Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Neshchadim, A. P. Chupakhin, Partial invariant solutions of the cubic Schrödinger equation, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 3, 35–41

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.6.47.48

April 26, 2023, 16:03:11

УДК 517.9

© М. В. Нецадим, А. П. Чупахин

ЧАСТИЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА¹

В работе рассматривается проблема интегрирования переопределенной системы дифференциальных уравнений, соответствующей частично-инвариантному решению (фактор-модель $L_{3,1}$) кубического уравнения Шредингера.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, частично-инвариантное решение, переопределенные системы.

Нелинейное уравнение Шредингера [1] имеет многочисленные приложения в математической физике (нелинейная оптика, теория волн и другие). Особый интерес представляют многомерные решения уравнения Шредингера, поскольку оно в этом случае не интегрируется методом обратной задачи теории рассеяния [2].

Теоретико-групповые свойства уравнения

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

где $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ — оператор Лапласа, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $|\psi| = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}$, изучались в работах [3–6]. Работа [7] посвящена описанию средствами группового анализа [8] всех подмоделей (фактор-уравнений) уравнения (1), отвечающих его трехмерным алгебрам симметрии. В частности, найдены универсальные инварианты и определен тип возможного теоретико-группового решения: инвариантное (9 существенно различных типов) или частично-инвариантное (18 существенно различных типов). Тем самым показано, что существует большое число точных решений уравнения (1), описывающих существенно многомерные физические структуры, перспективные для изучения.

Если ввести амплитуду u и фазу v равенством $\psi = ue^{iv}$, то (1) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} -u\frac{\partial v}{\partial t} + \Delta u - u|v|^2 + u^3 = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\Delta v + 2\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — градиент.

Алгебра симметрии системы (2) порождается следующими операторами [3]:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \\ X_2 &= \partial_x, \quad X_3 = \partial_y, \quad X_4 = \partial_z, \\ X_5 &= z\partial_y - y\partial_z, \quad X_6 = x\partial_z - z\partial_x, \quad X_7 = y\partial_x - x\partial_y, \\ X_8 &= 2t\partial_x + x\partial_v, \quad X_9 = 2t\partial_y + y\partial_v, \quad X_{10} = 2t\partial_z + z\partial_v, \\ X_{11} &= \partial_v, \quad X_{12} = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - u\partial_u. \end{aligned}$$

Фактор-уравнения, соответствующие частично-инвариантным решениям, представляют собой активные (в смысле теории совместности [9, 10]) системы дифференциальных уравнений. Поэтому для этих систем в первую очередь стоит задача приведения в инволюцию, определения широты решения и, если возможно, построения общего решения.

¹Работа поддержана грантами РФФИ (проекты №06–01–00439, №08–01–00047), Интеграционным грантом СО РАН (проекты №48, 2.15 – 2006), Программой поддержки ведущих научных школ №НШ-2826.2008.1.

В настоящей работе рассматривается вопрос об интегрировании переопределенной системы

$$\frac{u_{zz} + u^3}{u} = v_t + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad u_t + u\Delta v + 2u_z v_z = 0, \quad (3)$$

в которой $u = u(t, z)$, $v = v(t, x, y, z)$, соответствующей подалгебре

$$L_{3,1} = \text{алг} \langle X_8, X_9 + aX_3, X_{11} \rangle,$$

где a — положительная константа. Система (3) отвечает частично-инвариантному решению ранга два и дефекта один [8]. Дополненная уравнениями $u_x = u_y = 0$, она является переопределенной: четыре уравнения для двух функций. Если рассматривать только стационарные решения $u_t = v_t = 0$, то (3) примет вид

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = h^2, \quad v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = gv_z, \quad (4)$$

где введены обозначения $h^2(z) = \frac{u_{zz} + u^3}{u}$, $g(z) = -2\frac{u_z}{u}$.

