I. M. Tsoun, Solutions and mathematical modeling of Stefan's dynamical problem for a thermally thin cylinder, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 2, 184–185

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 3.95.254.165
April 26, 2023, 18:21:28

УДК 536.421.4:532.781

© И. М. Цун

РЕШЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ДЛЯ ТЕРМИЧЕСКИ ТОНКОГО ЦИЛИНДРА

Сравниваются последствия двух допущений о форме фронта кристаллизации термически тонкого цилиндра.

Ключевые слова: динамическая задача Стефана, экструдирование расплавленного металла, фронт кристаллизации, термически тонкий цилиндр, длина участка кристаллизации.

Экструдирование расплавленного металла с последующей кристаллизацией в математической физике формализуется динамической задачей Стефана. В этом процессе капиллярную струю диаметром $0,2 \div 3$ мм направляют в охлаждающую среду. В литературе имеются два допущения о форме фронта кристаллизации цилиндра: плоской и двумерной осесимметричной поверхностях фронта.

Н. Р. Берманом и другими авторами [1] рассматривалась кристаллизация цилиндра диаметром $5 \div 30$ мкм, движущаяся со скоростью до 8 м/с. Фронт кристаллизации при этом был аксиоматизирован как плоскость, перпендикулярная оси цилиндра. В источниках указывается (см., например, [2]) на значительную грубость этого допущения. Так, Ш. Кэвеш [2] определял металлографическим методом направление нормали к фронту кристаллизации в цинковой литой проволоке диаметром 267 мкм, полученной экструдированием расплава в воду. У поверхности угол между нормалью и осью проволоки составлял 79° . Таким образом, фронт кристаллизации следует считать двумерным, что и предполагаем.

Пусть диск толщиной Δl переместится совместно с цилиндром на величину $\Delta z = v \Delta \tau$ в направлении движения, где v — скорость движения, $\Delta \tau$ — время. При этом в диске за счет кристаллизации кольца толщиной Δr выделяется количество тепла $\Delta Q = -\Delta H_{пл} 2\pi r \Delta r \Delta l \rho_{ж}$, а потери тепла составят $\Delta Q = q 2\pi r_v \Delta l \Delta \tau$, где $\Delta H_{пл}$ — теплота кристаллизации, q — удельный тепловой поток с внешней поверхности, r — текущий радиус фронта кристаллизации, $r_v = r_1 \sqrt{(r/r_1)^2 + [1 - (r/r_1)^2] (\rho_{ж}/\rho_{т})}$ — текущий внешний радиус кристаллизующегося жидкого цилиндра, r_1 — начальный радиус жидкого цилиндра, $\rho_{ж}$, $\rho_{т}$ — плотности металла в жидком и твердом состояниях. Приравняв два выражения для ΔQ и переходя к пределу при $\Delta \tau \rightarrow 0$, получим уравнение, описывающее продвижение фронта кристаллизации по сечению цилиндра:

$$\frac{dR}{d\tau} = -\frac{2q}{\rho_{ж} \Delta H_{пл} d_1} \sqrt{1 + \frac{1-R^2}{R^2} \Omega}, \quad \text{где } R = r/r_1, \quad \Omega = \rho_{ж}/\rho_{т}, \quad d_1 = 2r_1.$$

В результате замены $\frac{dR}{d\tau} = \frac{dR}{dz} \cdot \frac{dz}{d\tau} = v \frac{dR}{dz}$ получаем дифференциальное уравнение фронта кристаллизации

$$\frac{dR}{dz} = -\frac{2q}{v \rho_{\text{ж}} \Delta H_{\text{пл}} d_1} \sqrt{1 + \frac{1 - R^2}{R^2} \Omega},$$

решение которого с краевым условием $R|_{z=0} = 1$ задает вид поверхности, образующей фронт кристаллизации

$$Z_d = \frac{2}{N_q(1 - \Omega)} [1 - \sqrt{R^2(1 - \Omega) + \Omega}],$$

где $Z_d = z/d_1$, $N_q = 4q/(v \rho_{\text{ж}} \Delta H_{\text{пл}})$.

Длина участка кристаллизации $L_{\text{к}} = \frac{l_{\text{к}}}{d_1} = Z_d|_{R=0} = \frac{2}{N_q(1 + \Omega^{0.5})}$.

Для случая $\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{т}}$ (то есть $\Omega = 1$) следует, что $Z_d = \frac{1}{N_q}(1 - R^2)$.

Следовательно, фронт кристаллизации имеет форму, близкую к параболоиду вращения, и тем он ближе к указанной форме, чем меньше изменение плотности при кристаллизации. Учитывая пределы изменения входящих в него величин, получаем, что $N_q \sim (10^{-2} \div 10^{-5})$. Соответственно $L_{\text{к}} \sim (10^2 \div 10^5)$. Иными словами, длина участка кристаллизации составляет от 100 до 100 000 диаметров цилиндра вдоль оси.

Таким образом, анализ двух взаимоисключающих допущений о форме фронта кристаллизации в термически тонком цилиндре при математическом моделировании показал, что допущение о двумерном фронте кристаллизации даёт более близкие к реальности результаты.

* * *

1. Бадинтер Е. Я, Берман Н. Р, Драбенко И. Ф и др. Литой микропровод и его свойства. Кишинев: Штиинца, 1973.
2. Kavesh Sh. Melt spinning of metal fibers // American Institute of Chemical Engineers. Symposium Series. 1978. Vol. 74, № 180. P. 1–15.

Поступила в редакцию 08.02.08

I. M. Tsoun

Solutions and mathematical modeling of Stefan's dynamical problem for a thermally thin cylinder

The consequences are compared of two assumptions about the crystallization front form of a thermally thin cylinder.

Цун Иосиф Менделевич

Магнитогорский государственный университет

455038, Россия, г. Магнитогорск,

пр. Ленина, 114, МаГУ

E-mail: tsoun@masu.ru