Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Gryzlov, E. S. Bastrykov, R. A. Golovastov, About points of compactification of N , *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, Issue 3, 10–17

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.209.158.208

April 26, 2023, 16:41:48

МАТЕМАТИКА

УДК 515.122.536

© А. А. Грызлов, Е. С. Бастрыков, Р. А. Головастов

О ТОЧКАХ ОДНОГО БИКОМПАКТНОГО РАСШИРЕНИЯ N

Изучается бикомпактное расширение счётного дискретного пространства, построенное как пространство Стоуна одной булевой алгебры. Получены новые классы точек этого расширения.

Ключевые слова: бикомпактное расширение, пространство Стоуна булевой алгебры, центрированные системы множеств.

Введение

Наиболее изученным и изучаемым бикомпактным расширением счётного дискретного пространства N является его расширение Чеха–Стоуна βN .

Решая вопрос о существовании бикомпактного расширения счётного дискретного пространства, на рост которого несепарабелен, но удовлетворяет условию Суслина, М. Белл построил [1] расширение BN счётного дискретного пространства N как пространство Стоуна некоторой булевой алгебры подмножеств N . Отметим, что и расширение βN является пространством Стоуна булевой алгебры всех подмножеств N .

Дальнейшее изучение расширения BN , построенного Беллом, обнаруживает другие интересные свойства этого пространства. В продолжение исследований М. Белла в [2] были получены свойства этого расширения, позволяющие использовать его для построения некоторых слабых p -точек в βN .

В [3] изучались замыкания различных подмножеств в расширении Белла. Новая база, построенная в [3], позволила получить интересные результаты. Так было показано существование подмножеств $N \subseteq BN$, замыкания которых гомеоморфны βN , и подмножеств BN , являющихся сходящимися последовательностями, и были изучены их свойства.

В работе [4] получены характеристики точек $BN \setminus N$, являющихся пределами сходящихся последовательностей.

В данной работе продолжено изучение расширения Белла. Получены точки $BN \setminus N$, определяемые центрированными семействами различного вида. В первой части работы рассматриваются различные свойства центрированных семейств, необходимые, в частности, и в дальнейшем. Вторая часть содержит основные результаты — теоремы 4, 5, 6, 7. В этих теоремах строятся так называемые u - и ℓ -точки расширения BN и показывается существование точек в $BN \setminus N$, не являющихся ни u -, ни ℓ -точками.

§ 1. Предварительные результаты

Обозначения в работе стандартны для отечественной литературы.

Приведём конструкцию расширения Белла [1].

Пусть $P = \{f \in \omega^\omega : 0 \leq f(n) \leq n + 1 \text{ для всех } n < \omega\}$. Определим множество

$$N = \{f|_n : f \in P, n < \omega\}$$

всех сужений отображений $f \in P$ на $n < \omega$. Здесь и далее буквой n обозначаем, в зависимости от контекста, как натуральное число, так и подмножество $n = \{0, \dots, n-1\}$.

Отметим, что множество $N = \{f|_n : f \in P, n < \omega\}$ является частично упорядоченным множеством со следующим отношением порядка: для $s, t \in N$ отношение $s \leq t$ имеет место тогда и только тогда, когда t является продолжением s .

Пусть $T = \{ \pi \in N^\omega : \text{dom}(\pi(n)) = n+1 \text{ для всех } n < \omega \}$, где под $\text{dom } s$ понимается область определения отображения $s \in N$. Для каждого $s \in N$ положим $C_s = \{ t \in N : t|_{\text{dom } s} = s \}$. Для $\pi \in T$ положим $C_\pi = \bigcup \{ C_{\pi(n)} : n < \omega \}$. Отметим, что C_π и $N \setminus C_\pi$ бесконечны для всякого $\pi \in T$. Пусть B — булева алгебра, порождённая множествами из

$$B' = \{ C_\pi : \pi \in T \} \cup \{ N \setminus C_\pi : \pi \in T \}.$$

Заметим, что $\{ \{s\} : s \in N \} \cup \{ C_s : s \in N \} \subseteq B$. Определим BN как пространство Стоуна построенной булевой алгебры B . Это расширение и является расширением Белла [1].

