Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. A. Zaitsev, S. N. Popova, E. L. Tonkov, Exponential stabilization of nonlinear control systems, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, Issue 3, 25–29

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.80.97.219

April 26, 2023, 17:28:15

УДК 517.977+517.926

© В. А. Зайцев, С. Н. Попова, Е. Л. Тонков

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ¹

Получено новое достаточное условие экспоненциальной стабилизируемости допустимого процесса нелинейной управляемой системы.

Ключевые слова: нелинейная управляемая система, линейная управляемая система, экспоненциальная стабилизируемость.

В этой статье получено достаточное условие экспоненциальной стабилизируемости допустимого процесса нелинейной управляемой системы. Доказательство основано на результатах об управлении асимптотическими инвариантами линейных систем, в частности, о стабилизации линейных управляемых систем [1]–[5].

Введем необходимые обозначения. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — канонический ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|$, определяемой равенством $\|x\| = \sqrt{x^*x}$ (звездочка означает транспонирование); $B_h^n(\hat{x}) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \hat{x}\| < h\}$. Через M_{mn} будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ (при $m = n$ пишем M_n) со спектральной нормой, то есть операторной нормой, индуцируемой в M_{mn} евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Для любого набора векторов $\xi_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, n$, запись $[\xi_1, \dots, \xi_n]$ будет обозначать матрицу из M_{kn} , имеющую своими столбцами векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$; $E = [e_1, \dots, e_n] \in M_n$ — единичная матрица; $\text{Sp } A$ — след квадратной матрицы A . Для произвольной не равной тождественно нулю функции $\psi : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим $\lambda[\psi] = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln |\psi(t)|$ — показатель Ляпунова функции $\psi(\cdot)$ [6, с. 121]. Для линейной однородной дифференциальной системы $\dot{y} = A(t)y$, $y \in \mathbb{R}^n$ с кусочно непрерывной и ограниченной на полуоси $[t_0, +\infty)$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$ обозначим через $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ полный спектр показателей Ляпунова [6, с. 145], $\sigma_L(A) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(A) - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(s) ds$ — коэффициент неправильности Ляпунова [6, с. 271].

Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (1)$$

Будем предполагать, что функция $f(t, x, u)$ непрерывна по переменной t и имеет непрерывные частные производные по переменным x и u на множестве $(t, x, u) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Допустимым управлением в системе (1) называем произвольную кусочно непрерывную функцию $u : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$. *Допустимым решением* называем продолжаемое на всю полуось $[t_0, +\infty)$ решение $x(\cdot)$ системы (1), в которой выбрано допустимое управление $u(\cdot)$. *Допустимым процессом* системы (1) называем пару $(x(\cdot), u(\cdot))$, состоящую из допустимого управления $u(\cdot)$ и соответствующего ему допустимого решения $x(\cdot)$.

Определение 1. Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ системы (1) называется *экспоненциально стабилизируемым*, если для каждого $\alpha > 0$ найдутся такие $\delta > 0$ и $c > 0$, что при всяком $x_0 \in B_\delta^n(\hat{x}(t_0))$ существует допустимое управление $u(\cdot)$, удовлетворяющее оценке

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq ce^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0,$$

¹Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

и такое, что решение $x(\cdot)$ системы (1) с выбранным $u(\cdot)$ и с начальным условием $x(t_0) = x_0$ определено на всей полуоси $[t_0, +\infty)$ и удовлетворяет оценке

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq ce^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

В задачах о стабилизации линейных управляемых систем ключевую роль играет понятие равномерной полной управляемости.

Определение 2 (Р. Калман [7]). Линейная управляемая система

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v, \quad (t, y, v) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\sigma > 0$ и $\beta_1, \beta_2 > 0$, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq t_0$ выполнено неравенство

$$\beta_1 \|\xi\|^2 \leq \xi^* W(t, t + \sigma) \xi \leq \beta_2 \|\xi\|^2;$$

здесь

$$W(t, t + \sigma) := \int_t^{t+\sigma} Y(t, s) B(s) B^*(s) Y^*(t, s) ds$$

— матрица Калмана системы (2), $Y(t, s)$ — матрица Коши однородной системы $\dot{y} = A(t)y$.

