Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. V. Borisov, S. G. Lutsenko, I. S. Mamaev, Dynamics of a wheeled carriage on a plane, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, Issue 4, 39–48

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.197.217.227

April 26, 2023, 07:52:22

УДК 531.3

© А. В. Борисов, С. Г. Луценко, И. С. Мамаев

ДИНАМИКА КОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА НА ПЛОСКОСТИ¹

В работе рассматривается задача о движении колесного экипажа на плоскости в случае, когда одна из колесных пар фиксирована, а также случай движения колесного экипажа на плоскости в случае двух свободных колесных пар. Указан способ получения уравнений движения для экипажа с произвольной геометрией. Определены возможные виды движения экипажа с фиксированной колесной парой.

Ключевые слова: неголономная связь, динамика системы, колесный экипаж, система Чаплыгина.

Введение

Задачи, связанные с динамикой колесного экипажа, появились практически одновременно с изобретением автомобиля. Под колесным экипажем в этой статье понимается упрощенная модель автомобиля — две колесные пары, присоединенные к каркасу. В общем случае считается, что обе колесные пары могут вращаться в горизонтальной плоскости независимо от каркаса. Также рассмотрен частный случай — одна из колесных пар закреплена перпендикулярно к мосту.

Одна из первых работ, где систематически рассмотрены задачи, связанные с динамикой колесного экипажа, принадлежит Рокару [3], в ней же Рокар сформулировал гипотезу бокового увода колеса. В работе [1] получено уравнение движения колесного экипажа и рассмотрены вопросы устойчивости системы при торможении. В работе [2] проинтегрирована и исследована задача о движении экипажа с одной фиксированной колесной парой, решены задачи об условиях возникновения заноса и поведении системы при резком торможении. В работе [5] получены уравнения движения колесного экипажа в случае закреплённой колесной пары.

В настоящее время решено множество задач, так или иначе связанных с динамикой колесного экипажа, но все они рассматривают лишь поведение системы в некоторых частных случаях. Не проводится исследование всех возможных траекторий движения колесного экипажа. Поэтому представляется интересным получить уравнения движения и, проведя их анализ, определить типичные траектории движения.

§ 1. Системы Чаплыгина

Пусть система описывается обобщенными координатами $q = (q_1, \dots, q_n)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$ так, что при этом:

1. неинтегрируемые связи, наложенные на нее, представляются в форме

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^n a_{i\alpha}(q) \dot{q}_\alpha, \quad i = 1, \dots, m; \quad (1)$$

2. функция Лагранжа свободной системы, то есть без учета связей (1), не зависит явно от координат x_i , а только от скоростей $\dot{x}_i$

$$L = L(\dot{x}, q, \dot{q}). \quad (2)$$

¹Работа выполнена при поддержке: ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, мероприятие 1.1. ГК 02.740.11.0195; гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО №11.G34.31.0039.

Обозначим функцию Лагранжа после подстановки в (2) связей как

$$\widehat{L}(q, \dot{q}) = L(\dot{x}, q, \dot{q}) \Big|_{\dot{x}=\mathbf{A}(q)\dot{q}}, \quad A(q) = \|a_{i\alpha}(q)\|. \quad (3)$$

Справедливо следующее простое предположение

Предположение 1. Уравнения движения системы с лагранжианом (2) при учете связей (1) представляются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial \widehat{L}}{\partial q_\alpha} &= \sum_{\beta=1}^n S_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta, \quad \dot{x}_i = \sum_{\beta=1}^n a_{i\beta}(q) \dot{q}_\beta, \quad i = 1, \dots, m, \quad \alpha = 1, \dots, n, \\ S_{\alpha\beta} &= -S_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_\beta} - \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_\alpha} \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{\dot{x}=\mathbf{A}\dot{q}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Запишем уравнения движения системы (2) с неопределенными множителями, соответствующими связям:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) &= \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_\alpha}, \\ f_j &= \dot{x}_j - \sum_{\beta} a_{j\beta}(q) \dot{q}_\beta, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда находим

$$\lambda_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right).$$

Подставляя это соотношение в уравнение для q_α в (5) и пользуясь соотношениями

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} a_{i\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{i,\beta} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha},$$

после несложных упрощений получим уравнения (4). $\square$

§ 2. Колесный экипаж

2.1. Общий формализм

В качестве примера системы Чаплыгина рассмотрим модель тележки с вращающейся осью (или осями). Будем предполагать, что имеется жесткий каркас, к которому крепятся две подвижные рамы с жестко укрепленными на них колесными парами, рамы могут вращаться вокруг вертикальных осей, прикрепленных к каркасу (см. рис. 1).

