Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. I. Sumin, On singular controls in the sense of the pointwise maximum principle in distributed optimization problems, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, Issue 3, 70–80

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.164.48.24

April 26, 2023, 15:35:16

УДК 517.95

© В. И. Сумин

ОБ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЯХ ПОТОЧЕЧНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ¹

Показано, что для широкого класса распределенных оптимизационных задач характерно сильное вырождение особых управлений поточечного принципа максимума, когда вместе с принципом максимума, который можно рассматривать как необходимое условие оптимальности первого порядка при игольчатом варьировании управлений, вырождаются и необходимые условия второго порядка. Описан способ получения содержательных необходимых условий оптимальности сильно вырожденных особых управлений.

Ключевые слова: распределенные задачи оптимизации, управляемые вольтерровы функциональные уравнения, поточечный принцип максимума, особые управления.

Введение

Управления, особые в смысле *поточечного принципа максимума* (п.п.м.), на которых он вырождается, играют важную роль в теории оптимизации и ее приложениях (см., напр. [1–7]). Однако для распределенных систем вопросы получения *необходимых условий оптимальности* (н.у.о.) *особых управлений* (о.у.) изучены еще относительно слабо: в основном рассматривались управляемые системы Гурса–Дарбу и близкие им (см., напр. [2, 8–17]). Главные усилия были направлены на конструирование с учетом специфики таких систем формул приращения, удобных для вычисления старших вариаций функционалов. За допустимые брались обычно кусочно-непрерывные управления. Предполагалось, как правило, что каждому допустимому управлению отвечает единственное глобальное решение управляемой начально–краевой задачи. Принципиально важно изучение более широкого класса управлений — измеримых (см., напр. [3, с. 291], [4–7], [18, 19]), причем без указанного ограничительного условия на разрешимость управляемой начально–краевой задачи. Соответствующий достаточно общий способ изучения о.у. п.п.м., опирающийся на возможность представления управляемой начально–краевой задачи в форме функционального уравнения вида (1) в лебеговом пространстве и использующий теорию тензорных произведений лебеговых пространств для вычисления старших вариаций функционалов, был предложен в [20]. В [21–23] была представлена обобщающая способ [20] схема изучения о.у., обслуживающая широкий класс распределенных управляемых систем, описываемых вольтерровыми функциональными уравнениями вида (1) (самые разнообразные примеры начально–краевых задач для нелинейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с частными производными, приводимых к форме (1), можно найти, например, в [24]), а также обширный аксиоматически описанный в [21–23] класс способов варьирования, включающий большинство способов, традиционно использующихся в теории н.у.о. (классическое варьирование, игольчатое, импульсное на полосах, варьирование пакетами, сдвигом и др.). В данной статье дана конкретизация схемы [21–23] применительно к игольчатому варьированию. Показано, что для распределенных задач оптимизации достаточно характерно сильное вырождение о.у. п.п.м., когда вместе с п.п.м. (н.у.о. 1-го порядка при игольчатом варьировании) вырождаются и н.у.о. 2-го порядка (теоремы 5 и 8). Это происходит, если задача «устроена не слишком сложно» (теорема 4), как часто и бывает в приложениях. Получены содержательные н.у.о. сильно вырожденных о.у. (теоремы 7 и 9).

¹Финансовая поддержка РФФИ (грант 07-01-00495), аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)» Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект НК-13П-13).

Примем следующие соглашения: векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $\mathbf{R}^n$ — пространство n -векторов $a \equiv \{a^1, \dots, a^n\}$; $\langle a, b \rangle_n \equiv \sum_{i=1}^n a^i b^i$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbf{R}^n$; если $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{R}^n$, то $\{a_1, \dots, a_k\} \equiv \{a_i\}_{i=1}^k \equiv \{a_1^1, \dots, a_1^n, \dots, a_k^1, \dots, a_k^n\} \in \mathbf{R}^{kn}$; модуль вектора равен сумме модулей его компонент; если X, Y — нормированные пространства, то $\mathfrak{L}(X, Y)$ — класс линейных ограниченных операторов из X в Y , а норма в прямом произведении $X \times Y$ определяется формулой $\|\{x, y\}\|_{X \times Y} \equiv \|x\|_X + \|y\|_Y$; если X — функциональное пространство, то X^n — пространство n -вектор-функций, а $X^{n \times m}$ — $(n \times m)$ -матриц-функций, составленных из функций пространства X ; производная скалярной функции по векторному аргументу есть вектор-строка; знаком $*$ обозначаются операции перехода к сопряженному пространству и сопряженному оператору, операция транспонирования.

1. Оптимизационная задача. Рассмотрим управляемое функциональное уравнение

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \quad (1)$$

где: $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное, измеримое (по Лебегу) множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных² $t \equiv \{t^1, \dots, t^n\}$; $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}^m$ — функция, дважды дифференцируемая по $\mathbf{p}$ для всех $\mathbf{v}$ при почти всех t и вместе с производными f'_p, f''_{pp} измеримая по t для всех $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ и непрерывная по $\{\mathbf{p}, \mathbf{v}\}$ для почти всех t ; $A \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^l)$; $v(\cdot) \in L_\infty^s$ — управление из класса $\mathcal{D} \equiv \{v \in L_\infty^s : v(t) \in U, t \in \Pi\}$, множество $U \subset \mathbf{R}^s$ ограничено. Будем предполагать выполненными сформулированные ниже условия **К**), а)–в).

К) Функции f, f'_p, f''_{pp} ограничены на любом ограниченном множестве. Это означает, что существует функция $\mathcal{N}(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ такая, что при любом $v \in \mathcal{D}$

$$|f(t, \mathbf{p}, v(t))| \leq \mathcal{N}(M), \quad |f'_p(t, \mathbf{p}, v(t))| \leq \mathcal{N}(M), \quad |f''_{pp}(t, \mathbf{p}, v(t))| \leq \mathcal{N}(M), \quad \text{если } t \in \Pi, \quad |\mathbf{p}| \leq M.$$

а) Оператор A имеет квазинильпотентную положительную мажоранту $B \in \mathfrak{L}(L_1, L_1)$.