Теорема 1. Пусть $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ — допустимый процесс системы (1) такой, что:

- 1) матричная функция $A(t) := \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x} \Big|_{(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))}$ кусочно непрерывна и ограничена на $[t_0, +\infty)$;
- 2) матричная функция $B(t) := \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u} \Big|_{(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))}$ кусочно непрерывна и ограничена на $[t_0, +\infty)$;
- 3) линейная управляемая система (2) равномерно вполне управляема;
- 4) имеет место равенство

$$f(t, \hat{x}(t) + y, \hat{u}(t) + v) - f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = A(t)y + B(t)v + \varphi(t, y, v),$$

причем

$$\|\varphi(t, y, v)\| \leq \psi(t) \left\| \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \right\|^m, \quad (3)$$

при всех $(t, y, v) \in [t_0, +\infty) \times B_h^n(0) \times B_h^m(0)$, где $\lambda[\psi] \leq 0$, $m > 1$.

Тогда процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ экспоненциально стабилизируем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На множестве $(t, y, v) \in [t_0, +\infty) \times B_h^n(0) \times B_h^m(0)$ систему (1) перепишем в виде

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v + \varphi(t, y, v), \quad (4)$$

где функция $\varphi(t, y, v)$ удовлетворяет условию (3).

Возьмем произвольное $\alpha > \frac{2 + \sigma_L(A)}{m - 1}$ и положим $\mu = -2\alpha - \lambda_n(A)$. Пользуясь равномерной полной управляемостью системы первого приближения (2) и результатами работы [5, теорема 1], построим управление $v = V(t)y$, удовлетворяющее оценке $\sup_{t \geq t_0} \|V(t)\| \leq v_0$ и обеспечивающее асимптотическую эквивалентность замкнутой системы

$$\dot{y} = (A(t) + B(t)V(t))y \quad (5)$$

и системы

$$\dot{y} = (A(t) + \mu E)y \quad (6)$$

с выбранным μ . Полный спектр показателей Ляпунова системы (6) состоит из чисел

$$\lambda_k(A + \mu E) = \lambda_k(A) + \mu, \quad k = 1, \dots, n.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Л}}(A + \mu E) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k(A + \mu E) - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp}(A(s) + \mu E) ds = \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda_k(A) + \mu) - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t (\text{Sp } A(s) + n\mu) ds = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k(A) - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \text{Sp } A(s) ds = \sigma_{\text{Л}}(A). \end{aligned}$$

Поскольку коэффициент неправильности Ляпунова и полный спектр показателей Ляпунова являются асимптотическими инвариантами, выполнены равенства

$$\sigma_{\text{Л}}(A + BV) = \sigma_{\text{Л}}(A + \mu E) = \sigma_{\text{Л}}(A),$$

$$\lambda_k(A + BV) = \lambda_k(A + \mu E) = \lambda_k(A) + \mu, \quad k = 1, \dots, n.$$

Обозначим $\varphi_1(t, y) = \varphi(t, y, V(t)y)$. Система (4) с выбранным управлением $v(\cdot)$ принимает вид

$$\dot{y} = (A(t) + B(t)V(t))y + \varphi_1(t, y). \quad (7)$$

Положим $h_1 = \min\{h, h/v_0\}$. Пусть $t \geq t_0$, $\|y\| \leq h_1$. Тогда $\|y\| \leq h$ и $\|V(t)y\| \leq v_0 h_1 \leq h$, поэтому из оценки (3) получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(t, y)\| &= \|\varphi(t, y, V(t)y)\| \leq \psi(t) \left\| \begin{pmatrix} y \\ V(t)y \end{pmatrix} \right\|^m = \\ &= \psi(t) (\|y\|^2 + \|V(t)y\|^2)^{m/2} \leq \psi(t) \left((1 + v_0^2) \|y\|^2 \right)^{m/2} = \psi(t) (1 + v_0^2)^{m/2} \|y\|^m \doteq \psi_1(t) \|y\|^m, \end{aligned}$$

при этом $\lambda[\psi_1] = \lambda[\psi] \leq 0$.

