T \in \mathcal{Y}_1} \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(T)), \tau) = \\ &= \bigcap_{L \in \mathcal{E}_1} \text{cl}(\mathbf{h}^1(L), \tau) = (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}_1]. \end{aligned}$$

С учетом теоремы 4 (см. (7.5)) имеем теперь вложение

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}}] \subset \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})). \quad (8.34)$$

Наконец, из (7.5) и (8.31) вытекает вложение $\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}}]$, которое в сочетании с (8.34) доставляет равенство

$$(\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}}] = \mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})). \quad (8.35)$$

Напомним (8.1), учитывая, что $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}} \in \beta[\mathbf{U}]$. В связи с (8.35) используем положения [23] (см. также [20, § 3.6]), компактность ТП $(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\tau}_r^*(\mathcal{L}))$ и отделимость ТП $(\mathbf{H}, \tau)$. Тогда имеем, что

$$\forall T \in \mathbb{N}_{\tau}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))] \exists P \in \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}} : T \in \mathbb{N}_{\tau}[\text{cl}(\mathbf{h}^1(Q), \tau)] \quad \forall Q \in \tilde{\mathcal{E}}_{\mathbf{u}} \cap \mathcal{P}(P). \quad (8.36)$$

В связи с (8.36) см., например, [20, с. 124].

Теорема 6. $\forall \alpha \in]0, \infty[\exists \beta \in]0, 1] \forall \varepsilon \in]0, \beta]$

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\rho}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))) \subset \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\rho}^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))); \alpha].$$

Доказательство. Фиксируем $\alpha \in]0, \infty[$. Тогда в силу (8.6)

$$\mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\alpha}{2}] \in \mathbb{N}_{\tau}[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))]. \quad (8.37)$$

С учетом (8.5) и (8.37) подберем множество $\Sigma \in \mathcal{Y}_1$ такое, что

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(B)), \tau) \subset \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\alpha}{2}] \quad \forall B \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{P}(\Sigma). \quad (8.38)$$

Подберем $\tilde{\sigma} \in]0, \infty[$ со свойством $\Sigma = \mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \tilde{\sigma})$. Тогда $\sigma \triangleq \inf(\{\tilde{\sigma}; 1\}) \in]0, 1]$ и при этом $\sigma \leq \tilde{\sigma}$. Поэтому

$$\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \sigma) \subset \Sigma. \quad (8.39)$$

В итоге $\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \sigma) \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{P}(\Sigma)$ (см. (8.39)), а потому из (8.38) имеем следующую цепочку вложений:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \sigma))), \tau) \subset \mathbb{B}_{\mathcal{D}}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\alpha}{2}]. \quad (8.40)$$

Выберем произвольно $\kappa \in]0, \sigma]$. Тогда $\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \kappa) \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{P}(\Sigma)$, т.к. $\kappa \leq \sigma \leq \tilde{\sigma}$. Поэтому (см. (8.38)) имеем, в частности, вложение

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau). \quad (8.41)$$

Кроме того, по выбору κ имеем следующее вложение:

$$\mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \kappa) \subset \mathfrak{B}_{\delta}^0(\mathbf{Y}, \sigma).$$

С учетом изотонности операций замыкания, взятия образа и прообраза

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \sigma))), \tau).$$

В итоге (см. (8.40), (8.41)) получаем следующую цепочку вложений:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau) \subset \mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\alpha}{2}]. \quad (8.42)$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa)$, для которого $\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa) \subset \mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \kappa)$;

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \kappa))). \quad (8.43)$$

Из (8.32), (8.35) вытекает очевидное вложение

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau).$$

Тогда (см. (8.6)) имеем, в частности, следующее вложение:

$$\mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})); \frac{\alpha}{2}] \subset \mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau); \frac{\alpha}{2}]. \quad (8.44)$$

Из (8.42), (8.44) получаем, что справедливо

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau) \subset \mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau); \frac{\alpha}{2}].$$

Тем более справедливо следующее вложение:

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \kappa))) \subset \mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau); \frac{\alpha}{2}]. \quad (8.45)$$

Напомним теперь, что согласно (8.6) справедливы равенства

$$\mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))); \alpha] = \bigcup_{z \in \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa)))} \mathbb{B}_\mathcal{D}^0(z, \alpha), \quad (8.46)$$

$$\mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau); \frac{\alpha}{2}] = \bigcup_{z \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau)} \mathbb{B}_\mathcal{D}^0(z, \frac{\alpha}{2}). \quad (8.47)$$

Выберем произвольно $z_* \in \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \kappa)))$. Тогда (см. (8.45)), в частности,

$$z_* \in \mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau); \frac{\alpha}{2}].$$

С учетом (8.47) подберем точку $z^* \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))), \tau)$, для которой

$$z_* \in \mathbb{B}_\mathcal{D}^0(z^*, \frac{\alpha}{2}).$$

Это означает, что $z^* \in \mathbf{H}$ и $z_* \in \mathbf{H}$ связаны условием

$$\mathcal{D}(z_*, z^*) = \mathcal{D}(z^*, z_*) < \frac{\alpha}{2}. \quad (8.48)$$