Справедлива

Теорема 1. Если функция v не зависит от переменной x , то общее решение системы (4) дается следующими формулами:

$$v = \pm 2\sqrt{C_1} \left(y + \sqrt{C} \int \frac{dz}{u^2} \right) + v_0, \\ \int \frac{du^2}{\sqrt{-2u^6 + C_1 u^4 + C_2 u^2 - CC_1}} = \pm z + C_3,$$

где C , C_1 , C_2 , C_3 , v_0 — некоторые константы, C , $C_1 > 0$.

Замечание 1. Решение определяется эллиптическими функциями переменной z . Можно ожидать, что при определенных значениях параметров решение будет периодическим по этой координате.

Доказательство. Положим

$$v_y = h \cos \varphi, \quad v_z = h \sin \varphi, \quad (5)$$

где $\varphi = \varphi(y, z)$ — вспомогательная функция. Тогда первое из уравнений (4) выполняется тождественно. Условие совместности $v_{yz} = v_{zy}$ уравнения (5) приводит к соотношению

$$h' \cos \varphi - h\varphi_z \sin \varphi = h\varphi_y \cos \varphi.$$

Здесь и далее штрихом обозначается производная по переменной z . Если положить $H = h'/h$, то это равенство перепишется в виде

$$\varphi_y \cos \varphi + \varphi_z \sin \varphi = H \cos \varphi. \quad (6)$$

Подставляя представление (5) во второе уравнение системы (4), получим

$$\varphi_y \sin \varphi - \varphi_z \cos \varphi = (H - g) \sin \varphi. \quad (7)$$

Из (6), (7) найдем производные

$$\varphi_y = H - g \sin^2 \varphi, \quad \varphi_z = g \cos \varphi \sin \varphi. \quad (8)$$

Условие совместности $\varphi_{yz} = \varphi_{zy}$ уравнений (8) приводит к соотношению

$$\varphi_y \cos(2\varphi) + \varphi_z \sin(2\varphi) = \frac{H' - g' \sin^2 \varphi}{g}.$$

В силу (8) оно преобразуется к виду

$$\sin^2(\varphi)(g^2 + g' - 2gH) = H' - gH. \quad (9)$$

Уравнение (9) является ключевым для решения системы (4). Правая часть (9) является функцией только от переменной z , в то время как левая часть может зависеть также от переменной y .

Пусть $g^2 + g' - 2gH \neq 0$. Тогда из (9) получаем, что функция φ не зависит от переменной y . Из (8) следует

$$H = g \sin^2(\varphi), \quad \varphi' = g \cos \varphi \sin \varphi.$$

Подставив сюда $H = h'/h$, $h^2 = \frac{u'' + u^3}{u}$, $g(z) = -2\frac{u'}{u}$, получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u'' + u^3}{u} \right)' = -2 \frac{u'' + u^3}{u} \cdot \frac{u'}{u} \sin^2(\varphi), \quad \varphi' = -2 \frac{u'}{u} \cos \varphi \sin \varphi. \quad (10)$$

Второе уравнение системы (10) интегрируется

$$\sin^2(\varphi) = \frac{C}{u^4 + C}, \quad (10)$$

где C — неотрицательная константа. Тогда первое уравнение (10) принимает вид

$$\left(\ln \frac{u'' + u^3}{u} \right)' = -4 \frac{u'}{u} \cdot \frac{C}{u^4 + C} \quad (11)$$

и также может быть проинтегрировано:

$$\begin{aligned} \ln \frac{u'' + u^3}{u} + \ln \frac{C}{u^4 + C} &= C_1, \\ u'' &= C_1 u + \frac{CC_1}{u^3} - u^3, \\ u'^2 &= C_1 u^2 - \frac{CC_1}{u^2} - \frac{1}{2} u^4 + C_2, \\ ((u^2)')^2 &= 4C_1(u^4 - C) - 2u^6 + 4C_2 u^2, \\ \int \frac{du^2}{\sqrt{-2u^6 + C_1 u^4 + C_2 u^2 - CC_1}} &= \pm z + C_3, \end{aligned}$$