Пусть $\Phi(t) = [\varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)]$ — нормальная фундаментальная матрица системы (5) такая, что

$$\lambda[\varphi^{(k)}] = \lambda_k(A + BV) = \lambda_k(A) + \mu, \quad k = 1, \dots, n.$$

Следуя [8] (см. также [6], с. 271–274), положим

$$D = \text{diag}(\lambda_1(A + BV) + \alpha, \dots, \lambda_n(A + BV) + \alpha) = \text{diag}(\lambda_1(A) + \mu + \alpha, \dots, \lambda_n(A) + \mu + \alpha)$$

и к системе (7) применим преобразование $y = \Phi(t)e^{-Dt}z$. Тогда

$$\dot{z} = Dz + g(t, z), \quad (8)$$

где

$$g(t, z) = e^{Dt}\Phi^{-1}(t)\varphi_1(t, \Phi(t)e^{-Dt}z),$$

при этом выполнены следующие свойства (см. [8]):

1) $\lambda[\Phi(t)e^{-Dt}] \leq -\alpha < 0$, поэтому найдется такое $c_1 > 0$, что при всех $t \geq t_0$ выполнено неравенство $\|\Phi(t)e^{-Dt}\| \leq c_1$. Обозначим $h_2 = h_1/c_1$. Тогда при всех $(t, z) \in [t_0, +\infty) \times B_{h_2}^n(0)$ получаем оценку

$$\|y\| \leq \|\Phi(t)e^{-Dt}\| \|z\| < c_1 \|z\| \leq c_1 h_2 = h_1,$$

то есть $(t, y) \in [t_0, +\infty) \times B_{h_1}^n(0)$.

2) При всех $(t, z) \in [t_0, +\infty) \times B_{h_2}^n(0)$:

$$\|g(t, z)\| \leq \tilde{\psi}(t)\|z\|^m,$$

где $\lambda[\tilde{\psi}] \leq \sigma_{\text{Л}}(A + BV) + (1 - m)\alpha = \sigma_{\text{Л}}(A) + (1 - m)\alpha < \sigma_{\text{Л}}(A) + (1 - m)\frac{2 + \sigma_{\text{Л}}(A)}{m - 1} = -2$.

Следовательно, при некотором $c_2 > 0$ и всех $t \geq t_0$ имеет место оценка $\tilde{\psi}(t) \leq c_2 e^{-t}$, поэтому при всех $t \geq t_0$

$$\int_{t_0}^t \tilde{\psi}(s) ds \leq c_2 \int_{t_0}^t e^{-s} ds = c_2(e^{-t_0} - e^{-t}) \leq c_2 e^{-t_0} \leq c_3. \quad (9)$$

Считаем, что $c_3 > 1$.

Положим $\delta = \frac{\min\{1, h_2\}}{2c_3 \|e^{D t_0} \Phi^{-1}(t_0)\|}$. Выберем произвольное $x_0 \in B_{\delta}^n(\hat{x}(t_0))$ и положим $y_0 = x_0 - \hat{x}(t_0)$. Тогда $y_0 \in B_{\delta}^n(0)$. Возьмем $z_0 = e^{D t_0} \Phi^{-1}(t_0) y_0$. Имеем неравенство

$$\|z_0\| < \frac{\min\{1, h_2\}}{2c_3} < \frac{h_2}{2c_3}.$$

Рассмотрим задачу Коши для системы (8) с начальным условием

$$z(t_0) = z_0. \quad (10)$$

Тогда в силу формулы Коши

$$z(t) = e^{D(t-t_0)} z_0 + \int_{t_0}^t e^{D(t-s)} g(s, z(s)) ds. \quad (11)$$

Решение интегрального уравнения (11) и задачи Коши (8), (10) определено на некотором полуинтервале $[t_0, t_0 + l)$, причем $\|z(t)\| < \min\{h_2, 1\}$ при всех $t \in [t_0, t_0 + l)$.

