Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. I. Ukhobotov, D. V. Gushchin, About one class of similar differential game with mixed limitations, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, Issue 3, 81–86

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.229.45.116

April 26, 2023, 07:48:20

УДК 517.977

© В. И. Ухоботов, Д. В. Гуцин

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОТИПНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается нелинейная однотипная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания. Платой является норма фазового вектора. Вычислена функция цены игры и найдены оптимальные стратегии игроков.

Ключевые слова: дифференциальная игра, цена игры, стратегия.

§ 1. Пример

Первый игрок управляет точкой переменного состава, движение которой описывается уравнением Мещерского [1, с. 25]

$$\ddot{z}_1 = -C + w \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \quad z_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь C — постоянный вектор; w — относительная скорость отделяющихся частиц, величина $\|w\|$ которой считается постоянной, $\|w\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$; $m(t) = m_0 + m_1(t)$ — масса точки, причем m_0 — неизменяемая часть массы, $m_1(t)$ — реактивная масса. Вторым игроком управляет точкой, движущейся в $\mathbb{R}^n$ с ограниченной по величине скоростью $\|\dot{z}_2\| \leq b$. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени p сделать расстояние $\|z_2(p) - z_1(p)\|$ как можно меньше. Цель второго игрока — противоположна.

Считаем, что первый игрок выбирает направление относительной скорости w , а также скорость $\dot{m}_1(t)$ изменения реактивной массы, величина которой удовлетворяет ограничениям $0 \leq -\dot{m}_1(t) \leq \alpha$, $\alpha > 0$.

Обозначим

$$\begin{aligned} z &= z_2 - z_1 - (p - t)\dot{z}_1 - C \frac{(p - t)^2}{2}, \\ v &= \frac{1}{b}\dot{z}_2, \quad u = -\frac{w}{\|w\|}, \\ \mu &= \frac{m_1}{m_0}, \quad -\dot{m}_1(t) = \alpha\varphi, \quad a = \|w\| \frac{\alpha}{m_0}, \quad g = \frac{\alpha}{m_0}. \end{aligned}$$

Тогда расстояние между игроками в момент времени p равняется $\|z(p)\|$. Уравнения движения примут вид

$$\dot{z} = -(p - t)a \frac{\varphi}{1 + \mu} u + bv, \quad \|u\| = 1, \quad \|v\| \leq 1, \quad \dot{\mu} = -g\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1.$$

В начальный момент времени $t = 0$ задан начальный запас реактивной массы $m_1(0) > 0$. В процессе выбора управления в каждый момент времени $t \leq p$ оставшийся запас реактивной массы должен быть неотрицательным. Это условие равносильно неравенству $\mu(t) \geq 0$.

Однотипные игры со смешанными ограничениями рассматривались в работе [2]. Мы рассмотрим более общий случай.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим игру

$$\dot{z} = -a(t, \mu, \varphi)u + b(t)v, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \|u\| = 1, \quad \|v\| \leq 1, \quad (2.1)$$

$$\dot{\mu} = -g(t, \mu)\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad t \leq p. \quad (2.2)$$

Здесь p — момент окончания игры. Первый игрок, выбирая управления u и φ , минимизирует норму $\|z(p)\|$. Второй игрок, выбирая управление v , максимизирует эту норму. Уравнение (2.2) характеризует расход ресурсов, которые первый игрок тратит на формирование своего управления. На выбор управления первого игрока, наряду с геометрическими ограничениями, накладывается еще ограничение

$$\mu(t) \geq 0, \quad t_0 \leq t \leq p. \quad (2.3)$$

Предположение 1. Функции $a(t, \mu, \varphi) \geq 0$, $b(t) \geq 0$, $g(t, \mu) \geq 0$ определены при $t \leq p$, $\mu \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 1$ и являются непрерывными.

Предположение 2. При каждом $t \leq p$, $\mu \geq 0$ функция $a(t, \mu, \varphi)$ является вогнутой по $\varphi \in [0, 1]$.

Предположение 3. Для любого начального условия $t_0 < p$, $\mu(t_0) = \mu_0 \geq 0$ и для любой измеримой функции $\varphi : [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ дифференциальное уравнение (2.2) имеет единственное решение $\mu = \gamma(t; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot))$, определенное при $t_0 \leq t \leq p$.