где C , C_1 , C_2 , C_3 — некоторые константы, $C, C_1 > 0$. Отсюда

$$h^2 = \frac{u'' + u^3}{u} = \frac{4C_1(u^4 + C)}{u^4}.$$

Функция v находится из системы (5)

$$v_y = h \cos \varphi = \pm 2\sqrt{C_1}, \quad v_z = h \sin \varphi = \pm 2\frac{\sqrt{CC_1}}{u^2}$$

по формуле

$$v = \pm 2\sqrt{C_1} \left(y + \sqrt{C} \int \frac{dz}{u^2} \right) + v_0$$

для некоторой константы v_0 .

Пусть $g^2 + g' - 2gH = 0$. Тогда из (9)

$$H' - gH = 0.$$

Если $H \neq 0$, то $g = H'/H$ и

$$\left(\frac{H'}{H}\right)^2 + \left(\frac{H'}{H}\right)' - 2H' = 0,$$

$$H'' = 2HH',$$

$$H = g = \frac{1}{A-z},$$

где A — некоторая константа. Из соотношений $H = h'/h$, $g = -2\frac{u'}{u}$, получаем

$$h = \frac{B}{A-z}, \quad u = C\sqrt{z-A},$$

где B , C — константы. Подставив u , h в соотношение $h^2 = \frac{u'' + u^3}{u}$, получим равенство

$$\frac{B^2}{(A-z)^2} = C^2(z-A)^2 - \frac{1}{4(A-z)^2},$$

которое невозможно ни при каких A , B , C .

Пусть $H = 0$, то есть h — константа. Тогда $g' = g^2$ и $g = \frac{1}{A-z}$ для некоторой константы A . Для функции u имеем систему

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{2}g = \frac{1}{2(A-z)}, \quad \frac{u'' + u^3}{u} = h^2.$$

Из первого соотношения получаем $u = \frac{B}{\sqrt{z-A}}$, B — константа. Тогда из второго соотношения получаем равенство

$$\frac{B^2}{z-A} + \frac{3}{4(z-A)^2} = h^2,$$

которое невозможно ни при каких A , B , h .

Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Система (4) допускает преобразования — повороты в плоскости OXY , поэтому от решения $v(y, z)$ можно перейти к решению $v(ax+by, z)$, где a , b — константы такие, что $a^2 + b^2 = 1$.

Лемма 1. *Общее решение системы*

$$h^2 = \frac{u^3 + u''}{u}, \quad g = -2\frac{u'}{u},$$

где u , g , h — функции от переменной z , дается следующими формулами:

$$u = Ae^{\varphi/2}, \quad h^2 = A^2e^{\varphi} + \frac{1}{4}\varphi'^2 + \frac{\varphi''}{2}, \quad g = -\varphi',$$

где φ — некоторая функции от переменной z .

Доказательство. Подставим $u' = -\frac{1}{2}ug$ в первое соотношение

$$h^2 = u^2 - \frac{1}{2}g' - \frac{gu'}{2u}$$

или

$$h^2 = u^2 - \frac{g^2}{4} - \frac{g'}{2}.$$

Далее соотношение $ug = -2u'$ перепишем в виде $u^2g + (u^2)' = 0$. Отсюда

$$g = -\varphi', \quad u = Ae^{\varphi/2},$$

для некоторой функции $\varphi = \varphi(z)$. Значит:

$$h^2 = A^2e^\varphi + \frac{1}{4}\varphi'^2 + \frac{\varphi''}{2}.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 2. *Решение $v = v(x, y, z)$ системы (4) линейно по переменным x, y, z тогда и только тогда, когда функция h не зависит от переменной z , то есть постоянна.*

Доказательство. Если функция $v = v(x, y, z)$ линейна по переменным x, y, z , то из первого соотношения (4) следует, что h — константа.