Из конструкции расширения Белла следует, что всякая точка нароста $BN \setminus N$ — это ультра-фильтр булевой алгебры B , базой которого является семейство бесконечных множеств вида

$$\left(\bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} \right) \cap \left(N \setminus \bigcup_{j \leq m} C_{\pi_j} \right).$$

Отметим, что замыкание элемента булевой алгебры в BN является открыто-замкнутым подмножеством BN . Для множества $A \subseteq BN$ через $[A]$ будем обозначать замыкание A в BN , для множества $A \subseteq N$ обозначим $A^* = [A] \setminus A$. Приведём необходимые для дальнейшего свойства расширения BN , полученные в [3].

Для $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ обозначим $C_{\pi|M} = \bigcup \{ C_{\pi(n)} : n \in M \}$.

Лемма 1. $C_{\pi|M}$ — элемент булевой алгебры B .

Лемма 2. Для всякого семейства $\{ C_{\pi_i|M_i} : i \leq n \}$, где $n \in \omega$, выполнено равенство

$$\bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i|M_i} = \bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i|M'_i}, \quad \text{где} \quad M'_i \subseteq M_i, \quad i \leq n.$$

Теорема 1. Семейство

$$\left\{ C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i} : \pi, \pi_i \in T, M \subseteq \omega, n \in \omega \right\}$$

образует базу BN , а наросты элементов этого семейства образует базу $BN \setminus N$.

Теорема 2. Пусть $\{ C_{s_i} : i \in \omega \}$ — дизъюнктное семейство множеств, $\text{dom } s_i \neq \text{dom } s_j$ для всех $i \neq j$, и $X = \{ x_i : i \in \omega \}$ такое, что $x_i \in [C_{s_i}]$. Тогда $[X]$ гомеоморфно βN .

Теорема 3. Пусть $A = \{ s_i : i \in \omega \}$ — бесконечная цепь в N . Тогда A является сходящейся последовательностью в BN .

§ 2. Максимальные центрированные системы

Уточним некоторые определения и понятия. Пусть μ — некоторое семейство бесконечных подмножеств N .

Определение 1. Систему бесконечных множеств $\alpha = \{F\}$ будем называть *центрированной системой*, если для любой конечной подсистемы $\alpha' \subseteq \alpha$ множество $\bigcap \{ F : F \in \alpha' \}$ бесконечно. Центрированную систему $\alpha = \{F\}$ будем называть *центрированной системой в семействе μ* , если $\alpha \subseteq \mu$.

Мы будем рассматривать прежде всего максимальные центрированные системы различных семейств, состоящих из элементов булевой алгебры B . Заметим, что максимальная центрированная система в семействе подмножеств необязательно замкнута относительно конечных пересечений. Отметим также, что максимальной центрированной в булевой алгебре является ультрафильтр этой булевой алгебры.

Определение 2. Пусть $\alpha = \{F\}$ — центрированная система в семействе μ . Подмножество $A \subseteq N$ назовём *центрированным с системой $\alpha = \{F\}$* , если для каждой конечной подсистемы $\alpha' \subseteq \alpha$ выполнено следующее условие: множество $\left(\bigcap \{ F : F \in \alpha' \} \right) \cap A$ бесконечно.

Определение 3. Будем говорить, что центрированная система $\alpha = \{F\}$ вписана в центрированную систему $\alpha' = \{G\}$, если для любого элемента $G \in \alpha'$ найдётся $F \in \alpha$ такой, что $F \subseteq G$.