Обозначим точки крепления колесных пар к каркасу (которые могут не совпадать с центрами колесных пар) — O_1, O_2 , а углы поворота всей системы и колесных пар соответственно $\varphi, \theta_1, \theta_2$ (см. рис. 1). Пусть, кроме того, (x, y) — координаты фиксированной на каркасе точки O , и ψ_{ij} — углы поворота вокруг своих осей.

Связи. Уравнения связей, которые заключаются в отсутствии проскальзывания в точках контакта колес с опорной поверхностью, имеют вид (то есть скорости колес в точках контакта с опорой равны нулю):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \dot{\varphi} \mathbf{J}_z \mathbf{r}_1 + (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_i) \mathbf{J}_z \mathbf{r}_{ij} + h \dot{\psi}_{ij} \mathbf{n}_i &= 0, \quad i, j = 1, 2, \\ \mathbf{v} &= (\dot{x}, \dot{y}), \quad \mathbf{r}_i = (\pm b_i \cos \varphi, \pm b_i \sin \varphi), \quad \mathbf{n}_i = (\cos(\theta_i + \varphi), \sin(\theta_i + \varphi)), \\ \mathbf{r}_{ik} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_i + \varphi) & -\sin(\theta_i + \varphi) \\ \sin(\theta_i + \varphi) & \cos(\theta_i + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_i \\ (-1)^{k+1} a_{ik} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

Рис. 1.

где b_i , a_{ij} , d_i — некоторые константы, определяющие конфигурацию системы, h — радиус колес, векторы r_i , r_{ij} , n_i указаны на рис. 1.

Замечание. Произведение $\mathbf{J}_z \mathbf{r}$ эквивалентно проекции на плоскость x, y векторного произведения $e_z \times \mathbf{r}$.

Система (1) содержит восемь линейных уравнений относительно девяти неизвестных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}_i$, $\dot{\psi}_{ij}$. Можно показать, что (если одновременно $\theta_1 + \frac{\pi}{2}$ и $\theta_2 + \frac{\pi}{2}$) среди них лишь шесть линейно независимых, и, кроме того, связи можно записать в форме (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{11} &= \frac{-(b_1 + b_2) \cos \theta_2 \dot{\varphi} - (d_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - a_{11} \sin(\theta_1 - \theta_2))(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) + d_2(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)}{h \sin(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \dot{\psi}_{12} &= \frac{-(b_1 + b_2) \cos \theta_2 \dot{\varphi} - (d_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - a_{12} \sin(\theta_1 - \theta_2))(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) + d_2(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)}{h \sin(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \dot{\psi}_{21} &= \frac{-(b_1 + b_2) \cos \theta_2 \dot{\varphi} - d_1(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) + (d_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - a_{21} \sin(\theta_1 - \theta_2))(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)}{h \sin(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \dot{\psi}_{22} &= \frac{-(b_1 + b_2) \cos \theta_2 \dot{\varphi} - d_1(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) + (d_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - a_{22} \sin(\theta_1 - \theta_2))(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)}{h \sin(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \dot{x} &= \frac{(b_1 \cos \theta_1 \cos(\varphi + \theta_2) + b_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi + \theta_1))\dot{\varphi} + d_1 \cos(\varphi + \theta_2)(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) - d_2 \cos(\varphi + \theta_1)(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}, \\ \dot{y} &= \frac{(b_1 \cos \theta_1 \sin(\varphi + \theta_2) + b_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi + \theta_1))\dot{\varphi} + d_1 \sin(\varphi + \theta_2)(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) - d_2 \sin(\varphi + \theta_1)(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Кинетическая энергия. Кинетическую энергию этой системы без учета связей можно выписать, суммируя кинетические энергии отдельных частей так, что окончательно находим:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} (I_{11} \dot{\psi}_{11}^2 + I_{12} \dot{\psi}_{12}^2 + I_{21} \dot{\psi}_{21}^2 + I_{22} \dot{\psi}_{22}^2) + \\ &+ M (v_y R_x - v_x R_y) \dot{\varphi} + m_1 (v_y R_x^{(1)} - v_x R_y^{(1)}) (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) + m_2 (v_y R_x^{(2)} - v_x R_y^{(2)}) (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2) + \\ &+ m_1 (\mathbf{r}_1, \mathbf{R}^{(1)}) \dot{\varphi} (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1) + m_2 (\mathbf{r}_2, \mathbf{R}^{(2)}) \dot{\varphi} (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2), \\ I_0 &= I_0^{(0)} + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2, \quad I_1 = I_1^{(0)} + m_{11} r_{11}^2 + m_{12} r_{12}^2, \quad I_2 = I_2^{(0)} + m_{21} r_{21}^2 + m_{22} r_{22}^2, \\ \mathbf{R} &= \frac{m_0 \mathbf{R}^{(0)} + m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}, \end{aligned} \quad (3)$$