Пусть h — константа. Выразим производную v_z из первого уравнения (4)

$$v_z = \sqrt{h^2 - v_x^2 - v_y^2} \quad (12)$$

и подставим во второе уравнение, которое разрешим относительно производной v_{yy} :

$$v_{yy} = \frac{1}{h^2 - v_x^2} \left(g(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{3/2} - v_{xx}(h^2 - v_y^2) - 2v_xv_yv_{xy} \right). \quad (13)$$

Составим условие совместности $v_{zyy} - v_{yyz} = 0$ для системы (12)–(13) и упростим его в силу самой системы. Получим соотношение

$$\begin{aligned} & 2h^2(v_x^2 - h^2)v_{xy}^2 - 4h^2v_xv_yv_{xy}v_{xx} + 2h^2(v_y^2 - h^2)v_{xx}^2 + \\ & + 2gh^2(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{3/2}v_{xx} + (g' + g^2)(v_x^2 - h^2)(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^2 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

которое представляет собой квадратичную форму относительно производных второго порядка v_{xx} , v_{xy} .

Инварианты квадратичной формы (14) имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= -2h^2(2h^2 - v_x^2 - v_y^2), \\ I_2 &= 4h^6(h^2 - v_x^2 - v_y^2), \\ I_3 &= -2h^6(h^2 - v_x^2)(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^3(2g' + g^2). \end{aligned}$$

Так как $I_2 > 0$, то (14) имеет эллиптический тип. Для того чтобы множество решений (14) было непустым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$I_1I_3 \leq 0, \quad \text{то есть} \quad 2g' + g^2 \leq 0.$$

Приведем (14) к каноническому виду ортогональным преобразованием и параметризуем соответствующий эллипс введением полярной системы координат. Получим представление для производных

$$\begin{aligned} v_{xx} &= \frac{hv_y \cos Q - v_x \sin Q}{2h^2(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}} (h^2 - v_x^2)^{1/2} (h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2} (-2g' - g^2)^{1/2} + \\ &+ \frac{1}{2h^2} (h^2 - v_x^2)(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$v_{xy} = -\frac{hv_x \cos Q + v_y \sin Q}{2h^2(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}}(h^2 - v_x^2)^{1/2}(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}(-2g' - g^2)^{1/2} - \frac{1}{2h^2}gv_x v_y(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}. \quad (16)$$

Здесь $Q = Q(x, y, z)$ — вспомогательная функция-угол в полярной системе координат.

Подставляя (15), (16) в (13), получим

$$v_{yy} = \frac{-hv_y \cos Q + (h^2 + v_y^2)v_x \sin Q}{2h^2(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}(h^2 - v_x^2)^{1/2}}(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{3/2}(-2g' - g^2)^{1/2} + \frac{g}{2h^2}(h^2 - v_y^2)(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}. \quad (17)$$

Составим условия совместности $v_{xyx} - v_{xxy} = 0$ и $v_{xyy} - v_{yyx} = 0$. В силу системы (15)–(17) эти соотношения приводятся к виду

$$B_{11}Q_x + B_{12}Q_y + B_1 = 0, \quad B_{21}Q_x + B_{22}Q_y + B_2 = 0,$$

где коэффициенты B_i , B_{ij} — функции от v_x , v_y , Q . Их явный вид мы здесь не приводим ввиду их громоздкости. Отсюда находим производные

$$Q_x = -\frac{(-2g' - g^2)^{1/2}(h^2 - v_x^2 + v_y^2)}{2(h^2 - v_x^2)^{1/2}(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}}\cos Q + \frac{v_x v_y(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}}{2h(h^2 - v_x^2)^{1/2}(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}}\sin Q - \frac{gv_y(h^4 + h^2 v_y^2 - v_x^2 v_y^2 - v_x^4)}{2h(h^2 - v_x^2)(v_x^2 + v_y^2)}, \quad (18)$$

$$Q_y = \frac{v_x v_y(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}}{(h^2 - v_x^2)^{1/2}(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}}\cos Q + \frac{(h^2 + v_y^2)(-2g' - g^2)^{1/2}(h^2 - v_x^2 - v_y^2)^{1/2}}{2h(h^2 - v_x^2)^{1/2}(v_x^2 + v_y^2)^{1/2}}\sin Q + \frac{gv_x(h^4 - h^2 v_x^2 + v_x^2 v_y^2 + v_y^4)}{2h(h^2 - v_x^2)(v_x^2 + v_y^2)}. \quad (19)$$