б) $B[L_\infty] \subset L_\infty$.

Из условия б) получаем (см. [25, с. 30]), что формула $B_\infty[z] \equiv B[z]$, $z \in L_\infty$ определяет оператор $B_\infty \in \mathfrak{L}(L_\infty, L_\infty)$. Условия **К**), а), б) позволяют говорить о решениях уравнения (1) класса L_∞^m .

Следуя [24, с. 15], будем называть оператор $\mathcal{F}$, действующий из L_p^n в пространство измеримых на Π вектор-функций, вольтерровым на некоторой системе T измеримых подмножеств Π , если для любого $H \in T$ сужение $\mathcal{F}[z]|_H$ не зависит от значений $z(t)$ при $t \in \Pi \setminus H$. Обозначим через P_H оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H \subset \Pi$. Пусть $\delta > 0$ — некоторое число, T_* — система множеств $\{H_0, H_1, \dots, H_k\}$, где $\emptyset = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_k = \Pi$; положим $h_i \equiv H_i \setminus H_{i-1}$, $i = 1, \dots, k$. Если некоторый оператор $\mathcal{F} \in \mathfrak{L}(L_p, L_p)$ вольтерров на системе T_* и $\|P_{h_i} \mathcal{F} P_{h_j}\|_{L_p \rightarrow L_p} \leq \delta$ при $i = 1, \dots, k$, то, следуя [20, с. 24], назовем T_* вольтерровой δ -цепочкой оператора $\mathcal{F}$.

в) Для любого $\delta > 0$ у оператора B_∞ существует вольтеррова δ -цепочка³.

При сформулированных условиях управлению $v \in \mathcal{D}$ может отвечать не более одного в классе L_∞^m решения уравнения (1) [24, с. 37]. Будем считать, что семейство Ω тех управлений $v \in \mathcal{D}$, каждому из которых отвечает единственное в L_∞^m решение z_v уравнения (1), непусто. Пусть v_0 — фиксированный элемент Ω и $z_0 \equiv z_{v_0}$ — соответствующее управлению v_0 решение уравнения (1). Положим

$$\rho(v) \equiv \|B[\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)]\|_{L_\infty}, \quad v \in \mathcal{D},$$

используя обозначение

$$\Delta_{\mathbf{w}} f(t) \equiv f(t, A[z_0](t), \mathbf{w}) - f(t, A[z_0](t), v_0(t)), \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U.$$

²В обозначениях пространств значок Π , как правило, опускаем; в скалярном случае опускаем значок, обозначающий размерность. Например, вместо $L_p^m(\Pi)$, $L_p^1(\Pi)$ пишем соответственно L_p^m , L_p .

³Заметим, что из условия в) следует квазинильпотентность оператора B_∞ [26].

Справедлива следующая теорема об устойчивости (при возмущении управления) существования глобальных решений уравнения (1) (см., напр. [27, §3, теорема 4]).

Теорема 1. Для любого управления $v_0 \in \Omega$ существуют числа $\varkappa > 0$, $C > 0$ такие, что всякое управление $v \in \mathcal{D}$, удовлетворяющее неравенству $\rho(v) < \varkappa$, принадлежит Ω и при этом

$$\|z_v - z_0\|_{L_\infty^m} \leq C \|\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)\|_{L_\infty^m}, \quad \|A[z_v - z_0]\|_{L_\infty^l} \leq C\rho(v). \quad (2)$$

Пусть $F : L_1^m \rightarrow \mathbf{R}$ — некоторый функционал, дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше. Рассмотрим задачу оптимизации

$$J[v] \equiv F[z_v] \rightarrow \max, \quad v \in \Omega, \quad (3)$$

для определенности понимая ее как задачу нахождения L_1^s -локального максимума. Сформулируем н.у.о. типа п.п.м., которому удовлетворяет решение этой задачи. Везде ниже: v_0 — фиксированное решение задачи (3), $z_0 \equiv z_{v_0}$; v — некоторый элемент Ω , $\Delta z \equiv z_v - z_0$.

2. Принцип максимума. Определим оператор $S : L_1^m \rightarrow L_1^m$ формулой

$$S[z](t) \equiv z(t) - f'_p(t)A[z](t), \quad z \in L_1^m, \quad t \in \Pi,$$

где используется обозначение $f'_p(t) \equiv f'_p(t, A[z_0](t), v_0(t))$, $t \in \Pi$; очевидно, $S \in \mathcal{L}(L_1^m, L_1^m)$. Пусть $a_0[\cdot] \equiv F'(z_0)[\cdot]$ — производная Фреше функционала $F : L_1^m \rightarrow \mathbf{R}$ в точке z_0 , а $\omega \in L_\infty^m$ — функция Рисса функционала a_0 как элемента сопряженного пространства $(L_1^m)^*$. Уравнение

$$S^*[\psi] = \omega, \quad (4)$$

где $S^* \in \mathcal{L}(L_\infty^m, L_\infty^m)$ — сопряженный к S оператор, имеет единственное в L_∞^m решение ψ . Положим

$$\pi(t, \mathbf{w}) \equiv \langle \psi(t), \Delta_{\mathbf{w}} f(t) \rangle_m, \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U.$$

Для задачи (3) справедливо следующее н.у.о. в виде п.п.м.

Теорема 2. Для каждого $\mathbf{w} \in U$ при почти всех $\tau \in \Pi$ выполняется неравенство $\pi(\tau, \mathbf{w}) \leq 0$.