Поскольку D — диагональная матрица и ее наибольший элемент равен $\lambda_n(A) + \mu + \alpha = \lambda_n(A) - 2\alpha - \lambda_n(A) + \alpha = -\alpha$, имеем равенство $\|e^{D(t-s)}\| = e^{-\alpha(t-s)}$ при всех $t \geq s \geq t_0$. Следовательно, при всех $t \in [t_0, t_0 + l)$

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq e^{-\alpha(t-t_0)} \|z_0\| + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} \tilde{\psi}(s) \|z(s)\|^m ds < \\ &< e^{-\alpha(t-t_0)} \|z_0\| + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)} \tilde{\psi}(s) \|z(s)\| ds. \end{aligned}$$

Умножим полученное неравенство на $e^{\alpha(t-t_0)}$:

$$\|z(t)\| e^{\alpha(t-t_0)} < \|z_0\| + \int_{t_0}^t \tilde{\psi}(s) \|z(s)\| e^{\alpha(s-t_0)} ds.$$

На основании леммы Гронуолла–Беллмана [6, с. 108–109] и неравенства (9) получаем оценку

$$\|z(t)\| e^{\alpha(t-t_0)} < \|z_0\| \exp\left(\int_{t_0}^t \tilde{\psi}(s) ds\right) \leq \|z_0\| \exp\left(c_2 \int_{t_0}^t e^{-s} ds\right) \leq c_3 \|z_0\| < c_3 \cdot \frac{h_2}{2c_3} = \frac{h_2}{2},$$

поэтому при всех $t \in [t_0, t_0 + l)$

$$\|z(t)\| < \frac{h_2}{2} e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (12)$$

Следовательно, при каждом $t \in (t_0, t_0 + l)$ точка $(t, z(t))$ является внутренней точкой области $\{(t, z) \in (t_0, +\infty) \times B_{h_2}^n(0)\}$, откуда вытекает [6, с. 275] продолжительность решения $z(\cdot)$ на всю

полусось $[t_0, +\infty)$, и при каждом $t \geq t_0$ выполнена оценка (12). Тогда решение $y(\cdot)$ задачи Коши для системы (7) с начальным условием $y(t_0) = y_0$ задается равенством $y(t) = \Phi(t)e^{-Dt}z(t)$, определено при всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| < c_1\|z(t)\| < \frac{c_1 h_2}{2} e^{-\alpha(t-t_0)} = \frac{h_1}{2} e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Наконец, решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ и управлением $u(t) = \hat{u}(t) + v(t)$ задается равенством $x(t) = \hat{x}(t) + y(t)$, поэтому оно определено при всех $t \geq t_0$ и

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \frac{h_1}{2} e^{-\alpha(t-t_0)},$$

а для управления $u(\cdot)$ имеем оценку

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| = \|v(t)\| \leq \|V(t)y(t)\| \leq \frac{v_0 h_1}{2} e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

Полагая $c = \max\{1, v_0\}h_1/2$, получим требуемые неравенства. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т. 15, № 10. — С. 1804–1813.
2. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Известия вузов. Математика. — 1999. — № 2(441). — С. 60–67.
3. Зайцев В. А. Об управлении показателями Ляпунова и о λ -приводимости // Вестник Удмуртского университета. Ижевск. — 2000. — № 1. — С. 68–77.
4. Попова С. Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1048–1054.
5. Зайцев В. А. Ляпуновская приводимость и стабилизация нестационарных систем с наблюдателем // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 432–442.
6. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
7. Kalman R. E. Contributions to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. — 1960. — Vol. 5, № 1. — P. 102–119.
8. Массера Х. Л. К теории устойчивости // Математика: сб. переводов. М.: Изд-во иностр. лит., 1957. — 1:4. — С. 81–101.

Поступила в редакцию 01.03.10

V. A. Zaitsev, S. N. Popova, E. L. Tonkov

Exponential stabilization of nonlinear control systems

New sufficient condition of exponential stabilization of nonlinear control system is proved.

Keywords: nonlinear control system, linear control system, exponential stabilization.

Mathematical Subject Classifications: 34H15, 93D15

Зайцев Василий Александрович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: verba@udm.ru

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: ps@uni.udm.ru

Тонков Евгений Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: eltonkov@udm.ru