D. N. Spichkin, About solutions of the difference equations of the second order on final intervals, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 2, 142–143

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 54.197.130.99
April 26, 2023, 14:49:24

УДК 517.929.2

© Д. Н. Спичкин

О РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

Приведены решения линейного m -разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, заданного на конечном интервале.

Ключевые слова: функции Виленкина–Крестенсона, m -разностные уравнения.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ — n -разрядные m -ичные представления неотрицательных целых чисел. Под операцией $x \ominus_m p$ понимаем поразрядную разность по модулю m . Решениями m -разностного уравнения второго порядка

$$y(x \ominus_m 2) + k_1 y(x \ominus_m 1) + k_2 y(x) = 0, \quad x \in [0, m^n) \cap \mathbf{N}_0 \quad (1)$$

являются функции Виленкина–Крестенсона (ВКФ) [1]:

$$Pal(p, x) = \exp \left(i \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^n p_{n+1-j} x_j \right), \quad (2)$$

где x — аргумент, p — некоторый параметр, причем обе величины заданы n -разрядным m -ичным представлением. Известно [1], что при решении таких уравнений часть разрядов параметра p фиксируется, а часть остается произвольной.

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) коэффициенты k_i , $i = 1, 2$ — постоянные и вещественные и пусть $k_2 \leq \frac{k_1^2}{4}$. Тогда только в трех случаях существует решение вида (2):

а) при $k_1 = 0$, $k_2 = -1$ существует 2 линейно независимых решения при $p_1 = 0$ или $p_1 = \frac{m}{2}$;

б) при $k_1 = -2$, $k_2 = 1$ существует только одно значение параметра $p_1 = 0$, дающее решение уравнения (1);

в) при $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ существует только одно значение параметра $p_1 = \frac{m}{2}$, дающее решение уравнения (1).

Рассмотрим систему линейных m -разностных уравнений

$$y(x \ominus 1) = Ay(x) \quad (3)$$

с постоянной вещественной квадратной матрицей A .

Теорема 2. Если матрица A имеет собственное число $\lambda = -1$ кратности 2, которому соответствует один собственный вектор h^0 и один присоединенный вектор h^1 , то при $x_n \geq 1$ существуют два линейно независимых решения системы (3):

$$y_1(x) = h^0 Pal(p, x) \quad \text{и} \quad y_2(x) = (xh^0 + h^1) Pal(p, x),$$

где $Pal(p, x)$ — функция вида (2), являющаяся решением скалярного уравнения $\alpha(x \ominus 1) + \alpha(x) = 0$.

Следствие 1. Пусть $m > 2$. Уравнение (1) при $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $x_n \geq 2$ имеет два линейно независимых решения в базисе ВКФ:

$$y_1(x) = (-1)^{x_n} \exp \left(i \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^{n-1} p_{n+1-j} x_j \right),$$

$$y_2(x) = (-1)^{x_n} (x + 1) \exp \left(i \frac{2\pi}{m} \sum_{j=1}^{n-1} p_{n+1-j} x_j \right).$$

* * *

1. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 239 с.

Поступила в редакцию 08.02.08

D. N. Spichkin

About solutions of the difference equations of the second order on final intervals

Solutions are given of the linear m -difference equations of the second order on final intervals with constant coefficients.

Спичкин Дмитрий Николаевич
Ижевский государственный
технический университет
426069, Россия, г. Ижевск,
ул. Студенческая, 7 (корп. 6)
E-mail: dspich@mail.ru