Докажем теорему 2, используя специальную асимптотическую формулу для приращения $\Delta_v J \equiv J[v] - J[v_0]$, $v \in \Omega$ целевого функционала. Положим

$$r(v) \equiv \|\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)\|_{L_1^m}, \quad r_1(v) \equiv \|\Delta_{v(\cdot)} f'_p(\cdot)\|_{L_1^{m \times l}}, \quad v \in \mathcal{D},$$

где

$$\Delta_{\mathbf{w}} f'_p(t) \equiv f'_p(t, A[z_0](t), \mathbf{w}) - f'_p(t, A[z_0](t), v_0(t)), \quad t \in \Pi, \quad \mathbf{w} \in U.$$

Теорема 3. Справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \Delta_v J &= \int_{\Pi} \pi(t, v(t)) dt + o(r(v) + r_1(v)), \\ r(v) &\rightarrow 0, \quad r_1(v) \rightarrow 0, \quad \rho(v) \rightarrow 0 \quad (v \in \Omega). \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство теоремы 3. По теореме о конечных приращениях в интегральной форме

$$\Delta z(t) = \left\{ \int_0^1 f'_p(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v(t)) d\xi \right\} A[\Delta z](t) + \Delta_{v(t)} f(t), \quad t \in \Pi, \quad (6)$$

$$\Delta_v J = a_0[\Delta z] + \theta_0, \quad (7)$$

где $\theta_0 \equiv \int_0^1 \{F'(z_0 + \xi \Delta z) - F'(z_0)\} d\xi [\Delta z]$. С помощью (4), (6) формула (7) переписывается в виде

$$\Delta_v J = \int_{\Pi} \langle \psi, \Delta_{v(t)} f(t) \rangle dt + \theta_0 + \theta_1, \quad (8)$$

$$\theta_1 \equiv \int_{\Pi} \left\langle \psi(t), \int_0^1 \{f'_p(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v) - f'_p(t)\} d\xi \cdot A[\Delta z](t) \right\rangle_m dt.$$

В силу (2) из (6) и обобщенной леммы Гронуолла⁴ следует существование такой постоянной C_1 , что

$$\|\Delta z\|_{L_1^m} \leq C_1 r(v), \text{ если } \rho(v) < \varkappa. \quad (9)$$

Это дает $|\theta_0| = o(r(v))$, $r(v) \rightarrow 0$. Из (2), (9) получаем $|\theta_1| = o(r(v) + r_1(v))$, $r(v) + r_1(v) \rightarrow 0$, $\rho(v) \rightarrow 0$. Теорема 3 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть: Σ — совокупность всех наборов $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\}$, в каждом из которых $\mathbf{w}$ — какой-то элемент U , $\tau \in \Pi$ — некоторая правильная точка Лебега функции $\pi(\cdot, \mathbf{w})$; $\mathcal{H}$ — семейство всех пар $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\}$, в каждой из которых $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$, а ε — такое положительное число, что множество $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon[0, 1]^n$ принадлежит Π . Каждому $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$ отвечает допустимое управление

$$v_h(t) \equiv \{\mathbf{w}, \quad t \in \Pi_\varepsilon(\tau); \quad v_0(t), \quad t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\},$$

а каждому набору параметров варьирования $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$ соответствует семейство функций $\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}}$, простейшая одноточечная игольчатая варианта (п.о.и.в.) управления v_0 . Из теоремы 1 и свойств функции f имеем

$$r(v_h) + r_1(v_h) = O(\varepsilon^n), \varepsilon \rightarrow 0.$$

Из (5) следует, что для любого $\sigma \equiv \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma$ существует равный $\pi(\tau, \mathbf{w})$ предел $\delta J(\sigma) \equiv \delta J(\tau, \mathbf{w}) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-n} \Delta_{v_h} J)$, который естественно назвать первой вариацией функционала J на варианте $\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}}$. Очевидное н.у.о. $\delta J(\sigma) \leq 0$, $\sigma \in \Sigma$ записывается в виде п.п.м.

$$\pi(\tau, \mathbf{w}) \leq 0, \quad \{\tau, \mathbf{w}\} \in \Sigma. \quad (10)$$

Теорема 2 доказана. $\square$

3. Особые управления. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество $\{\{t, \mathbf{w}\} \in \Pi \times U : \pi(t, \mathbf{w}) = 0\}$. При почти каждом $t \in \Pi$ значение $v_0(t)$ оптимального управления v_0 принадлежит сечению

$$\mathcal{M}(t) \equiv \{\mathbf{w} \in U : \{t, \mathbf{w}\} \in \mathcal{M}\}$$

множества $\mathcal{M}$. Управление v_0 называется о.у. п.п.м., если

$$\text{mes } \{t \in \Pi : \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\} > 0. \quad (11)$$

Говорят, что п.п.м. вырождается на о.у. v_0 , о.у. называют *вырожденным управлением п.п.м.*, а также *вырожденным управлением для способа простейшего одноточечного игольчатого варьирования*. Множество $\Pi_* \equiv \{t \in \Pi : \mathcal{M}(t) \neq \{v_0(t)\}\}$ будем называть множеством вырождения п.п.м. на управлении v_0 . Случай, когда $\text{mes } \Pi_* = \text{mes } \Pi$ и при почти всех $t \in \Pi$ сечения $\mathcal{M}(t)$ множества $\mathcal{M}$ совпадают с U , назовем случаем *полного вырождения п.п.м.* Сначала, в пп. 4, 5, рассмотрим именно этот случай. Общий случай вырождения п.п.м. будет рассмотрен в п. 6.

4. Сильное вырождение особых управлений. Пусть v_0 — о.у. для п.п.м., причем имеет место случай полного вырождения. Предел $\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\gamma} \Delta_{v_h} J$, если он существует при некотором $\gamma > n$, назовем *вариацией порядка $\gamma - n + 1$ функционала J на п.о.и.в. $\{v_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}}$* ; соответственно н.у.о. вида $\delta^{\gamma-n+1} J(\sigma) \leq 0$ ($\sigma \in \Sigma$) назовем н.у.о. порядка

⁴Обобщенной леммой Гронуолла мы называем следующее утверждение, частный случай теоремы 1.9.3 из [28].