Лемма 3. Пусть $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_{\pi|M} : \pi \in T, M \subseteq \omega\}$, и множество $C_{\pi'|M'}$ таково, что $C_{\pi'|M'} \cap C_{\pi|M}$ — бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$. Тогда $C_{\pi'|M'} \in \xi$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный конечный набор элементов системы ξ , $\{C_{\pi_k|M_k} : k \leq n\}$. В силу леммы 2 найдётся набор $\{M'_k : k \leq n\}$ такой, что $M'_k \subseteq M_k$ для каждого $k = 1, \dots, n$, и

$$\bigcap_{k \leq n} C_{\pi_k|M_k} = \bigcup_{k \leq n} C_{\pi'_k|M'_k}.$$

Докажем, что найдётся k_0 такое, что $C_{\pi_{k_0}|M'_{k_0}} \in \xi$. Предположим противное. Пусть для каждого $k = 1, \dots, n$ найдётся конечный набор $\{C_{\pi_\ell^k|M_\ell^k} : \ell \leq n_k\}$ такой, что

$$C_{\pi_k|M'_k} \cap \left(\bigcap_{\ell \leq n_k} C_{\pi_\ell^k|M_\ell^k} \right) \text{ конечно.}$$

Тогда

$$\left(\bigcup_{k \leq n} C_{\pi'_k|M'_k} \right) \cap \left(\bigcap_{k \leq n} \bigcap_{\ell \leq n_k} C_{\pi_\ell^k|M_\ell^k} \right) = \left(\bigcap_{k \leq n} C_{\pi_k|M_k} \right) \cap \left(\bigcap_{k \leq n} \bigcap_{\ell \leq n_k} C_{\pi_\ell^k|M_\ell^k} \right)$$

— конечно, что противоречит центрированности $\xi = \{C_{\pi|M}\}$. Отсюда и из максимальнойности ξ следует, что найдётся $C_{\pi_{k_0}|M'_{k_0}} \in \xi$ и, следовательно, $C_{\pi_{k_0}|M_{k_0}} \in \xi$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. Для всякого множества вида $C_{\pi|M}$ существуют два элемента π_1 и $\pi_2 \in T$ такие, что $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$.

Доказательство. Пусть $M = \{k_1, k_2, \dots, k_j, \dots\}$. Построим π_1 и $\pi_2 \in T$ следующим образом. Для $0 \leq n < k_1$ определим элемент $\pi_1(n)$ тождественно равным 0 на множестве n , а элемент $\pi_2(n)$ определим тождественно равным 1 на множестве n . Для $k_j \leq n < k_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots$) определим $\pi_1(n)$ и $\pi_2(n)$ как продолжение $\pi(k_j)$ на n . Из построения π_1 и π_2 вытекает требуемое свойство для C_{π_1} и C_{π_2} : $C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2} = C_{\pi|M}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. Пусть $\alpha' = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_{\pi|M} : \pi \in T, M \subseteq \omega\}$. Тогда $\alpha = \{C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha'\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_\pi : \pi \in T\}$.

Доказательство. Пусть $\alpha' = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_{\pi|M} : \pi \in T, M \subseteq \omega\}$. Предположим, что $\alpha = \{C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha'\}$ не максимальна. Тогда найдётся $\pi' \in T$ такое, что $C_{\pi'} \cup \left(\bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} \right)$ бесконечно для любого конечного набора $\{C_{\pi_i} : i \leq n\}$, но $C_{\pi'} \notin \alpha'$.

В силу леммы 3 найдётся $C_{\pi_0|M_0} \subseteq \alpha'$ такое, что $C_{\pi'} \cap C_{\pi_0|M_0}$ конечно. В силу леммы 4 найдутся множества $C_{\hat{\pi}_0}$ и $C_{\hat{\pi}_1}$ такие, что $C_{\hat{\pi}_0} \cap C_{\hat{\pi}_1} = C_{\pi_0|M_0}$. Отсюда следует, с одной стороны, что $(C_{\hat{\pi}_0} \cap C_{\hat{\pi}_1}) \cap C_{\pi'}$ конечно, с другой стороны, $C_{\hat{\pi}_0}, C_{\hat{\pi}_1} \in \alpha$; это следует из того, что $C_{\pi|M_0} \in \alpha'$ и $\alpha \subseteq \alpha'$. Получаем противоречие. Тем самым максимальность системы $\alpha = \{C_\pi : C_{\pi|M} \in \alpha'\}$ показана. $\square$

Непосредственными вычислениями доказывается следующее утверждение.

Лемма 6. 1. Если $\alpha = \{C_\pi\}$ — максимальная центрированная система в семействе $\{C_\pi : \pi \in T\}$, то $\alpha' = \left\{ \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} : n \in \omega, \pi_i \in \alpha \right\}$ — максимальная центрированная система в семействе $\left\{ \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} : n \in \omega, \pi_i \in T \right\}$.

2. Если $\alpha' = \{C\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\left\{ C = \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} : n \in \omega, \pi_i \in T \right\},$$

то система

$$\left\{ C_{\pi} : \text{найдётся } C \in \alpha', C = \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} \text{ такое, что } C_{\pi} = C_{\pi_i} \right\}$$

— максимальная центрированная система в семействе $\{C_{\pi} : \pi \in T\}$.

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 7. Если $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе множеств $\{C_{\pi|M} : \pi \in T, M \subseteq \omega\}$, то для всякого конечного набора множеств $\alpha' \subseteq \alpha$ найдётся $C_{\pi_0|M_0} \in \alpha$ такое, что $C_{\pi_0|M_0} \subseteq \bigcap \{C_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \alpha'\}$.

Лемма 8. Для максимальной центрированной системы $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$ в семействе множеств $\{C_{\pi|M} : \pi \in T, M \subseteq \omega\}$ существует максимальная центрированная система $\alpha'' = \{C\}$ в семействе $\{C = \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} : n \in \omega, \pi_i \in T\}$ такая, что $\alpha'' = \{C\}$ вписана в $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\{C_{\pi|M} : \pi \in T, M \subseteq \omega\}.$$

В силу леммы 5 система $\alpha' = \{C_{\pi} : C_{\pi|M} \in \alpha\}$ — максимальная центрированная система в семействе $\{C_{\pi} : \pi \in T\}$. В силу леммы 6 всевозможные конечные пересечения элементов системы α' образуют максимальную центрированную систему $\alpha'' = \{C\}$ в семействе $\{C = \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} : n \in \omega, \pi_i \in T\}$. Покажем, что $\alpha'' = \{C\}$ вписан в α . Действительно, пусть $C_{\pi|M} \in \alpha$. В силу леммы 4 $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$ для некоторых $\pi_1, \pi_2 \in T$. Тогда $\pi_1, \pi_2 \in \alpha'$, а их пересечение $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2} \in \alpha''$. Таким образом α'' вписана в α . Лемма доказана. $\square$

Лемма 9. Для максимальной центрированной системы $\alpha = \{C\}$ в семействе

$$\left\{ C = \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} : n \in \omega, \pi_i \in T \right\}$$

существует максимальная центрированная система $\alpha' = \{C_{\pi|M}\}$ в семействе

$$\{C_{\pi|M} : \pi \in T, M \subseteq \omega\},$$

вписанная в α .

Доказательство. Пусть $\alpha = \{C\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\left\{ C = \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} : n \in \omega, \pi_i \in T \right\}.$$

Рассмотрим семейство множеств $\alpha' = \{C_{\pi|M} : C_{\pi|M} \text{ центрировано с } \alpha\}$. Покажем, что α' искомая. В силу леммы 4 всякое множество $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$. Так как $C_{\pi|M}$ центрирована с $\alpha = \{C\}$, отсюда следует, что $C_{\pi_1}, C_{\pi_2} \in \alpha$. Таким образом, всякий элемент $C_{\pi|M} \in \alpha'$ является элементом системы $\alpha = \{C\}$. Следовательно, система $\alpha' = \{C_{\pi|M} : C_{\pi|M} \text{ центрировано с } \alpha\}$ центрирована. Докажем максимальность системы α' и то, что α' вписана в α .

Пусть C — произвольный элемент системы α , то есть $C = \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i}$. В силу леммы 2 $C = \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i} = \bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i|M_i}$. В силу центрированности $\alpha = \{C\}$ среди множеств $C_{\pi_i|M_i}$ ($i \leq n$) найдётся $C_{\pi_{i_0}|M_{i_0}}$, центрированное с $\alpha = \{C\}$, то есть $C_{\pi_{i_0}|M_{i_0}} \in \alpha'$. Отсюда следует, что α' вписано в α . Отсюда же легко выводится и максимальность системы α' . Лемма доказана. $\square$

§ 3. u -точки и ℓ -точки пространства BN

Как было указано во введении, точка нароста $BN \setminus N$ — это свободный ультрафильтр булевой алгебры B , базу которого образуют бесконечные множества вида

$$\left(\bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i}\right) \cap \left(N \setminus \bigcup_{j \leq m} C_{\pi_j}\right).$$

Базой каждого ультрафильтра является также и семейство множеств вида

$$C_{\pi|M} \cap \left(N \setminus \bigcup_{j \leq m} C_{\pi_j}\right).$$

Возникают вопросы, что из себя представляют максимальные центрированные семейства, состоящие из множеств вида $C_{\pi|M}$, или $\bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i}$, или $N \setminus \bigcup_{j \leq m} C_{\pi_j}$. Ответы на эти вопросы дают следующие теоремы.

Теорема 4. Если $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\{C_{\pi|M} : \pi \in T, M \subseteq \omega\},$$

$$то \left| \bigcap \{C_{\pi|M}^* : C_{\pi|M} \in \xi\} \right| = 1.$$

Доказательство. Из центрированности системы $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ и бикомпактности BN следует, что $\bigcap \{C_{\pi|M}^* : C_{\pi|M} \in \xi\} \neq \emptyset$.

Покажем, что $\left| \bigcap \{C_{\pi|M} : C_{\pi|M} \in \xi\} \right| = 1$. Предположим противное, пусть найдутся две различные точки $x, y \in \bigcap \{C_{\pi|M}^* : C_{\pi|M} \in \xi\}$. Рассмотрим некоторую окрестность

$$O_x = \left[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i} \right] = [C_{\pi_0|M_0}] \setminus \left[\bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i} \right]$$

точки x такую, что $O_x \not\ni y$. Множество $[C_{\pi_0|M_0}]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим точку x , следовательно, множество $C_{\pi_0|M_0} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$. Из леммы 3 следует, что $C_{\pi_0|M_0} \in \xi$, и, следовательно, $[C_{\pi_0|M_0}] \ni y$. Так как $O_x \not\ni y$, получаем, что $y \in \left[\bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i} \right] = \bigcup_{i \leq n} [C_{\pi_i}]$. Тогда найдётся $i_0 \leq n$ такое, что $y \in [C_{\pi_{i_0}}]$. Так как $[C_{\pi_{i_0}}]$ является открыто-замкнутым множеством, содержащим y , и $y \in \bigcap \{C_{\pi|M}^* : C_{\pi|M} \in \xi\}$, получаем, что $C_{\pi_{i_0}} \cap C_{\pi|M}$ бесконечно для всякого $C_{\pi|M} \in \xi$, и из леммы 3 вытекает, что $C_{\pi_{i_0}} \in \xi$. Но тогда мы получим, что $\bigcap \{C_{\pi|M}^* : C_{\pi|M} \in \xi\} \subseteq C_{\pi_{i_0}}^*$ и, следовательно, $x \notin \bigcap \{C_{\pi|M}^* : C_{\pi|M} \in \xi\}$. Это противоречие доказывает теорему. $\square$

Из теоремы 4 и леммы 9 получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Если $\xi = \{C\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\left\{ C = \bigcap_{i \leq n} C_{\pi_i|M_i} : n \in \omega, \pi_i \in T \right\},$$

$$то \left| \bigcap \{C^* : C \in \xi\} \right| = 1.$$

Аналогично теореме 4 доказывается следующая теорема.

Теорема 6. Если $\xi = \{G\}$ — максимальная центрированная система в семействе

$$\left\{ G = N \setminus \bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i} : n \in \omega, \pi_i \in T \right\},$$

$$то \left| \bigcap \{G^* : G \in \xi\} \right| = 1.$$

Доказательство. Из центрированности системы $\xi = \{G\}$ и бикompактности BN следует, что $\bigcap \{G^* : G \in \xi\} \neq \emptyset$. Предположим, что найдутся две различные точки $x, y \in \bigcap \{G^* : G \in \xi\}$. Рассмотрим некоторую окрестность $O_x = [C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i}]$ точки x такую, что $y \notin O_x$. Заметим, что

$$[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i}] = [C_{\pi_0|M_0}] \setminus [\bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i}] = [C_{\pi_0|M_0}] \setminus \left(\bigcup_{i \leq n} [C_{\pi_i}] \right).$$