По выбору z^* имеем очевидное свойство

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))) \cap T \neq \emptyset \quad \forall T \in N_\tau(z^*). \quad (8.49)$$

В частности, из (8.49) следует, конечно, что

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))) \cap \mathbb{B}_\mathcal{D}^0(z^*, \frac{\alpha}{2}) \neq \emptyset. \quad (8.50)$$

Пусть (см. (8.50)) $y^* \in \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))) \cap \mathbb{B}_\mathcal{D}^0(z^*, \frac{\alpha}{2})$. Тогда

$$\mathcal{D}(z^*, y^*) < \frac{\alpha}{2}. \quad (8.51)$$

Из (8.48) и (8.51) имеем по неравенству треугольника, что $\mathcal{D}(z_*, y^*) < \alpha$, т. е. $z_* \in \mathbb{B}_\mathcal{D}^0(y^*, \alpha)$. С учетом (8.46) имеем, в частности, включение

$$z_* \in \mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))); \alpha].$$

Поскольку выбор z_* был произвольным, установлено вложение

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \kappa))) \subset \mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))); \alpha].$$

С учетом (8.43) получаем теперь цепочку вложений

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \kappa))) \subset \mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \kappa))); \alpha]. \quad (8.52)$$

Поскольку выбор κ был произвольным, из (8.52) следует, что $\forall \varepsilon \in]0, \sigma]$

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\delta^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))) \subset \mathbb{B}_\mathcal{D}^0[\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{B}_\rho^0(\mathbf{Y}, \varepsilon))); \alpha]. \quad (8.53)$$

Поскольку $\sigma \in]0, 1]$, то из (8.53) следует, что существует число $\beta \in]0, 1]$ такое, что при всяком $\varepsilon \in]0, \beta]$ истинно (8.53). Коль скоро выбор $\alpha > 0$ был произвольным. $\square$

Замечание 2. Отметим, что задача управления, намеченная в §1, может рассматриваться как вариант только что рассмотренной постановки. Полагаем для простоты, что в (1.1) все компоненты матрицы $A(t)$ равны нулю при всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$ (в противном случае следует воспользоваться неособым линейным преобразованием [5, с.160]). Итак, речь пойдет о дифференциальной системе $\dot{x}(t) = B(t)f(t)$. Сохраняем в отношении $B(\cdot)$, $S(\cdot)$ и Y все предположения §1. Обозначения I и I_0 понимаем далее в согласии с §1. В качестве $\mathcal{L}$ используем далее обычную полуалгебру пространства-стрелки: $\mathcal{L}$ определяется как семейство всех полуинтервалов $[a, b[$, $a \in I_0$, $b \in I_0$. Итак, в данном случае $(I, \mathcal{L})$ — пространство-стрелка. Пусть η — обычная функция длины: $\eta(\emptyset) = 0$, $\eta(L) = \sup(L) - \inf(L) \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$. Разумеется, η может рассматриваться как след меры Лебега. Отметим, кстати, что в данном примере $(\text{add})^+[\mathcal{L}; \eta] = (\text{add})_+[\mathcal{L}]$; см. [12, с.89]. Полагаем, что множество U §1 совпадает с множеством (5.1): $U = \mathbf{U}$. Пусть $\mathbf{H} = \mathbb{R}^n$ (см. §1). Сохраняем обозначение φ_u для траектории системы, порожденной управлением $u \in \mathbf{U}$. Определяем $\mathbf{h}$ в виде правила

$$u \longmapsto \varphi_u(\vartheta_0) : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{H}.$$

В нашем конкретном случае данное правило имеет вид

$$u \longmapsto x_0 + \int_I B(t)f(t)\eta(dt) : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{H},$$

где интеграл определяется покомпонентно. Если же следовать символике, принятой в основной части работы, то при $(u_j)_{j \in \overline{1, r}} \in \mathbf{U}$

$$\mathbf{h}((u_j)_{j \in \overline{1, r}}) = (x_0(i) + \sum_{j=1}^r \int_I B_{i,j} u_j d\eta)_{i \in \overline{1, n}}.$$

Здесь $B_{i,j}$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, r}$, — компоненты матрицанта B , являющиеся (см. §1) равномерными пределами к.-п. и н. спр. в/з функций на I . Аналогичным образом (см. (6.7)) определяется оператор $\mathbf{s}$. Разумеется, само $\mathbf{Y}$ -ограничение имеет при этом смысл условия (1.2), где $\mathbf{Y} = Y$ и S согласовано с (6.7), (6.8).

Определяем $\mathcal{D}$ подобно δ в § 6 (следует только заменить m на $\mathbf{n}$). В отношении БТП $(\mathbf{X}, \tau, \tau_{\mathbf{u}})$, операторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{r}$, а также семейств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_{\mathbf{u}}$ следуем соглашениям § 6.