Пусть банахово пространство B полуупорядочено по конусу $K \subset B$; $G \in \mathfrak{L}(B, B)$ — квазинильпотентный оператор, для которого K инвариантен. Если для некоторых $x, y \in B$ выполняется неравенство $x \leq G[x] + y$, то $x \leq R(G)[y]$, где $R(G) = \sum_{i=0}^{\infty} G^i$.

При этом K считаем конусом в B , если K выпукло, замкнуто и для любого отличного от нуля элемента $x \in K$ весь луч $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$ принадлежит K , но $(-x) \notin K$.

$\gamma - n + 1$ управления v_0 на п.о.и.в. Типичной является ситуация, когда для о.у. v_0 вместе с $\delta J(\sigma) \equiv 0, \sigma \in \Sigma$ имеем $\delta^{\gamma-n+1}J(\sigma) \equiv 0, \sigma \in \Sigma, n < \gamma < n + 1$ и содержательны, вообще говоря, лишь н.у.о., начиная с порядка 2. Поэтому назовем о.у. v_0 *сильно вырожденным для способа простейшего односточечного игольчатого варьирования* $\{v_h : \sigma \in \Sigma\}$, если тождественно зануляется вариация 2-го порядка: $\delta^2 J(\sigma) \equiv 0, \sigma \in \Sigma$.

Сформулируем условия (условия **A**), обеспечивающие при $n > 1$ сильное вырождение о.у. и позволяющие с помощью теории тензорных произведений лебеговых пространств построить удобную для изучения о.у. асимптотическую формулу приращения $\Delta_v J$. Введем специальные обозначения:

$$f''_{\mathbf{p}\mathbf{p}}(\cdot)[x, y] \equiv \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l f''_{\mathbf{p}^i \mathbf{p}^j}(\cdot) x^i y^j, \quad x, y \in \mathbf{R}^l;$$

$$\Gamma \equiv \left\{ \{i, j\} : i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, l}; \Delta_{\mathbf{w}} f^{i'}_{\mathbf{p}^j}(t) = 0 \text{ для любого } \mathbf{w} \in U \text{ при почти всех } t \in \Pi \right\};$$

если $X = (X_{ij}) - (m \times l)$ -матрица, то $\tilde{X} = (\tilde{X}_{ij}) - (m \times l)$ -матрица, в которой

$$\tilde{X}_{ij} \equiv \{0, \{i, j\} \in \Gamma; X_{ij}, \{i, j\} \notin \Gamma\},$$

$X^0 - ml$ -столбец, полученный развертыванием матрицы X по правилу

$$X^0 \equiv \{X_{11}, X_{21}, \dots, X_{m1}, X_{12}, X_{22}, \dots, X_{ml}\},$$

а $M[\cdot]$ — обратный оператор свертывания ml -столбца в $(m \times l)$ -матрицу.

Условия A. A₁. Для любых $\xi \in L_\infty^l, v \in \Omega$ формула

$$b_1(\xi, v)[x, y] \equiv 2^{-1} \int_{\Pi} \langle \psi(t), f''_{\mathbf{p}\mathbf{p}}(t, \xi(t), v(t)) [A[x](t), A[y](t)] \rangle_m dt, \quad x, y \in L_1^m$$

определяет над $L_1^m \times L_1^m$ ограниченный билинейный функционал $b_1(\xi, v)[\cdot, \cdot]$, непрерывно в норме $L_\infty^l \times L_1^s$ зависящий от $\{\xi, v\}$.

A₂. Формула

$$b_2[x, y] \equiv \int_{\Pi} \left\langle \psi(t), \widetilde{M[y(t)]A[x](t)} \right\rangle_m dt, \quad x \in L_1^m, y \in L_1^{ml}$$

определяет над $L_1^m \times L_1^{ml}$ ограниченный билинейный функционал $b_2[\cdot, \cdot]$.

Укажем некоторые простые для проверки, но важные для приложений случаи, когда условия **A** заведомо выполняются.

Теорема 4. Условия **A** выполняются в каждом из следующих случаев:

- i) $\psi(t) \equiv 0, t \in \Pi$;
- ii) $A[L_1^m] \subset L_\infty^l$;
- iii) $f(t, \mathbf{p}, \mathbf{v}) = f_1(t, \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_2 + f_2(t, \mathbf{p}_1, \mathbf{v}), \mathbf{p} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}, \mathbf{p}_i \in \mathbf{R}^{l_i} (i = 1, 2), l_1 + l_2 = l, f_1$ является $(m \times l_2)$ -матрицей, $A[\cdot] = \{A^{(1)}[\cdot], A^{(2)}[\cdot]\}, A^{(i)}[\cdot] : L_1^m \rightarrow L_1^{l_i} (i = 1, 2)$, причем $A^{(1)}[L_1^m] \subset L_\infty^{l_1}$.

Теорема 5. Если $v_0 -$ о.у. для п.п.м. и выполняются условия **A**, то из н.у.о., полученных для v_0 с помощью п.о.и.в., вырождаются все условия до порядка n включительно, и содержательными могут быть лишь н.у.о. порядка, большего n ; таким образом, в случае $n > 1$ о.у. v_0 будет сильно вырожденным о.у..

Мы докажем теорему 5 с помощью второй специальной асимптотической формулы для приращения $\Delta_v J, v \in \Omega$. Чтобы выписать ее, вспомним (см., напр. [29, гл. 3, пп. 6.2, 6.4, 6.5]), что любой ограниченный билинейный над $L_1^m \times L_1^k$ функционал $b[\cdot, \cdot]$ единственным образом представим в виде

$$b[x, y] = \int_{\Pi} dt \int_{\Pi} x^*(t) \Theta(t, s) y(s) ds, \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^k, \quad (12)$$

где $\Theta \in L_{\infty}^{m \times k}(\Pi \times \Pi)$. Пусть

$$b_0[x, y] \equiv 2^{-1} \cdot F''(z_0)[x, y], \quad x, y \in L_1^m,$$

где $F''(z_0)[\cdot, \cdot]$ — билинейный функционал второй производной Фреше $F''(z_0)$; $\Theta_0(t, s)$ и $\Theta_1(t, s)$ — $(m \times m)$ -матрицы, отвечающие по формуле (12) функционалам b_0 и

$$b_{10} \equiv b_1(A[z_0], v_0);$$

$\Theta_2(t, s)$ — $(m \times ml)$ -матрица, отвечающая функционалу b_2 ; I_k — тождественный оператор в L_1^k ; $L_1^m \otimes L_1^k$ — проективное тензорное произведение L_1^m и L_1^k , натянутое на элементы $x(t) \otimes y(s) \equiv x(t)y^*(s)$ ($x \in L_1^m$, $y \in L_1^k$) и совпадающее с $L_1^{m \times k}(\Pi \times \Pi)$ [29, гл. 3, пп. 6.4, 6.5].