Имеем: $[C_{\pi_0|M_0}]$ и $\bigcap_{i \leq n} [N \setminus C_{\pi_i}]$ — открыто-замкнутые множества, содержащие точку x . Отсюда и из максимальности ξ следует, что $\bigcap_{i \leq n} (N \setminus C_{\pi_i}) \in \xi$; из этого вытекает, что $\bigcap_{i \leq n} [N \setminus C_{\pi_i}] \ni y$. Так как $y \notin O_x$, получаем, что $y \notin [C_{\pi_0|M_0}]$. По лемме 4 $C_{\pi_0|M_0} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$ для некоторых $\pi_1, \pi_2 \in T$. Имеем $y \notin [C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}] = [C_{\pi_1}] \cap [C_{\pi_2}]$.

Пусть $y \notin [C_{\pi_1}]$. Тогда $y \in [N \setminus C_{\pi_1}]$. Из открыто-замкнутости множества $[N \setminus C_{\pi_1}]$ и максимальности ξ следует, что $N \setminus C_{\pi_1} \in \xi$. Отсюда $[N \setminus C_{\pi_1}] \ni x$, следовательно, $[C_{\pi_1}] \not\ni x$, что противоречит тому, что

$$[C_{\pi_1}] \supseteq [C_{\pi_0|M_0}] \ni x.$$

Это противоречие доказывает теорему. $\square$

Теоремы 4, 5 и 6 являются основанием для введения следующих определений.

Определение 4. Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *u-точкой*, если $x = \bigcap \{C_{\pi|M}^* : C_{\pi|M} \in \xi\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C_{\pi|M}\}$ в семействе множеств

$$\{C_{\pi|M} : \pi \in T, M \subseteq \omega\}.$$

Определение 5. Точку $x \in BN \setminus N$ назовём *ℓ-точкой*, если $x \in \bigcap \{C^* : C \in \xi\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{C\}$ в семействе множеств

$$\left\{ N \setminus \bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i} : n \in \omega, \pi_i \in T \right\}.$$

Из определений следует, что *u-точки* — суть точки $BN \setminus N$, которые имеют базу окрестностей в $BN \setminus N$, состоящую из множеств вида $C_{\pi|M}^*$, где $\pi \in T$, $M \subseteq \omega$, а *ℓ-точки* — суть точки $BN \setminus N$, которые имеют базу окрестностей в $BN \setminus N$, состоящую из множеств вида $(N \setminus \bigcup_{j \leq n} C_{\pi_j})^*$, где $\pi \in T$, $n \in \omega$.

В [4] доказана следующая теорема:

Для точки $x \in BN \setminus N$ следующие утверждения эквивалентны:

- (а) точка x есть предел некоторой цепи $\{s_k : k \in \omega\}$ элементов N ;
- (б) точка x имеет базу в $BN \setminus N$, состоящую из открыто-замкнутых окрестностей вида

$$\left(N \setminus \bigcup_{i \leq n} C_{\pi_i} \right)^*;$$

- (с) из того, что $x \in [C_{\pi|M}]$ для некоторых $\pi \in T$, $M \subseteq \omega$ следует, что существует $i \in M$ такое, что $x \in [C_{\pi(i)}]$.

Отсюда получаем, что каждое из условий (а) или (с) является необходимым и достаточным для того, чтобы точка $x \in BN \setminus N$ была *ℓ-точкой*.

В связи с полученными результатами возникает вопрос: существует ли в $BN \setminus N$ точка общего вида, то есть не *u-* и не *ℓ-точка*. Ответ на этот вопрос даёт теорема 7, доказываемая ниже.