Итак, мы располагаем весьма содержательным вариантом основной задачи (его можно было бы усложнить, привлекая, как и в [19], непрерывное преобразование вектора $\mathbf{h}(u) \in \mathbf{H}$ в точку $\mathbb{R}^l$ при некотором $l \in \mathcal{N}$ и заменяя исходный оператор $\mathbf{h}$ его суперпозицией с этим преобразованием; при этом, конечно, «совокупная система» будет, вообще говоря, нелинейной).

В связи с расширением задачи отметим, что множество $\tilde{\mathbf{U}}$ имеет смысл множества обобщенных управлений; если $\mu = (\mu_j)_{j \in \overline{1, r}} \in \tilde{\mathbf{U}}$, то траектория $\tilde{\varphi}_\mu$ определяется в виде

$$t \mapsto (x_0(i) + \sum_{j=1}^r \int_{[t_0, t]} B_{i,j} d\mu_j)_{i \in \overline{1, \mathbf{n}}} : I_0 \longrightarrow \mathbf{H}.$$

В этой связи уместно принять соглашение: оператор $\mathbf{q}$ есть правило

$$\mu \mapsto \tilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0) : \tilde{\mathbf{U}} \longrightarrow \mathbf{H}.$$

Отображение $\mathbf{r}$ определяем посредством (6.9). Тогда $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})$ можно рассматривать как множество допустимых обобщенных управлений (ОУ), а $\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}))$ — как ОД в классе ОУ:

$$\mathbf{q}^1(\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})) = \{\tilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0) : \mu \in \mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y})\}.$$

Ограничимся сейчас обсуждением случая, когда $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{Y}) \neq \emptyset$ и выполнено (8.1); последнее соответствует естественному в теории управления случаю ресурсно ограниченной задачи (в связи с общим случаем множества (5.1) напомним построения [8, гл. 4], где рассматривались классы задач, в которых выполнено условие (7.4)). В данном случае наиболее наглядно проявляется себя свойство асимптотической нечувствительности, отмеченное в теореме 6. Здесь оно конкретизируется в виде свойства ОД исходной системы, имеющего и определенное практическое значение. В теореме 6 не используется каких-либо сведений относительно ОУ; существенно лишь условие (6.8), формулируемое в терминах исходной задачи (без элементов расширения) и по этой причине допускающее непосредственную проверку; об условиях такого рода см., в частности, в [8, 12, 17, 22]. В то же время обоснование теоремы существенно использует аппарат ОУ, формализуемых в данном случае в классе векторных к.-а. мер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.
3. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1977. — 252 с.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 475 с.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
6. Ченцов А. Г. К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями // Известия РАН. Серия Матем. — 1999. — Т. 63. — С. 185–223.
7. Ченцов А. Г. Векторные конечно-аддитивные меры и вопросы регуляризации задачи о построении множеств асимптотической достижимости. // Труды Института математики и механики. — Т. 4. — Екатеринбург: УрО РАН, 1996. — С. 266–295.
8. Chentsov A. G. Asymptotic attainability. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 322 p.
9. Бурбаки Н. Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 272 с.
10. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 751 с.
11. Келли Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 431 с.
12. Chentsov A. G. Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. — New York, London and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.

13. Ченцов А. Г. Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна-Чеха // Современная математика и ее приложения. — Академия наук Грузии, Институт кибернетики, 2005. — Т. 26 — С. 119–150.
14. Ченцов А. Г. Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах управления // Труды Международного семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби». Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2006. — Т. 1. — С. 48–60.
15. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 309 с.
16. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд. ин. лит., 1962. — 895 с.
17. Ченцов А. Г. Асимптотически достижимые элементы и их обобщенное представление в классе конечно-аддитивных мер // Труды Института математики и механики УрО РАН. — Екатеринбург, 1995. — Т. 3. — С. 211–244.
18. Bhaskara Rao K. P. S., Bhaskara Rao M. Theory of charges. A study of finitely additive measures. — New York: Acad. Press, 1983. — 253 p.
19. Ченцов А. Г. К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Известия ВУЗов. Математика. — 2002. — С. 58–80.
20. Chentsov A. G. and Morina S. I. Extensions and Relaxations. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 408 с.
21. Ченцов А. Г. Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики. — Екатеринбург: УрО РАН, 2006. — Т. 12. — С. 216–241.
22. Chentsov A. G. Finitely Additive Measures and Extension Constructions // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. — 2001. — II. — P. 531–545.
23. Ченцов А. Г. Топологические конструкции расширений и представления множеств притяжения // Труды Института математики и механики. — Екатеринбург: УрО РАН, 2000. — Т. 9. — С. 269–301.

Поступила в редакцию 15.09.08

A. G. Chentsov

Extensions in the class of finitely additive measures and conditions of asymptotic non-sensitivity under a weakening of the part of constraints.

For an abstract problem of control, the extension construction in the class of finitely additive measures is considered. Conditions of asymptotic non-sensitivity of the attainable set under a weakening of the part of constraints are investigated.

Keywords: extension, finitely additive measure, asymptotic non-sensitivity.

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом оптимального управления, Институт математики и механики УрО РАН, 620219 Россия, ГСП-384, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: chentsov@imm.uran.ru