Рассматриваемое над $L_{\infty}^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$ уравнение

$$(S \otimes S)^*[\eta(t, s)] = \Theta_i(t, s) \quad (13_i)$$

имеет единственное решение $\eta_i(t, s)$ ($i = 0, 1$). Уравнение

$$(S \otimes I_{ml})^*[\eta(t, s)] = \Theta_2(t, s) \quad (14)$$

имеет единственное в $L_{\infty}^{m \times ml}(\Pi \times \Pi)$ решение $\eta_2(t, s)$. По поводу уравнений (13_i) и (14) см. п.7. Положим

$$E(t, s; \mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \langle \Delta_{\mathbf{v}} f(t), \{\eta_0(t, s) + \eta_1(t, s)\} \Delta_{\mathbf{w}} f(s) + \eta_2(t, s) \{\Delta_{\mathbf{w}} f'_{\mathbf{p}}(s)\}^0 \rangle_m, \quad t, s \in \Pi, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U.$$

Теорема 6. При условиях **A** справедлива следующая асимптотическая формула для приращения функционала

$$\Delta_v J = \int_{\Pi} \pi(t, v(t)) dt + \int_{\Pi} dt \int_{\Pi} E(t, s; v(t), v(s)) ds + o(\{r(v) + r_1(v)\}^2), \quad (15)$$

$$r(v) \rightarrow 0, \quad r_1(v) \rightarrow 0, \quad \rho(v) \rightarrow 0, \quad \|v - v_0\|_{L_1^s} \rightarrow 0, \quad v \in \Omega.$$

Доказательство теоремы 6. В силу условия а) существует оператор $S^{-1} \in \mathfrak{L}(L_1^m, L_1^m)$, причем $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$. С помощью формулы Тейлора находим

$$S[\Delta z](t) = Q(t), \quad t \in \Pi, \quad (16)$$

$$Q(t) \equiv \Delta_{v(t)} f(t) + Q_0(t), \quad Q_0(t) \equiv \sum_{i=1}^3 Q_i(t),$$

$$Q_1(t) \equiv \{\Delta_{v(t)} f'_{\mathbf{p}}(t)\} \cdot A[\Delta z](t), \quad Q_2(t) \equiv 2^{-1} f''_{\mathbf{pp}}(t) [A[\Delta z](t), A[\Delta z](t)],$$

$$Q_3(t) \equiv \int_0^1 (1 - \xi) \cdot \{f''_{\mathbf{pp}}(t, A[z_0] + \xi A[\Delta z], v(t)) - f''_{\mathbf{pp}}(t)\} [A[\Delta z](t), A[\Delta z](t)] d\xi,$$

$$\Delta_v J = a_0[\Delta z] + b_0[\Delta z, \Delta z] + \theta_2, \quad (17)$$

$$\theta_2 \equiv \left\{ \int_0^1 (1 - \xi) \cdot \{F''(z_0 + \xi \Delta z) - F''(z_0)\} d\xi \right\} [\Delta z, \Delta z].$$

Из (5) и (16) получаем

$$a_0[\Delta z] = \int_{\Pi} \pi(t, v(t)) dt + b_{10}[\Delta z, \Delta z] + b_2[\Delta z(\cdot), \{\Delta_{v(\cdot)} f'_{\mathbf{p}}(\cdot)\}^0] + \theta_3,$$

$$\theta_3 = a_0[Q_3(\cdot)]. \quad (18)$$

Каждый билинейный функционал (12) однозначно отождествляется с некоторым линейным функционалом $c[\cdot]$ над проективным тензорным произведением $L_1^m \otimes L_1^k \equiv L_1^{m \times k}(\Pi \times \Pi)$ равенством

$$c[x(t) \cdot y^*(s)] = b[x, y], \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^k. \quad (19)$$

Пусть: c_0, c_1, c_2 — функционалы, отождествляемые по (19) соответственно с b_0, b_{10}, b_2 ; функционалы $l_0, l_1 \in (L_1^m \otimes L_1^m)^*$, $l_2 \in (L_1^m \otimes L_1^{ml})^*$ определяются формулами

$$l_i = (S^{-1} \otimes S^{-1})^* [c_i] \quad (i = 0, 1); \quad l_2 = (S^{-1} \otimes I_{ml})^* [c_2], \quad (20)$$

а $\eta_i(t, s) \in L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$ ($i = 0, 1$), $\eta_2(t, s) \in L_1^{m \times ml}(\Pi \times \Pi)$ — функции Рисса для l_i ($i = 0, 1$), l_2 соответственно. Учитывая, что $(S^{-1} \otimes S^{-1})^* = ((S \otimes S)^*)^{-1}$, $(S^{-1} \otimes I_{ml})^* = ((S \otimes I_{ml})^*)^{-1}$, равенства (20) можно переписать в виде $(S \otimes S)^*[l_i] = c_i$ ($i = 0, 1$), $(S \otimes I_{ml})^*[l_2] = c_2$ или, переходя от функционалов к соответствующим функциям Рисса, в виде

$$(S \otimes S)^*[\eta_i] = \Theta_i \quad (i = 0, 1), \quad (S \otimes I_{ml})^*[\eta_2] = \Theta_2,$$