Условие совместности $Q_{xy} - Q_{yx} = 0$ системы (18)–(19) в силу (15)–(19) приводится к виду

$$\frac{1}{h}(h^2 - v_x^2 - v_y^2)(g' + g^2) = 0.$$

Поскольку $h^2 - v_x^2 - v_y^2 > 0$, то из этого равенства следует, что

$$g' + g^2 = 0. \quad (20)$$

Отсюда либо $g = 0$, либо $g = \frac{1}{z + C_1}$, $C_1 = \text{const}$. Если $g = \frac{1}{z + C_1}$, то в силу леммы $\varphi' = -\frac{1}{z + C_1}$, то есть $\varphi = C_2 - \ln|z + C_1|$, $C_2 = \text{const}$. Но тогда

$$h^2 = A^2 e^\varphi + \frac{1}{4}\varphi'^2 + \frac{\varphi''}{2} = \frac{A^2 e^{C_2}}{z + C_1} + \frac{1}{4(z + C_1)^2} + \frac{1}{2(z + C_1)^2}$$

не может быть константой. Следовательно, $g = 0$, $\varphi = \text{const}$ и $u = \text{const}$. В силу (15)–(17) $v_{xx} = v_{xy} = v_{yy} = 0$. Из второго соотношения (4) $v_{zz} = 0$. Значит:

$$v = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_{13}xz + a_{23}yz$$

для некоторых постоянных $a_0, \dots, a_{23}$. Из первого соотношения (4) получаем $a_{13} = a_{23} = 0$. Итак, функция

$$v = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z$$

линейна по переменным x, y, z .

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1992. — 661 с.
2. Теория солитонов: метод обратной задачи / Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. Н. — М.: Наука, 1980. — 319 с.
3. Gagnon L., Winternitz P., Lie symmetries of f generalised non-linear Shrodinger equation: I. The symmetry group and its subgroups // J. Phys. A. — 1988. — Vol. 21. — P. 1493–1511.
4. Gagnon L., Winternitz P., Lie symmetries of f generalised non-linear Shrodinger equation: I. Exact solutions // J. Phys. A. — 1988. — Vol. 22. — P. 469–497.
5. Gagnon L., Winternitz P., Exact solutions of the cubic and quintic non-linear Shrodinger equation for a cylindrical geometry // Phys. Rev A. — 1989. — Vol. 39. — P. 296–306.
6. Футич А. П., Штелень В. М., Серов Н. В. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 335 с.
7. Измайлова К. К., Чупахин А. П., Теоретико-групповые решения кубического уравнения Шредингера, порожденные алгебрами симметрии размерности 3 в двух постоянных полях // Нелинейная динамика. — 2007. — Т. 3, № 3. — P. 296–306.
8. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
9. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. — М.: Гостехиздат, 1948. — 432 с.
10. Помаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. — М.: Мир, 1983. — 400 с.

Поступила в редакцию 20.10.08

M. V. Neshchadim, A. P. Chupakhin

Partial invariant solutions of the cubic Schrödinger equation

In this paper we consider a question of integration of the over determined system of partial differential equations which correspond to the partial invariant solution (factor system $L_{3,1}$) of the cubic Schrödinger equation.

Keywords: Schrödinger equation, partial invariant solution, over determined systems.

Mathematical Subject Classifications: 35Q55, 35C05, 58J70

Нешчадим Михаил Владимирович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики СО РАН им. С.Л. Соболева, 630090, Новосибирск, пр. Коптюга 4, E-mail: neshch@math.nsc.ru

Чупахин Александр Павлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт гидродинамики СО РАН им. М.А. Лаврентьева, 630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева 15, E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru