Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. S. Bannikov, Evasion from group of non-stationary inertial objects, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, Issue 1, 3–10

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.237.206.68

April 26, 2023, 07:09:37

МАТЕМАТИКА

УДК 517.978.4

© А. С. Банников

УКЛОНЕНИЕ ОТ ГРУППЫ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИНЕРЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассматривается дифференциальная игра группы преследователей и одного убегающего при равных динамических возможностях всех участников. Получены достаточные условия уклонения от встречи в классе позиционных контрстратегий.

Ключевые слова: дифференциальная игра, позиционная контрстратегия, уклонение от встречи.

Введение

Рассматривается задача уклонения из заданного начального состояния в дифференциальной игре второго порядка между группой преследователей и одним убегающим. В стационарном случае ($a(t) \equiv 1$) достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения при равных динамических возможностях игроков были получены в [1], а в случае контрольного примера Понтрягина — в [2].

В настоящей работе приводятся достаточные условия разрешимости локальной задачи уклонения от группы преследователей в нестационарном случае и равенстве возможностей игроков. Работа примыкает к исследованиям [3, 4].

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n + 1$ -го лица: n преследователей и одного убегающего. Закон движения каждого из преследователей P_i , $i = 1, \dots, n$ имеет вид:

$$\dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad u_i \in U.$$

Закон движения убегающего E имеет вид:

$$\ddot{y}(t) = a(t)v(t), \quad v \in U,$$

причем в начальный момент $x_i(t_0) = x_i^0$, $\dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_i^0$,

$$y(t_0) = y^0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}^0, \quad x_i^0 \neq y^0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь x_i , y , u_i , $v \in \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^k$ — выпуклый компакт, $0 \in \text{int } U$; $a(t)$ — ограниченная измеримая функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси t , $a(t) \neq 0$ почти всюду на $[t_0, +\infty)$. Управлениями игроков являются измеримые функции $u_i(t)$, $v(t)$, принимающие при $t \geq t_0$ значения из множества U .

Обозначим данную игру через $\Gamma(n, z(t_0))$, где

$$z(t) = (z_1(t), \dot{z}_1(t), \dots, z_n(t), \dot{z}_n(t)), \quad z_i(t) = x_i(t) - y(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение 1. Позиционной контрстратегией V убегающего E назовем измеримое отображение

$$[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^{2nk} \times U^n \rightarrow U.$$

Тогда при заданных управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i , $i = 1, \dots, n$ стратегия V определяет управление $v(t) = V(t, z(t), u_1(t), \dots, u_n(t))$, которое будет измеримой функцией.

Определение 2. В дифференциальной игре $\Gamma(n, z(t_0))$ из начального состояния $z(t_0)$ разрешима локальная задача уклонения, если для любых измеримых функций

$$u_i(t), \quad t \geq t_0, \quad u_i \in U, \quad i = 1, \dots, n$$

существует стратегия V убегающего E такая, что $z_i(t) \neq 0$ для всех $t \geq t_0$, $i = 1, \dots, n$.

Считаем, что управления преследователей формируются на основе информации о состоянии $z(t)$ дифференциальной игры.

§ 2. Достаточные условия уклонения от группы

Теорема 1. Пусть $0 \notin \text{co} \left\{ \bigcup_{i=1}^n \dot{z}_i^0 \right\}$, тогда в игре $\Gamma(n, z(t_0))$ из начального состояния $z(t_0)$ разрешима локальная задача уклонения.

Доказательство. Пусть $0 \notin \text{co} \left\{ \bigcup_{i=1}^n \dot{z}_i^0 \right\}$. На основании теоремы об отделимости выпуклых множеств существует единичный вектор p и число $\varepsilon > 0$, такие, что

$$\max_{i=1, \dots, n} (\dot{z}_i^0, p) \leq -2\varepsilon. \quad (2.1)$$

Обозначим

$$|U| = \max_{z \in U} \|z\|,$$

$$c = \text{ess sup}_{t \geq t_0} |a(t)|,$$

$$C(U, p) = \max_{u \in U} (u, p), \quad p \in \mathbb{R}^k,$$

$$(u, p) = \sum_{i=1}^k u_i p_i,$$

$$\delta = \min\{1, \varepsilon, \sqrt{\eta(t_0)}\},$$

$$\eta(t) = \min_{i=1, \dots, n} \|z_i(t)\|.$$

1. Пусть $\max_{i=1, \dots, n} (\dot{z}_i^0, p) \leq 0$. Положим

$$v(t) = v_p(t), \quad v_p(t) = \begin{cases} v_p, & a(t) \geq 0, \\ v_{-p}, & a(t) < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $v_p, v_{-p} \in U$ — такие, что $(v_p, p) = C(U, p)$, $(v_{-p}, -p) = C(U, -p)$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$