что означает: $\eta_i(t, s)$ — единственное в $L_\infty^{m \times m}(\Pi \times \Pi)$ решение уравнения (13_i) ($i = 0, 1$), $\eta_2(t, s)$ — единственное в $L_\infty^{m \times ml}(\Pi \times \Pi)$ решение уравнения (14). Соотношения (16), (20) дают

$$b_0[\Delta z, \Delta z] = l_0 [\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)] + \theta_4^{(0)}, \quad (21)$$

$$b_{10}[\Delta z, \Delta z] = l_1 [\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)] + \theta_4^{(1)}, \quad (22)$$

$$b_2 [\Delta z, \{\Delta_{v(\cdot)} f'_p(\cdot)\}^c] = l_2 [\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes \{\Delta_{v(\cdot)} f'_p(\cdot)\}^0] + \theta_5, \quad (23)$$

где

$$\theta_4^{(i)} \equiv l_i [Q_0(\cdot) \otimes \Delta_{v(\cdot)} f(\cdot)] + l_i [\Delta_{v(\cdot)} f(\cdot) \otimes Q_0(\cdot)] + l_i [Q_0(\cdot) \otimes Q_0(\cdot)] \quad (i = 0, 1),$$

$$\theta_5 \equiv l_2 [Q_0(\cdot) \otimes \{\Delta_{v(\cdot)} f'_p(\cdot)\}^0].$$

Для завершения доказательства (15) достаточно показать (см. (15), (7), (8), (21)–(23)), что каждая из величин $\theta_2, \theta_3, \theta_4^{(0)}, \theta_4^{(1)}, \theta_5$ подчиняется условию

$$|\theta| = o\left(\{r(v) + r_1(v)\}^2\right), \quad r(v) \rightarrow 0, \quad r_1(v) \rightarrow 0, \quad \rho(v) \rightarrow 0 \quad (v \in \Omega).$$

Для θ_2 это следует из (9) и непрерывности F'' , для θ_3 — из (9) и условия **A**₁, для $\theta_4^{(i)}$ ($i = 1, 0$) — из (2), (9), для θ_5 — из (2), (9) и условия **A**₂. Теорема 6 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Ввиду полного вырождения п.п.м. $\int_{\Pi} \pi(t, v_h(t)) dt = 0$ для любого $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$. Из теоремы 1 и свойств функции f следует: $r(v_h) + r_1(v_h) = O(\varepsilon^n)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому формула (15) при любом $\sigma \in \Sigma$ дает: $\Delta_{v_h} J = O(\varepsilon^{2n})$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема 5 доказана.

5. Необходимые условия оптимальности сильно вырожденных особых управлений. В условиях теоремы 5 формула (15) позволяет, если существует вариация $\delta^{n+1} J(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, вывести н.у.о. порядка $n+1$. Для существования вариации $\delta^{n+1} J(\sigma) \equiv \delta^{n+1} J(\tau, \mathbf{w})$ достаточно, например, выполнения следующих условий **Б**.

Условия Б. **Б**₁) Для функции $\eta_i(t, s)$ правильные относительно $2n$ -мерной меры Лебега на $\Pi \times \Pi$ точки Лебега образуют на «диагонали» $\{\{t, s\} \in \Pi \times \Pi : t = s\}$ множество полной меры относительно n -мерной «диагональной» меры Лебега. ($i = 0, 1, 2$)

О возможностях проверки условий **Б** в конкретных задачах см. п.7.

Теорема 7. Пусть v_0 — $L_{1,s}$ -локальное решение (3) и полностью вырожденное о.у. для п.п.м. Если выполняются условия **A** и **Б**, то

$$\text{для каждого } \mathbf{w} \in U \text{ при почти всех } \tau \in \Pi : \quad \delta^{n+1} J(\tau, \mathbf{w}) = E(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w}) \leq 0.$$

Доказательство теоремы 7. Ввиду полного вырождения п.п.м. $\int_{\Pi} \pi(t, v_h(t)) dt = 0$ для любого $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$. Из формулы (15) и условия **Б** следует, что для каждого $\mathbf{w} \in U$ при почти всех $\tau \in \Pi$ существует вариация $\delta^{n+1} J(\tau, \mathbf{w})$ и она равна $E(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w})$. Н.у.о. $\delta^{n+1} J(\tau, \mathbf{w}) \leq 0$ очевидно. Теорема 7 доказана. $\square$

6. Общий случай вырождения. В пп. 4, 5 рассматривался случай полного вырождения п.п.м. на о.у. v_0 , когда $\Pi_* = \Pi$ и $\mathcal{M}(t) = U$ при всех $t \in \Pi$. В общем случае вырождение п.п.м. на о.у. v_0 означает, что $\text{mes } \Pi_* > 0$, но Π_* уже может не совпадать с Π и не обязательно $\mathcal{M}(t) = U$ для $t \in \Pi_*$. Чтобы распространить на общий случай вырождения полученные выше в случае полного вырождения п.п.м. результаты, воспользуемся более общим способом одноточечного игольчатого варьирования, чем п.о.и.в.

Пусть v_0 — о.у. п.п.м. Заметим, что $\pi(t, \mathbf{v}) : \Pi \times \overline{U} \rightarrow \mathbf{R}$ — функция Каратеодори и поэтому отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)} : \Pi \rightarrow 2^{\overline{U}}$ измеримо и имеет счетное аппроксимирующее его семейство измеримых сечений (см. [30, п. 8.1.5]) $\mathcal{K} \equiv \{v_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\overline{\mathcal{M}(t)} = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \{v_k(t)\}}, \quad t \in \Pi_0, \quad \text{mes } \Pi_0 = \text{mes } \Pi.$$

Обозначим через Π_l ту часть множества Π_0 , каждая точка которой есть точка Лебега суперпозиции $\pi(\cdot, v_k(\cdot))$ для любой функции $v_k(\cdot)$ семейства $\mathcal{K}$. Очевидно, что $\text{mes } \Pi_l = \text{mes } \Pi$.