Стратегией первого игрока является любая функция $u : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая равенству

$$\|u(t, z)\| = 1, \quad (2.4)$$

и измеримая функция $\varphi(t)$, которая строится в зависимости от начального состояния t_0 , z_0 , μ_0 и удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \varphi(t) \leq 1, \quad \gamma(p; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot)) \geq 0, \quad t_0 \leq t \leq p. \quad (2.5)$$

Стратегия второго игрока задается функцией $v : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет ограничению

$$\|v(t, z)\| \leq 1. \quad (2.6)$$

Замечание 1. Такое определение стратегии первого игрока продиктовано следующими соображениями. Пусть в рассмотренном в предыдущем параграфе примере закон изменения массы нужно задать программным образом, а управлять можно только направлением относительной скорости отделяющихся частиц. В этом случае приходим к понятию стратегии (2.4), (2.5).

Дадим определение движения, порожденного заданными стратегиями. Зафиксируем начальное состояние $t_0 < p$, $z(t_0) = z_0$, $\mu_0 \geq 0$. Возьмем разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = p \quad (2.7)$$

с диаметром $d(\omega) = \max_{0 \leq i \leq k} (t_{i+1} - t_i)$. Построим ломаную

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \left(\int_{t_i}^t a(r, \mu(r), \varphi(r)) dr \right) u(t_i, z_\omega(t_i)) + \left(\int_{t_i}^t b(r) dr \right) v(t_i, z_\omega(t_i)). \quad (2.8)$$

Здесь $z_\omega(t_0) = z_0$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Оставшийся запас ресурсов $\mu(t)$ определяется формулой $\mu(t) = \gamma(t; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot))$, $t_0 \leq t \leq p$. Обозначим

$$L = \max_{0 \leq \varphi \leq 1} \max_{t_0 \leq r \leq p} \left(\max_{0 \leq \mu \leq \mu_0} a(r, \mu, \varphi) + b(r) \right). \quad (2.9)$$

Тогда из ограничений (2.4) и (2.6), а также из неравенства $0 \leq \mu(r) \leq \mu_0$ при $t_0 \leq r \leq p$, получим, что $\|z_\omega(\tau) - z_\omega(t)\| \leq L|\tau - t|$ для всех $\tau, t \in [t_0, p]$. Из этого неравенства следует, что семейство ломаных (2.8) является равномерно ограниченным и равномерно непрерывным на отрезке $[t_0, p]$. По теореме Арцела [3, с. 236] из любой последовательности ломаных (2.8) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$. Под движением $z(t)$ будем понимать равномерный предел последовательности ломаных (2.8), у которых диаметр разбиения (2.7) стремится к нулю.

§ 3. Вычисление цены игры

Функция $\varphi(t) = 0$ удовлетворяет ограничениям (2.5). Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую этим ограничениям. Подставим ее в уравнение (2.1) и рассмотрим игру с геометрическими ограничениями

$$\dot{z} = -a(t, \mu(t), \varphi(t))u + b(t)v, \quad \|u\| = 1, \quad \|v\| \leq 1. \quad (3.1)$$

Здесь $\mu(t) = \gamma(t; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot))$. Первый игрок, выбирая управление u , минимизирует величину $\|z(p)\|$, а второй игрок, выбирая управление v , ее максимизирует. Обозначим

$$G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot)) = \max\{F(t_0, \mu_0, \varphi(\cdot)); \|z_0\| + f(t_0, \mu_0, \varphi(\cdot))\}, \quad (3.2)$$

$$f(t, \mu_0, \varphi(\cdot)) = \int_t^p \left(-a(r, \mu(r), \varphi(r)) + b(r) \right) dr, \quad (3.3)$$

$$F(t_0, \mu_0, \varphi(\cdot)) = \max_{t_0 \leq \tau \leq p} f(\tau, \mu_0, \varphi(\cdot)). \quad (3.4)$$

Теорема 1 (см. [4]). Для начального состояния $t_0 < p$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mu_0 \geq 0$ в игре (3.1) управление $u = w_0(z)$, где

$$w_0(z) = \begin{cases} \frac{z}{\|z\|} \text{ при } \|z\| > 0, \\ \forall s : \|s\| = 1 \text{ при } z = 0, \end{cases}$$

обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| \leq G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot))$. Управление $v = w_0(z)$ обеспечивает выполнение противоположного неравенства $\|z(p)\| \geq G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot))$.

Из этой теоремы следует, что функция (3.2) является функцией цены [5, с. 87] в игре (3.1). Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$G(t_0, z_0, \mu_0) = \inf_{\varphi(\cdot)} G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot)),$$

$$0 \leq \varphi(t) \leq 1 \text{ при } t_0 \leq t \leq p, \quad \gamma(p; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot)) \geq 0. \quad (3.5)$$

Если задача (3.5) имеет решение $\varphi_0 : [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$, то, как следует из теоремы 1, функция $G(t_0, z_0, \mu_0)$ является ценой в исходной игре. В этом случае оптимальная стратегия первого игрока имеет вид $u_0(t, z) = w_0(z)$, $\varphi = \varphi_0(t)$, а оптимальная стратегия второго игрока равна $v_0(t, z) = w_0(z)$.