$$(z_i(t), p) = (\dot{z}_i^0, p) + (t - t_0)(\dot{z}_i^0, p) + \int_{t_0}^t (t - s)a(s)(u_i(s) - v_p(t), p) ds \leq -2\varepsilon(t - t_0) < 0$$

при $t > t_0$, откуда следует возможность уклонения из начального состояния $z(t_0)$.

2. Предположим, что $(z_1^0, p) > 0$ и $(z_i^0, p) \leq 0$ для любого $i = 2, \dots, n$. Опишем маневр уклонения, гарантирующий разрешимость задачи уклонения для такого начального состояния $z(t_0)$. Пусть $K = \min\{1, \frac{1}{|U|c}\}$, $\tau_1 = K\frac{\delta}{4}$, $\delta_1 = K\frac{\delta^2}{4} < \eta(t_0)$. Положим

$$v(t) = v_p(t), \quad t \in [t_0, +\infty) \setminus [t_1, t_1 + \delta_1),$$

где t_1 — либо первый момент, в который впервые выполняется равенство $\|z_1(t_1)\| = \delta_1$ и $(z_1(t_1), p) > 0$, либо $+\infty$, и если $t_1 < +\infty$, тогда на полуинтервале $[t_1, t_1 + \tau_1)$ управление $v(t)$ будем выбирать специальным образом.

При так выбранном управлении убегающего преследователь P_i , $i = 2, \dots, n$ не влияет на ход игры. Действительно, при любых управлениях $u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$

$$(\dot{z}_i(t), p) = (\dot{z}_i(t_0), p) + \int_{t_0}^t a(s)((u_i(s), p) - (v(s), p)) \leq -2\delta + 2c|U|\tau_1 < -\delta, \quad t \geq t_0. \quad (2.3)$$

Поэтому

$$(z_i(t), p) = (z_i(t_0), p) + \int_{t_0}^t (\dot{z}_i(s), p) ds < (z_i(t_0), p) \leq 0, \quad t \geq t_0, \quad i \neq 1. \quad (2.4)$$

Значит, при $t \geq t_0$ $\|z_i(t)\| \neq 0$, $i \neq 1$.

Заметим также, что в момент $t = t_1$ $\|z_1(t_1)\| = \delta_1$, поэтому при любых управлениях $u_1(t)$ и $v(t)$ на отрезке $[t_1, t_1 + \tau_1]$

$$(z_1(t_1 + \tau_1), p) = (z_1(t_1), p) + \int_{t_1}^{t_1 + \tau_1} (\dot{z}_1(s), p) ds < \delta_1 - \delta\tau_1 = 0. \quad (2.5)$$

Следовательно, в момент $t = t_1 + \tau_1$ состояние дифференциальной игры соответствует рассмотренному выше случаю 1:

$$\begin{aligned} (\dot{z}_i(t_1 + \tau_1), p) &< -\delta, \\ (z_i(t_1 + \tau_1), p) &< 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом, если по любому управлению $u_1(s)$ можно построить управление $v(s)$, $s \in [t_1, t_1 + \tau_1]$ такое, что $\|z_1(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$, то разрешимость локальной задачи уклонения для начального состояния $z(t_0)$ в случае 2 будет доказана.

Предположим, что

$$(z_1(t_1), \dot{z}_1(t_1)) = -\|z_1(t_1)\| \|\dot{z}_1(t_1)\|. \quad (2.6)$$

Векторы $z_1(t_1)$ и $\dot{z}_1(t_1)$ линейно зависимы, поэтому существует единичный вектор ψ такой, что

$$(\psi, z_1(t_1)) = (\psi, \dot{z}_1(t_1)) = 0. \quad (2.7)$$

Пусть $\varepsilon_1 \in (0, \tau_1)$ — некоторое число такое, что при произвольных $u_1(s), v(s)$, $s \in [t_1, t_1 + \varepsilon_1]$ справедливо неравенство $(z_1(s), p) > 0$. На отрезке $[t_1, t_1 + \varepsilon_1]$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(\psi, v(s)) = \begin{cases} C(U, \psi), & (\psi, u_1(s)) \leq 0, \\ -C(U, -\psi), & (\psi, u_1(s)) > 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Покажем, что существует $\gamma_1 \in (0, \varepsilon_1)$ такое, что

$$(z_1(t_1 + \gamma_1), \dot{z}_1(t_1 + \gamma_1)) \neq -\|z_1(t_1 + \gamma_1)\| \|\dot{z}_1(t_1 + \gamma_1)\|. \quad (2.9)$$

При $t \geq t_1$ рассмотрим функции

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (\psi, z_1(t)) = \int_{t_1}^t (t-s)a(s)(\psi, u_1(s) - v(s)) ds, \\ f_2(t) &= (\psi, \dot{z}_1(t)) = \int_{t_1}^t a(s)(\psi, u_1(s) - v(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $t_1 \leq t \leq t_1 + \varepsilon_1$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{f}_1(t) &= f_2(t), \\ \dot{f}_2(t) &= a(t)(\psi, u_1(t) - v(t)), \end{aligned} \quad (2.11)$$

причем $f_1(t_1) = f_2(t_1) = 0$.

Так как $0 \in \text{int } U$, то $C(U, q) > 0$ при любом $q \neq 0$. Поэтому $|a(t)(\psi, u_1(t) - v(t))| > 0$ почти всюду на $[t_1, t_1 + \varepsilon_1]$, и $f_2(t) \neq 0$ на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [t_1, t_1 + \varepsilon_1]$, $\alpha < \beta$. Значит, множество $G = \{t \in (t_1, t_1 + \varepsilon_1) \mid f_2(t) \neq 0\}$ — непустое открытое множество. Поэтому $G = \bigcup_j (\alpha_j, \beta_j)$, где $\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ — взаимно непересекающаяся, не более чем счетная система интервалов.

Пусть $(\alpha_{j_0}, \beta_{j_0})$ — некоторый интервал из этой системы. Тогда

$$f_2(\alpha_{j_0}) = f_2(\beta_{j_0}) = 0, \quad \dot{f}_2(t) \neq 0, \quad t \in (\alpha_{j_0}, \beta_{j_0}).$$

Если $f_1(\alpha_{j_0}) \neq 0$, то соотношение (2.9) выполнено при $t_1 + \gamma_1 = \alpha_{j_0}$. Если же $f_1(\alpha_{j_0}) = 0$, тогда

$$\dot{f}_1(t) = f_2(t) \neq 0, \quad t \in (\alpha_{j_0}, \beta_{j_0}).$$

Поэтому $f_1(t)f_2(t) > 0$ на $(\alpha_{j_0}, \beta_{j_0})$. Значит, при $t_1 + \gamma_1 = \tau$, где τ — некоторое произвольно выбранное число из интервала $(\alpha_{j_0}, \beta_{j_0})$, имеет место соотношение (2.9).

Итак, управление $v(s)$ при $s \in [t_1, t_1 + \varepsilon_1]$ выбирается в соответствии с правилом (2.8). Тогда

$$\|z_1(t)\| \neq 0, \quad t \in [t_1, t_1 + \varepsilon_1],$$

и в некоторый момент $t = t_1 + \gamma_1$ будет выполнено соотношение (2.9).

Если

$$(z_1(t_1), \dot{z}_1(t_1)) \neq -\|z_1(t_1)\| \|\dot{z}_1(t_1)\|, \quad (2.12)$$

то полагаем $\gamma_1 = 0$. Заметим, что $(z_1(t_1 + \gamma_1), p) > 0$ и $(\dot{z}_1(t_1 + \gamma_1), p) < -\delta$, поэтому из неравенства (2.9) следует линейная независимость векторов $z_1(t_1 + \gamma_1)$ и $\dot{z}_1(t_1 + \gamma_1)$. Далее при всех $s \in [t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1]$ положим $v(s) = u_1(s)$. Тогда

$$z_1(t) = z_1(t_1 + \gamma_1) + (t - t_1 - \gamma_1)\dot{z}_1(t_1 + \gamma_1) \quad (2.13)$$

при $t_1 + \gamma_1 \leq t \leq t_1 + \tau_1$, следовательно, $\|z_1(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1 + \gamma_1, t_1 + \tau_1]$.