Пусть Σ — совокупность всех наборов $\eta \equiv \{\tau, v_k\}$, в каждом из которых v_k — какой-то элемент $\mathcal{K}$, $\tau \in \Pi_l$; $\mathbf{H}$ — семейство всех пар $\mathbf{h} \equiv \{\eta, \varepsilon\}$, в каждой из которых $\eta \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma$, а ε — такое положительное число, что $\Pi_{\varepsilon}(\tau) \subset \Pi$. Каждому $\mathbf{h} \equiv \{\eta, \varepsilon\} \in \mathbf{H}$ отвечает допустимое управление

$$v_{\mathbf{h}}(t) \equiv \{v_k(t), t \in \Pi_{\varepsilon}(\tau); v_0(t), t \in \Pi \setminus \Pi_{\varepsilon}(\tau)\},$$

а каждому набору параметров варьирования $\eta \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma$ соответствует семейство функций $\{v_{\mathbf{h}}(\cdot)\}_{\mathbf{h} \equiv \{\eta, \varepsilon\} \in \mathbf{H}}$, одноточечная игольчатая варианта управления v_0 . Для указанного способа варьирования первая вариация $\delta J(\eta) \equiv \delta J(\tau, v_k) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-n} \Delta_{v_{\mathbf{h}}} J)$ при любом $\eta \equiv \{\tau, v_k\} \in \Sigma$ существует и равна $\pi(\tau, v_k(\tau))$. Так как $\mathcal{K}$ аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то для о.у. v_0 имеем: $\delta J(\eta) \equiv 0$, $\eta \in \Sigma$.

При условиях **А** из формулы (15) получаем $\Delta_{v_{\mathbf{h}}} J = O(\varepsilon^{2n})$, $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\sigma \in \Sigma$). То есть справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему 5.

Теорема 8. Если v_0 — о.у. для п.п.м. и выполняются условия **А**, то из н.у.о., полученных для v_0 с помощью предложенного способа одноточечного игольчатого варьирования, вырождаются все условия до порядка n включительно, и содержательными могут быть лишь н.у.о. порядка, большего n ; таким образом, в случае $n > 1$ о.у. v_0 будет сильно вырожденным о.у. для этого способа варьирования.

Из (15) следует также, что каково бы ни было n при условиях **А**, **Б** вариация $(n+1)$ -го порядка $\delta^{n+1} J(\tau, v_k) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-2n} \Delta_{v_{\mathbf{h}}} J)$ для каждого $v_k \in \mathcal{K}$ при почти всех $\tau \in \Pi$ существует и равна $E(\tau, \tau; v_k(\tau), v_k(\tau))$. Так как $\mathcal{K}$ аппроксимирует отображение $\overline{\mathcal{M}(\cdot)}$, то отсюда вытекает следующее н.у.о. порядка $n+1$, обобщающее н.у.о. теоремы 7.

Теорема 9. Пусть v_0 — о.у. для п.п.м. Если выполняются условия **А** и **Б**, то для оптимальности управления v_0 необходимо выполнение условия:

$$E(\tau, \tau; \mathbf{w}, \mathbf{w}) \leq 0 \quad \text{для любого } \mathbf{w} \in \mathcal{M}(\tau) \text{ при почти всех } \tau \in \Pi.$$

7. Некоторые замечания. В более подробной записи уравнения (13_i) и (14) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \eta(t, s) - (I_m^* \otimes A^*) \left[\eta(t, s) \cdot \left\{ f_{\mathbf{p}}'(s) \right\}^* \right] - (A^* \otimes I_m^*) \left[\left\{ f_{\mathbf{p}}'(t) \right\}^* \cdot \eta(t, s) \right] + \\ + (A^* \otimes A^*) \left[\left\{ f_{\mathbf{p}}'(t) \right\}^* \cdot \eta(t, s) \cdot \left\{ f_{\mathbf{p}}'(s) \right\}^* \right] = \Theta_i(t, s) \quad (t, s \in \Pi), \end{aligned} \quad (24_i)$$

$$\eta(t, s) - (A^* \otimes I_{ml}^*) \left[\left\{ f_p'(t) \right\}^* \cdot \eta(t, s) \right] = \Theta_0(t, s) \quad (t, s \in \Pi). \quad (25)$$

Здесь каждый первый сомножитель в тензорном произведении операторов «действует по переменной t », а каждый второй сомножитель — по переменной s , I_m^* есть тождественный оператор в L_∞^m .

В конкретных задачах условия **Б**, как правило, сравнительно легко проверяются. При этом удобно бывает воспользоваться тем, что уравнения (4), (24_i), (25) имеют вид

$$Z(\xi) - \mathcal{L}[Z](\xi) = \Theta(\xi), \quad \xi \in \Xi,$$

где $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(L_\infty^k(\Xi), L_\infty^k(\Xi))$ — квазинильпотентный оператор. Поэтому если некоторое замкнутое в $L_\infty^k(\Xi)$, инвариантное относительно $\mathcal{L}$ множество G содержит функцию Θ , то и $L_\infty^k(\Xi)$ -решение уравнения принадлежит G . Так, например, в задачах оптимизации гиперболических и сосредоточенных систем с терминальными и интегральными функционалами функции Θ_i обычно непрерывны везде на $\Pi \times \Pi$ за исключением, быть может, конечного числа фиксированных гиперповерхностей разрыва типа конечного скачка. Уравнения (24_i), (25) позволяют доказать, что таковы же и функции η_i , а это означает выполнение условия **Б** (см. примеры в [23]).