Теорема 2. При любых $t_0 \leq p$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mu_0 \geq 0$ решение $\varphi_0(t)$ в задаче (3.5) существует.

Доказательство. Функция $\varphi(t) = 0$, удовлетворяет ограничениям в задаче (3.5). Из формул (3.2), (3.3) следует, что

$$G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi(\cdot)) \geq 0$$

для любой измеримой функции $\varphi : [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$. Поэтому нижняя грань в задаче (3.5) существует. Это значит, что существует последовательность измеримых функций $\varphi_m(t)$, удовлетворяющая ограничениям в задаче (3.5), такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max\{F_m(t_0); \|z_0\| + f_m(t_0)\} = G(t_0, z_0, \mu_0). \quad (3.6)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} \mu_m(t) &= \gamma(t; t_0, \mu_0, \varphi(\cdot)), \\ f_m(t) &= \int_t^p -a(r, \mu_m(r), \varphi_m(r)) + b(r) dr, \\ F_m(t) &= \max_{t \leq \tau \leq p} f_m(\tau). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Каждая из функций $f_m(t)$ удовлетворяет на отрезке $[t_0, p]$ условию Липшица с константой L (2.9). Каждая функция $\mu_m(t)$ является решением дифференциального уравнения (2.2) с $\varphi = \varphi_m(t)$ и с начальным условием $\mu_m(t_0) = \mu_0$. Поэтому каждая функция $\mu_m(t)$ удовлетворяет на отрезке $[t_0, p]$ условию Липшица с константой

$$G = \max_{t_0 \leq t \leq p} \max_{0 \leq \mu \leq \mu_0} g(t, \mu).$$

Таким образом, семейство функций $f_m(t)$ и $\mu_m(t)$ является равномерно ограниченным и равномерно непрерывным на отрезке $[t_0, p]$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности и применяя теорему Арцела, можем считать, что $f_m(t) \rightarrow f(t)$, $\mu_m(t) \rightarrow \mu(t)$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно на отрезке $[t_0, p]$. Из равномерной сходимости и из формулы (3.7) следует, что

$$F_m(t_0) = \max_{t_0 \leq \tau \leq p} f_m(\tau) \rightarrow \max_{t_0 \leq \tau \leq p} f(\tau) = F(t_0).$$

Отсюда и из (3.6) получим, что

$$\max\{F(t_0); \|z_0\| + f(t_0)\} = G(t_0, z_0, \mu_0). \quad (3.8)$$

Предельные функции $f(t)$ и $\mu(t)$ удовлетворяют на отрезке $[t_0, p]$ условию Липшица. Следовательно, у них почти всюду существуют производные.

Введем в рассмотрение многозначную функцию

$$Q(t, \mu) = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_1 = a(t, \mu, \varphi) - b(t), q_2 = -g(t, \mu)\varphi, \forall \varphi \in [0, 1]\}. \quad (3.9)$$

Из непрерывности функций $a(t, \mu, \varphi)$, $b(t)$ и $g(t, \mu)$ следует, что многозначная функция (3.9) полунепрерывно сверху зависит от $t \in [t_0, p]$ и $\mu \in [0, \mu_0]$. Это значит, что для каждого таких чисел t и μ и для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(t, \mu, \varepsilon)$ такое, что для всех $|t - \tau| < \delta$, $\tau \leq p$, $|\mu - \nu| < \delta$, $0 \leq \nu \leq \mu_0$ выполнено включение

$$Q(\tau, \nu) \subset Q(t, \mu) + \varepsilon S. \quad (3.10)$$

Здесь обозначено $S = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_1^2 + q_2^2 \leq 1\}$. Обозначим $y(t) = (f(t), \mu(t))$ и $y_m(t) = (f_m(t), \mu_m(t))$, $m \geq 1$. Тогда почти всюду на отрезке $[t_0, p]$ существуют производные $\dot{y}(t)$ и

$y_m(t)$, $m \geq 1$. Возьмем точку $t \in [t_0, p)$, в которой существуют эти производные. Зафиксируем число $h > 0$ и $t + h \leq p$. Тогда

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \dot{y}_m(t+rh) dr. \quad (3.11)$$

Из формул (3.7) и (3.9) следует, что $\dot{y}_m(t+rh) \in Q(t+rh, \mu_m(t+rh))$ для почти всех $r \in [0, 1]$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Тогда существует число $\delta = \delta(t, \mu(t), \varepsilon) > 0$ такое, что $\dot{y}_m(t+rh) \in Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S$, как только $0 < h < \delta$, $|\mu(t) - \mu_m(t+rh)| < \delta$.