Таким образом, по любой измеримой функции $u_1(s) \in U$ можно построить такую измеримую функцию

$$v(s) = V(s, z(s), u_1(s), \dots, u_n(s)), \quad v(s) \in U, \quad s \in [t_1, t_1 + \tau_1],$$

что $\|z_1(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_1, t_1 + \tau_1]$. Разрешимость локальной задачи уклонения в случае 2 доказана.

3. Пусть $(z_i^0, p) > 0$ для любого $i \in I' = \{1, \dots, s\}$, $s \leq n$, и $(z_i^0, p) \leq 0$ для $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I'$. В процессе построения маневра уклонения определим такие числа τ_j , δ_j , $j = 1, \dots, N_1$, $N_1 \leq s$, что

$$\tau_j > \tau_{j+1}, \quad \delta_j > \delta_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N_1 - 1,$$

причем если в момент $t' > t_0$ для некоторого $i \in \{1, \dots, s\}$ выполняется равенство $\|z_i(t')\| = \delta_j$ и $(z_i(t'), p) > 0$, то $(z_i(t' + \tau_j), p) < 0$ для любых управлений $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_j]$.

Момент времени $t_i > t_0$, когда впервые выполняется равенство $\eta(t) = \delta_i$ и существует номер $\ell \in \{1, \dots, s\}$ такой, что $\|z_\ell(t_i)\| = \delta_i$, $(z_\ell(t_i), p) > 0$, назовем моментом i -го сближения. Не уменьшая общности, полагаем, что в момент $t = t_i$ $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$ и $(z_i(t_i), p) > 0$. Содержательно это означает, что преследователи пронумерованы в том порядке, в каком происходит их сближение с убегающим.

Положим

$$v(t) = v_p(t), \quad t \in [t_0, +\infty) \setminus T, \quad T = \bigcup_{i=1, \dots, N_1} [t_i, t_i + \tau_i), \quad (2.14)$$

При $t = t_0$ построим последовательности $\{\tau_1^i\}_{i=1}^\infty$, $\{\delta_1^i\}_{i=1}^\infty$ следующим образом:

$$\tau_1^i = K \frac{\delta}{2^{i+1}}, \quad \delta_1^i = \delta \tau_1^i = K \frac{\delta^2}{2^{i+1}}. \quad (2.15)$$

Числа τ_i , $i = 1, \dots, N_1$ будут определены так, что $\tau_i \leq \tau_1^i$, $i = 1, \dots, N_1$, поэтому

$$\sum_{i=1, \dots, N_1} \tau_i < \xi_1 = K \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2|U|_C}.$$

Тогда при любых управлениях $u_i(s)$, $i = 1, \dots, n$ на $[t_0, t]$ и $v(s)$ на $[t_0, t] \cap T$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (\dot{z}_i(t), p) &= (\dot{z}_i^0, p) + \int_{[t_0, t] \cap T} a(s)(u_i(s) - v(s), p) ds + \int_{[t_0, t] \setminus T} a(s)(u_i(s) - v_p(t), p) ds \leq \\ &\leq -2\delta + 2|U|c\mu(T) < -2\delta + 2|U|c\xi_1 \leq -\delta, \quad t \in [t_0, +\infty), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поэтому $(z_i(t' + \tau), p) = (z_i(t'), p) + \int_{t'}^{t'+\tau} (\dot{z}_i(s), p) ds < (z_i(t'), p)$, $t' \geq t_0$, $\tau > 0$. Это означает, что сближение с преследователем $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I'$ не наступит. Не ограничивая общности, считаем далее, что $N_1 = n$, то есть сближение наступает с каждым преследователем.

Заметим также, если в момент $t = t'$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполняются соотношения

$$\|z_i(t')\| = \delta_1^i, \quad (z_i(t'), p) > 0,$$

то при любых управлениях $u_i(s)$, $v(s)$ на отрезке $[t', t' + \tau_1^i]$ получаем

$$(z_i(t' + \tau_1^i), p) = (z_i(t'), p) + \int_{t'}^{t'+\tau_1^i} (\dot{z}_i(s), p) ds < \delta_1^i - \delta\tau_1^i = 0. \quad (2.17)$$

Положим $\tau_1 = \tau_1^1$, $\delta_1 = \delta_1^1$. Тогда $t_1 > t_0$. Маневр уклонения определим рекуррентным образом. Итак, пусть в момент $t = t_i$ выполнены соотношения $\|z_i(t_i)\| = \delta_i$, $(z_i(t_i), p) > 0$, определены число τ_i и монотонно убывающие последовательности положительных чисел $\{\tau_i^\ell\}_{\ell=i}^\infty$, $\{\delta_i^\ell\}_{\ell=i}^\infty$.

Допустим, что $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) = -\|z_i(t_i)\| \|\dot{z}_i(t_i)\|$. Существует число $\varepsilon_i \in (0, \tau_i)$ такое, что при произвольных $u_\ell(s)$, $\ell = 1, \dots, n$ $v(s)$, $s \in [t_i, t_i + \varepsilon_i]$ справедливы неравенства

$$\min_{\tau \in [0, \varepsilon_i]} \|z_\ell(t_i + \tau)\| > \delta_i^{i+1}, \quad (z_i(s), p) > 0. \quad (2.18)$$

Векторы $z_i(t_i)$, $\dot{z}_i(t_i)$ линейно зависимы, поэтому существует единичный вектор ψ_i такой, что

$$(\psi_i, z_i(t_i)) = (\psi_i, \dot{z}_i(t_i)) = 0.$$

На отрезке $[t_i, t_i + \varepsilon_i]$ управление $v(s)$ выбираем так, чтобы

$$(\psi_i, v(s)) = \begin{cases} C(U, \psi_i), & (\psi_i, u_i(s)) \leq 0, \\ -C(U, -\psi_i), & (\psi_i, u_i(s)) > 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Тогда существует число $\gamma_i \in (0, \varepsilon_i)$ такое, что

$$(z_i(t_i + \gamma_i), \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)) \neq -\|z_i(t_i + \gamma_i)\| \|\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)\|.$$

Из (2.18) и неравенства $(\dot{z}_i(t_i + \gamma_i), p) < -\delta$ следует линейная независимость векторов $z_i(t_i + \gamma_i)$ и $\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)$. Если же $(z_i(t_i), \dot{z}_i(t_i)) \neq -\|z_i(t_i)\| \|\dot{z}_i(t_i)\|$, то полагаем $\gamma_i = 0$.

Следуя рассуждениям, проведенным в случае 2, управление убегающего $v(s)$ на полуинтервале $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ необходимо положить равным $u_i(s)$. Однако, если $i < n$, то на $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$ возможны сближения с преследователями $i + 1, \dots, n$. Поэтому

$$v(s) = u_i(s), \quad s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i) \setminus \bigcup_{j=i+1, \dots, n} [t_j, t_j + \tau_j),$$

если $i < n$, и

$$v(s) = u_n(s), \quad [t_n + \gamma_n, t_n + \tau_n).$$

Предположим, что $i < n$ и $t_\ell \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i)$, $\ell = i + 1, \dots, n$. Убегающий будет сближаться с преследователями $P_{i+1}, \dots, P_n$ настолько близко и обходить их за столь малое время, чтобы

для траектории $z_i(t)$ на отрезке $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ при любом управлении $u_i(s)$, $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ выполнялись следующие соотношения:

$$(z_i(t_i + \tau), \dot{z}_i(t_i + \tau)) \neq -\|z_i(t_i + \tau)\| \|\dot{z}_i(t_i + \tau)\|, \quad \tau \in [\gamma_i, \tau_i], \quad (2.20)$$

$$\min_{t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]} \|z_i(t)\| \geq \alpha_i, \quad (2.21)$$

$$\alpha_i > \delta_{i+1}. \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что сближение убегающего с каждым преследователем может наступать не более одного раза.

Обозначим через $H_i(t_i + \gamma_i + \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^1$ прямую, проходящую через точки $z_i(t_i + \gamma_i) + \tau \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)$ и $\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)$. На основании линейной независимости векторов $z_i(t_i + \gamma_i)$ и $\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)$ заключаем, что при любом τ векторы $z_i(t_i + \gamma_i) + \tau \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)$ и $\dot{z}_i(t_i + \gamma_i)$ линейно независимы. Поэтому для любого τ функция

$$f(\tau) = \min_{x \in H_i(t_i + \gamma_i + \tau)} \|x\| > 0. \quad (2.23)$$

$$\left(f(\tau) = \frac{\|((1 - \tau)\|b\|^2 - (a, b))(a + (\tau - 1)b) + \|a + b\|^2 b\|}{\|a + b\|^2}, \quad a = z_i(t_i + \gamma_i), \quad b = \dot{z}_i(t_i + \gamma_i) \right)$$

Кроме того, функция $f(\tau)$ непрерывна. В момент $t = t_i + \gamma_i$ определим число

$$\beta_i = \min_{\tau \in [0, \tau_i - \gamma_i]} f(\tau). \quad (2.24)$$

Если $v(s) = u_i(s)$ при $s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$, то соответствующая траектория

$$z_i^\circ t = z_i(t_i + \gamma_i) + (t - t_i - \gamma_i) \dot{z}_i(t_i + \gamma_i)$$

и

$$\dot{z}_i^\circ(t) = \dot{z}_i(t_i + \gamma_i), \quad t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i].$$

Ясно, что для любого $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$

$$\|z_i^\circ(t)\| \geq \beta_i, \quad \|\dot{z}_i^\circ(t)\| \geq \beta_i. \quad (2.25)$$

Теперь предположим, что на множестве $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ задана такая конечная система полуинтервалов $[t^r, t^r + \tau^r)$, $r = 1, \dots, \ell$, $\ell \geq 1$, что

$$\mu\left(\bigcup_{r=1, \dots, \ell} [t^r, t^r + \tau^r)\right) < \xi_{i+1}, \quad (2.26)$$

$$\xi_i = K \frac{\beta_i}{4} \quad (2.27)$$

Покажем, что если

$$v(s) = u_i(s), \quad s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i] \setminus \bigcup_{r=1, \dots, \ell} [t^r, t^r + \tau^r),$$

управление $v(s)$ на множестве $\bigcup_{r=1, \dots, \ell} [t^r, t^r + \tau^r)$ и управление $u_i(s)$ на отрезке $[t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$

выбирается произвольным образом, то соответствующая траектория $z_i^\ell(t)$, $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$ такова, что

$$\|z_i^\ell(t) - z_i^\circ(t)\| < \frac{\beta_i}{2}, \quad (2.28)$$

$$\|\dot{z}_i^\ell(t) - \dot{z}_i^\circ(t)\| \leq \frac{\beta_i}{2}, \quad (2.29)$$

Действительно, при $t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]$

$$\|\dot{z}^\ell(t) - \dot{z}^\circ(t)\| \leq 2|U|c\mu\left([t_i + \gamma_i, t] \cap \bigcup_{r=1, \dots, \ell} [t^r, t^r + \tau^r]\right) < 2|U|c\xi_{i+1} \leq \frac{\beta_i}{2},$$

$$\|z^\ell(t) - z^\circ(t)\| \leq 2|U|c \int_{t_i + \gamma_i}^t \mu\left([t_i + \gamma_i, s] \cap \bigcup_{r=1, \dots, \ell} [t^r, t^r + \tau^r]\right) ds < 2|U|c\xi_{i+1}\tau_i \leq \frac{\beta_i}{2},$$

так как $\tau_i \leq \tau_1^i \leq K \frac{\delta}{4} < 1$.

Покажем теперь, что для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$

$$(z_i^\ell(t_i + \tau), \dot{z}_i^\ell(t_i + \tau)) \neq -\|z_i^\ell(t_i + \tau)\| \|\dot{z}_i^\ell(t_i + \tau)\|. \quad (2.30)$$

Предположим противное: существуют

$$\tau_0 \in [\gamma_i, \tau_i], \quad q \in \mathbb{R}^1, \quad q > 0$$

такие, что $z_i^\ell(t_i + \tau_0) = -q\dot{z}_i^\ell(t_i + \tau_0)$. В силу неравенств (2.28), (2.29) получаем, что

$$\min_{t \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i]} \|z_i^\ell(t)\| \geq \frac{\beta_i}{2}, \quad (2.31)$$

$$z_i^\circ(t_i + \tau_0) \in z_i^\ell(t_i + \tau_0) + \frac{\beta_i}{2}S, \quad \dot{z}_i^\circ(t_i + \tau_0) \in \dot{z}_i^\ell(t_i + \tau_0) + \frac{\beta_i}{2}S, \quad (2.32)$$

то есть векторы $z_i^\circ(t_i + \tau_0)$, $\dot{z}_i^\circ(t_i + \tau_0)$ представимы в виде

$$z_i^\circ(t_i + \tau_0) = z_i^\ell(t_i + \tau_0) + x, \quad \dot{z}_i^\circ(t_i + \tau_0) = \dot{z}_i^\ell(t_i + \tau_0) + y,$$

где $x, y \in \frac{\beta_i}{2}S$, $S \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса 1 с центром в нуле. Пусть

$$\Sigma = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}.$$

Согласно (2.24)

$$\min_{\alpha \in \Sigma} \|\alpha_1(z_i^\ell(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2(\dot{z}_i^\ell(t_i + \tau_0) + y)\| \geq \beta_i.$$

С другой стороны, при $\alpha_1^* = \frac{1}{1+q}$, $\alpha_2^* = \frac{q}{1+q}$

$$\|\alpha_1^*(z_i^\ell(t_i + \tau_0) + x) + \alpha_2^*(\dot{z}_i^\ell(t_i + \tau_0) + y)\| = \|\alpha_1^*x + \alpha_2^*y\| \leq \frac{\beta_i}{2}.$$

Следовательно, неравенство (2.30) выполнено для любого $\tau \in [\gamma_i, \tau_i]$.

В момент $t = t_i + \gamma_i$ по ξ_{i+1} определим последовательность $\{\tau_{i+1}^\ell\}_{\ell=i+1}^\infty$ следующим образом:

$$\tau_{i+1}^{i+1} = \min\{\tau_i^{i+1}, \frac{\xi_{i+1}}{2}\}, \quad \tau_{i+1}^{i+k} = \frac{\tau_{i+1}^{i+1}}{2^{k-1}}, \quad k \geq 2.$$

Понятно, что

$$\sum_{k=1}^{n-i} \tau_{i+1}^{i+k} < \xi_{i+1}.$$

По этой последовательности строим последовательность

$$\{\delta_{i+1}^{i+k}\}_{k=1}^\infty, \quad \delta_{i+1}^{i+k} = \delta\tau_{i+1}^{i+k}.$$

Положим $\delta_{i+1} = \delta_{i+1}^{i+1}$, $\tau_{i+1} = \tau_{i+1}^{i+1}$. Нетрудно видеть, что $\delta_{i+1} \leq \tau_{i+1}^{i+1} \leq \frac{\beta_i}{8}$. Учитывая (2.31), убеждаемся в справедливости неравенств (2.21), (2.22).

Итак, управление $v(s)$ при $s \in [t_i, t_i + \gamma_i]$ выбираем из соотношений (2.19) и

$$v(s) = u_i(s), \quad s \in [t_i + \gamma_i, t_i + \tau_i] \setminus \bigcup_{p=i+1, \dots, n} [t_p, t_p + \tau_p],$$

если $i < n$,

$$v(s) = u_n(s), \quad s \in [t_n + \gamma_n, t_n + \tau_n].$$

Тогда $\|z_i(t)\| \neq 0$ при $t \in [t_i, t_i + \tau_i]$ и $(z_i(t), p) < 0$ при $t \geq t_i + \tau_i$, $i = 1, \dots, n$.

Отметим, что сближения преследователей с убегающим могут наступать не позже момента

$$t_0 + \frac{\max_{i=1, \dots, n} (z_i^0, p)}{\delta}.$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прокопович П. В., Чикрий А. А. Одна дифференциальная игра убегания // ДАН УССР. — 1989. — № 1. — С. 71–74.
2. Чикрий А. А., Прокопович П. В. Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30, № 6. — С. 998–1003.
3. Банников А. С. Об одной задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 3–11.
4. Благодатских А. И. О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2007. — Вып. 1. — С. 17–24.

Поступила в редакцию 23.11.09

A. S. Bannikov

Evasion from group of non-stationary inertial objects

Differential game of group of persecutors and one evader is considered under equal dynamic possibilities of all players. Sufficient conditions of evasion in a counter-strategy class are received.

Keywords: differential game, position counterstrategy, evasion.

Mathematical Subject Classifications: 49N75

Банников Александр Сергеевич, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4),

E-mail: bannikov_a_s@mail.ru