Лемма 10. Если $X = \{x_i : i \in \omega\} \subseteq BN \setminus N$ — счётное подмножество, состоящее из *ℓ-точек*, то X дискретно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всякой точки $x_i \in X$ существует функция $f_i \in P$ такая, что

$$x_i \in F_{f_i} = \bigcap_{n \in \omega} [C_{f_i|n}].$$

Заметим, что семейство $\{[C_{f_i|n}] : n \in \omega\}$ образует базу F_{f_i} . Так как x_i ($i \in \omega$) являются ℓ -точками, то $F_{f_i} \cap F_{f_{i'}} = \emptyset$, если $i \neq i'$. Пусть $x_{i_0} \in X$. Покажем, что найдётся окрестность $O_{x_{i_0}}$ такая, что $O_{x_{i_0}} \cap (X \setminus \{x_{i_0}\}) = \emptyset$. Для всякой точки $x_i \in X$, $i \neq i_0$ рассмотрим множество $C_{f_i|n_i}$ такое, что $x_i \in F_{f_i} \subset [C_{f_i|n_i}]$ и $x_{i_0} \notin [C_{f_i|n_i}]$. Можно считать, что $n_i \neq n_{i'}$, если $i \neq i'$. Для множества

$$\bigcup_i \{C_{f_i|n_i} : i \neq i_0\}$$

имеем:

$$x_{i_0} \notin \left[\bigcup_i \{C_{f_i|n_i} : i \neq i_0\} \right].$$

В противном случае по свойству ℓ -точек нашёлся бы номер $i^* \in \omega$, $i^* \neq i_0$ такой, что $[C_{f_{i^*}|n_{i^*}}] \ni x_{i_0}$, что противоречит построению. Итак,

$$x_{i_0} \notin \left[\bigcup_i \{C_{f_i|n_i} : i \neq i_0\} \right],$$

тогда

$$O_x = \left[N \setminus \bigcup_i \{C_{f_i|n_i} : i \neq i_0\} \right]$$

не пересекается с $X \setminus \{x_{i_0}\}$ и является искомой. Лемма доказана. $\square$

Теорема 7. Пусть $\{C_{s_i} : i \in \omega\}$ — семейство дизъюнктивных подмножеств BN , $x_i \in C_{s_i}$ — ℓ -точка ($i \in \omega$) и $X = \{x_i : i \in \omega\}$. Тогда $[X] \setminus X$ гомеоморфно $\beta N \setminus N$ и состоит из точек, не являющихся ни ℓ -точками, ни u -точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $[X]$ гомеоморфно βN в силу теоремы 2.

Рассмотрим $X = \{x_i : i \in \omega\}$. Пусть $x \in [X] \setminus X$. Точка x не является ℓ -точкой, так как в противном случае, в силу леммы 10, множество $\{x\} \cup X$ было бы дискретным.

Покажем, что x не является u -точкой. По условиям теоремы $x_i \in C_{s_i}$ для всякого $i \in \omega$. Пусть $F_{f_i} = \bigcap_n [C_{f_i|n}]$, где $f_i \in P$, — множество такое, что $x_i \in F_{f_i} \subseteq C_{s_i}^*$. Отметим, что $\{[C_{f_i|n}] : n \in \omega\}$ является базой множества F_{f_i} в BN .

Покажем, что в N существуют счётные подмножества

$$A = \{t(i, n) : i, n \in \omega\} \quad \text{и} \quad B = \{q(i, n) : i, n \in \omega\},$$

обладающие следующими свойствами:

- (i) любые два элемента множества $A \cup B$ попарно несравнимы и имеют разные области определения;
- (ii) $[A] \cap F_{f_i} \neq \emptyset$ и $[B] \cap F_{f_i} \neq \emptyset$ для любого $i \in \omega$.

Пусть $\{L_i : i \in \omega\}$ — разбиение ω на счётное число дизъюнктивных бесконечных множеств.

Рассмотрим произвольное $i \in \omega$, C_{s_i} и $F_{f_i} = \bigcap_n [C_{f_i|n}] \subseteq C_{s_i}$. Пусть $N_i = \min\{n : [C_{f_i|n}] \subseteq C_{s_i}\}$. Нетрудно видеть, что мы можем построить множества $A_i = \{t(i, n) : n \in \omega\}$ и $B_i = \{q(i, n) : n \in \omega\}$, для которых выполнены следующие условия:

- 1) $t(i, n), q(i, n) \in C_{f_i|N_i+n} \setminus C_{f_i|N_i+n+1}$;
- 2) области определения различных элементов $A_i \cup B_i$ различны и являются элементами L_i ;
- 3) любые два элемента $A_i \cup B_i$ несравнимы.