Далее, $|\mu(t) - \mu_m(t+rh)| \leq |\mu(t) - \mu_m(t)| + |\mu_m(t) - \mu_m(t+rh)| \leq |\mu(t) - \mu_m(t)| + Gh$. Существует номер N такой, что $|\mu(t) - \mu_m(t)| < \frac{\delta}{2}$ при $m > N$. Возьмем $0 < h < \min(\delta; \frac{\delta}{G}) = h_0$. Тогда, учитывая включение (3.10), получим

$$\dot{y}_m(t+rh) \in Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad m > N, \quad 0 < h < h_0.$$

Применяя понятие интеграла от многозначной функции [6], получим, что при $m > N$ и $0 < h < h_0$

$$\frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} \in \int_0^1 (Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S) dr = \text{co } Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S. \quad (3.12)$$

Здесь $\text{co } Q$ — выпуклая оболочка множества Q . Поскольку множество, стоящее в правой части (3.12), является компактом, то, используя формулу (3.11), получим, что

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \in \text{co } Q(t, \mu(t)) + \varepsilon S.$$

Устремим $h \rightarrow 0+$. Тогда, учитывая, что ε — произвольное положительное число, получим включение $\dot{y}(t) \in \text{co } Q(t, \mu(t))$. Отсюда и из теоремы Каратеодори [7, с. 9] следует, что

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i a(t, \mu(t), \varphi_i) - b(t), \quad \dot{\mu}(t) = - \sum_{i=1}^3 \lambda_i g(t, \mu(t)) \varphi_i \quad (3.13)$$

при некоторых $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Из этих формул, применяя лемму о выборе А. Ф. Филиппова [6], получим, что существуют измеримые на отрезке $[t_0, p]$ функции $\lambda_i(t) \geq 0$, $\varphi_i(t) \in [0, 1]$, $\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t) = 1$, которые при почти всех $t \in [t_0, p]$ удовлетворяют равенствам (3.13). Обозначим

$$\varphi_0(t) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \varphi_i(t) \in [0, 1], \quad t_0 \leq t \leq p.$$

Тогда из (3.13), используя вогнутость по φ функции $a(t, \mu, \varphi)$, получим

$$\dot{\mu}(t) = -g(t, \mu(t)) \varphi_0(t), \quad \dot{f}(t) \leq a(t, \mu(t), \varphi_0(t)) - b(t). \quad (3.14)$$

Обозначим

$$\mu_0(t) = \mu(t), \quad f_0(t) = \int_t^p (-a(r, \mu_0(r), \varphi_0(r)) + b(r)) dr.$$

Тогда из (3.14) следует, что $\dot{f}(t) \leq \dot{f}_0(t)$ при $t \leq p$. Отсюда и из равенства $f(p) = f_0(p) = 0$ получим, что $f(t) \geq f_0(t)$ при $t \leq p$. Учитывая формулы (3.2)—(3.4) и (3.8), будем иметь неравенство $G(t_0, z_0, \mu_0) \geq G_*(t_0, z_0, \mu_0, \varphi_0(\cdot))$. Следовательно, функция $\varphi_0(t)$ является решением задачи (3.5). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 319 с.
2. Ухоботов В. И. Однотипная линейная игра со смешанными ограничениями на управления // Прикладная математика и механика. — 1987. — Т. 51, вып. 2. — С. 179–185.
3. Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965. — 520 с.
4. Ухоботов В. И. Синтез управления в однотипных дифференциальных играх с фиксированным управлением // Вестник Челябинского университета. Серия математика, механика. — 1996. — Вып. 1. — С. 178–184.
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
6. Hermes H. The Generalized Differential Equation $\dot{x} \in \mathbb{R}(t, x)$ // Advances in Mathematics. — 1970, № 4. — P. 149–169.
7. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

Поступила в редакцию 01.03.10

V. I. Ukhobotov, D. V. Gushchin

About one class of similar differential game with mixed limitations

We consider a nonlinear similar differential game with fixed timing ending. A price is a norm of phase vector. We evaluate a function of game value and optimal strategies of players.

Keywords: differential game, game value, strategy.

Mathematical Subject Classifications: 49N75

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454136, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129, E-mail: ukh@csu.ru

Гушчин Денис Васильевич, аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. 250-летия Челябинска, 67, 150
E-mail: off_side@mail.ru