Для доказательства формул (5), (15) достаточно потребовать, чтобы F был определен и дважды дифференцируем по Фреше лишь над L_∞^m , но при этом для любого $z \in L_\infty^m$ линейная форма $F'(z)[\cdot] : L_\infty^m \rightarrow \mathbf{R}$ (соответственно билинейная форма $2^{-1}F''(z)[\cdot, \cdot] : L_\infty^m \times L_\infty^m \rightarrow \mathbf{R}$) допускала продолжение до линейного непрерывного функционала над L_1^m , обозначим его $a_1(z)[\cdot]$ (соответственно до билинейного непрерывного функционала над $L_1^m \times L_1^m$, обозначим его $b_{(0)}(z)[\cdot, \cdot]$) такое, что $a_1(z_v) \rightarrow a_1(z_0)$ равномерно в норме $(L_1^m)^*$ (соответственно $b_{(0)}(z_v) \rightarrow b_{(0)}(z_0)$ равномерно в норме пространства билинейных непрерывных форм над $L_1^m \times L_1^m$) при условии $\|z_v - z_0 - \Delta_{v(\cdot)}f(\cdot)\|_{L_\infty^m} \rightarrow 0$. При этом $\omega(\cdot)$ — функция Рисса для $a_1(z_0)$, $\Theta_0(t, s)$ — $(m \times m)$ -матрица, отвечающая по (12) функционалу $b_{(0)}(z_0)$.

Требование **A**₂ можно заменить следующим более простым требованием **A**₂'.

A₂'. Формула

$$b_{(2)}[x, y] \equiv \int_{\Pi} \langle \psi(t), M[y(t)] \cdot A[x](t) \rangle_m dt, \quad x \in L_1^m, \quad y \in L_1^m,$$

определяет над $L_1^m \times L_1^m$ ограниченный билинейный функционал $b_{(2)}[\cdot, \cdot]$.

Формула (15) и все выводы из нее остаются справедливыми, если заменить Θ_2 на функцию $\Theta_{(2)}$, отвечающую по (12) функционалу $b_{(2)}$. Упрощенные таким образом условия **A** выполняются, например, в случаях i), ii) теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973.
2. Васильев О. В. Качественные и конструктивные методы оптимизации управляемых процессов с распределенными параметрами: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Л., 1984.
3. Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988.
4. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Тр. МИАН СССР. — 1991. — Т. 197. — С. 85–166.
5. Борисов В. Ф. Экстремали с бесконечным числом переключений в окрестности особых экстремалей высоких порядков: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — М., 2000.
6. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 90. Оптимальное управление 4. — М.: ВИНТИ, 2001.
7. Зеликин М. И., Манита Л. А. Оптимальные режимы с учащающимися переключениями в задаче управления балкой Тимошенко // Прикл. матем. и мех. — 2006. — Т. 70, № 2. — С. 295–304.
8. Васильев О. В. Об оптимальности особых управлений в системах с распределенными параметрами // Управляемые системы. — Новосибирск, 1972. — Вып. 10. — С. 27–34.

9. Срочко В. А. Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 5. — С. 1108–1115.
10. Меликов Т. К. Исследование особых процессов в некоторых оптимальных системах: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Баку, 1976. — 17 с.
11. Ащепков Л. Т., Васильев О. В., Коваленок И. Л. Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса–Дарбу // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 6. — С. 1054–1059.
12. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами. — Минск, 1982. — 32 с. (Препринт/АН БССР. Ин-т математики, № 31).
13. Мансимов К. Б. Оптимальность особых управлений в квазилинейных системах Гурса–Дарбу при наличии ограничений. I // Изв. АН Азерб. ССР., сер. физ.-тех. и матем. наук. — 1986. — № 3. — С. 129–134.
14. Бурдуковский А. Н. Условия оптимальности особых управлений в задаче Гурса–Дарбу // Управляемые системы. — Новосибирск, 1986. — Вып. 26. — С. 16–24.
15. Мансимов К. Б. К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче управления системами с распределенными параметрами // ДАН СССР. — 1988. — Т. 301, № 3. — С. 546–550.
16. Срочко В. А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1989.
17. Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Баку, 1994.
18. Силин Д. Б. Об особых оптимальных управлениях в линейной задаче со свободным правым концом // Некоторые проблемы современной математики и их приложение к задачам математической физики. — М., 1985. — С. 125–128.
19. Силин Д. Б. Линейные задачи оптимального быстрогодействия с разрывными на множестве положительной меры управлениями // Матем. сб. — 1986. — Т. 26, № 3. — С. 439–448.
20. Сумин В. И. Оптимизация управляемых обобщенных вольтеровых систем: дис. ... канд физ.-мат. наук. — Горький, 1975. — 158 с.
21. Сумин В. И. Дифференцирование функционалов оптимального управления // Материалы итоговой науч. конф. радиофиз. фак. ГГУ за 1982 г., Горький, 1-2 февр. 1983. — Часть 2. Деп. в ВИНТИ: № 6035-83 ДЕП. С. 84–91.
22. Сумин В. И. Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // ДАН СССР. — 1991. — Т. 320, № 2. — С. 295–299.
23. Сумин В. И. Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем // Оптимизация: сб. науч. тр. — Новосибирск, 1993. — № 52 (69). С. 74–94.
24. Сумин В. И. Функциональные вольтеровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Вольтеровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. — Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. — 110 с.
25. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966. — 500 с.
26. Сумин В. И., Чернов А. В. Операторы в пространствах измеримых функций: вольтеровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 10. — С. 1402–1411.
27. Сумин В. И. Управляемые функциональные вольтеровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. — Н.Новгород, 1998. — Вып. 2(19). — С. 138–151.
28. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
29. Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
30. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

*V. I. Sumin***On singular controls in the sense of the pointwise maximum principle in distributed optimization problems**

It is proved that for distributed optimization problems a sufficiently typical situation is strong degeneration of the singular controls in the sense of the pointwise maximum principle, when together with the maximum principle (which is a first order necessary optimality condition in the case of spike-shaped variation) a second order necessary optimality conditions also degenerates. A derivation of constructive necessary optimality conditions for singular controls is suggested.

Keywords: distributed optimization problems, guided Volterra functional equations, pointwise maximum principle, singular controls.

Mathematical Subject Classifications: 49K20, 49K22, 49N65, 46A32, 45D05

Сумин Владимир Иосифович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математической физики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, Нижний Новгород, просп. Гагарина, 23.
E-mail: v_sumin@mail.ru