Определим $A = \bigcup\{A_i : i \in \omega\}$, $B = \bigcup\{B_i : i \in \omega\}$. Множества A и B удовлетворяют условиям (i) и (ii). Условие (ii), очевидно, выполнено по построению. Для проверки (i) достаточно заметить, что если один элемент множества $A \cup B$ лежит в $A_i \cup B_i$, а другой — в $A_j \cup B_j$, и $i \neq j$, то они несравнимы, так как один из них лежит в C_{s_i} , а другой — в C_{s_j} , и, следовательно, один

является продолжением s_i , а другой — продолжением s_j , и s_i несравним с s_j . Области их определения различны, так как у одного она является элементом L_i , а у другого — элементом L_j , и $L_i \cap L_j = \emptyset$.

Итак, A и B построены. Заметим, что в силу условия (i) по теореме 2 $[A]$, $[B]$, $[A \cup B]$ гомеоморфны βN и, следовательно, $[A] \cap [B] = \emptyset$.

Покажем, что точка $x \in [X] \setminus X$ не является u -точкой. Предположим противное. Рассмотрим произвольную базисную окрестность точки x вида $O_x = [C_{\pi|M}] = [\cup \{C_s : s \in \pi(M)\}]$. Если $x_i \in X \cap O_x$, то $x_i \in [\cup \{C_s : s \in \pi(M)\}]$ и, так как x_i есть ℓ -точка, найдётся $s_0 \in \pi(M)$ такое, что $x_i \in [C_{s_0}]$, и, следовательно, $[C_{s_0}]$ является окрестностью F_{f_i} .

Так как $x_i \in F_{f_i} \subseteq \cap \{[C_{f_i|n}] : n \in \omega\}$, и $\{[C_{f_i|n}] : n \in \omega\}$ является базой множества F_{f_i} , то $[C_{s_0}]$ является окрестностью F_{f_i} и в силу условия (ii) $[C_{s_0}] \cap A \neq \emptyset$ и $[C_{s_0}] \cap B \neq \emptyset$. Следовательно, $O_x \cap A \neq \emptyset$ и $O_x \cap B \neq \emptyset$. Отсюда следует, что $x \in [A]$ и $x \in [B]$, то есть $x \in [A] \cap [B]$, что противоречит тому, что $[A] \cap [B] = \emptyset$. Таким образом, $x \in [X] \setminus X$ не u -точка. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bell M.G. Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. — 1980. — Vol. 5. — P. 11–25.
<http://topo.math.auburn.edu/tp/reprints/v05/tp05002s.pdf>
2. Грызлов А. А. О бикompактных расширениях дискретных пространств // Фундаментальная и прикладная математика. — 1996. — Т. 2, № 3. — С. 803–848.
<http://www.math.msu.su/~fpm/rus/96/963/96306t.htm>
3. Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. — 2010. — Vol. 35. — P. 177–185.
<http://topology.auburn.edu/tp/reprints/v35/>
4. Бастрыков Е. С. О некоторых точках расширения Белла счётного дискретного пространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. Вып. 4. — С. 3–6.
http://vst.ics.org.ru/uploads/vestnik/4_2009/vu09401.pdf

Поступила в редакцию 19.02.10

A. A. Gryzlov, E. S. Bastrykov, R. A. Golovastov
About points of compactification of N

We consider a compactification of a countable discrete space constructed as a Stone space of a Boolean algebra. Some new points of the compactification are constructed.

Keywords: compactification, Stone space of Boolean algebra, family of sets with finite intersection property.

Mathematical Subject Classifications: 54D35, 54D80, 54-06

Грызлов Анатолий Александрович, д. ф.-м. н., зав. кафедрой алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: gran_@mail.ru

Бастрыков Евгений Станиславович, аспирант, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: vporoshok@gmail.com

Головастов Роман Александрович, аспирант, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: gra4@mail.ru