где M , m_1 , m_2 , m_{ij} — массы всей системы, рам с колесами и колес соответственно; $I_0^{(0)}$ — момент инерции каркаса (без рам) относительно точки O ; $I_1^{(0)}$, $I_2^{(0)}$ — моменты инерции рам

Рис. 2. Схема симметричной тележки и используемые обозначения. В случае, когда задняя ось закреплена $\theta_2 = \theta_0 = \text{const}$, $\theta_1 = \theta$

без колес относительно осей O_1 , O_2 ; I_{ij} — моменты инерции колес; $\mathbf{R}^{(0)}$ — вектор из точки O в центр масс каркаса; $\mathbf{R}^{(i)}$ — векторы из точек O_i в центры масс рам с колесами.

Мы не будем приводить уравнения движения для самого общего случая, а рассмотрим ряд наиболее употребительных и проясняющих примеров.

2.2. Симметричная тележка с закрепленной осью

Рассмотрим движение тележки, подчиненной следующим дополнительным условиям:

- точки закрепления колесных пар O_1 , O_2 совпадают с центрами масс этих пар и с серединами осей, несущих колеса:

$$d_1 = d_2 = 0, \quad a_{11} = a_{12} = a_1, \quad a_{21} = a_{22} = a_2;$$

- одна ось (которую назовем задней) закреплена под фиксированным углом:

$$\theta_2 = \theta_0 = \text{const}, \quad \theta_1 = \theta;$$

- точка O на прямой O_1O_2 выбирается на перпендикуляре к этой прямой, проходящей через центр масс системы C , так что:

$$\mathbf{R} = (-\eta \sin \varphi, \eta \cos \varphi), \quad |CO| = \eta;$$

- колеса имеют один и тот же момент инерции:

$$I_{ij} = m_w h^2, \quad i, j = 1, 2.$$

Уравнения движения и первые интегралы. Обозначим $\theta_1 = \theta$, тогда уравнения связей в этом случае представляются в форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta - \theta_0)} (b_1 \cos \theta_1 \cos(\varphi + \theta_0) + b_2 \cos \theta_0 \cos(\varphi + \theta)), \\ \dot{y} &= \frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta - \theta_0)} (b_1 \cos \theta \sin(\varphi + \theta_0) + b_2 \cos \theta_0 \sin(\varphi + \theta)), \\ h\dot{\psi}_{11/12} &= -\frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta - \theta_0)} (b_1 + b_2) \cos \theta_0 + / - a_1(\dot{\theta} + \dot{\varphi}), \\ h\dot{\psi}_{21/22} &= -\frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta - \theta_0)} (b_1 + b_2) \cos \theta + / - a_2 \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{4}$$

После подстановки связей (4) в кинетическую энергию (3) находим:

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \frac{1}{2}I_1^*(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}g(\theta)\dot{\varphi}^2, \\ g(\theta) &= \sin^{-2}(\theta - \theta_0)(J_0 \sin^2(\theta - \theta_0) + J_1 \cos^2 \theta + J_2 \cos^2 \theta_0 + J_3 \cos \theta_0 \cos \theta \sin(\theta_0 - \theta)), \\ I_1^* &= I_1 + 2m_w a_1^2, \quad J_0 = I_0 + I_2 + 2m_w a_2^2 - Mb_1 b_2, \quad J_3 = 2M\eta(b_1 + b_2), \\ J_1 &= (b_1 + b_2)(Mb_1 + 2m_w(b_1 + b_2)), \quad J_2 = (b_1 + b_2)(Mb_2 + 2m_w(b_1 + b_2)).\end{aligned}\quad (5)$$

Для матрицы, определяющей неголономные члены в уравнениях (4), получим соответственно

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\varphi}\frac{\partial g}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{2}\dot{\varphi}\frac{\partial g}{\partial \theta} & 0 \end{vmatrix}.$$

Используя *предположение 1*, получим уравнения движения системы в следующей форме:

$$\ddot{\theta} = -\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\dot{\theta}\frac{1}{g(\theta)}\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta}. \quad (6)$$

Эта система имеет очевидные интегралы движения:

$$\mathcal{W} = \dot{\varphi} + \dot{\theta}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}g(\theta)\dot{\varphi}^2. \quad (7)$$

Особенность при $\theta = \theta_0 \neq \pi/2$ в уравнениях связей (4) и уравнении (6) — несущественная, она появляется вследствие того, что из исходных уравнений связей (1) вытекает, что при $\theta = \theta_0$ обращается в ноль угловая скорость оси O_1O_2 , то есть $\dot{\varphi} = 0$. Эта особенность устраняется выбором новой независимой переменной

$$v_\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta - \theta_0)},$$

при этом в переменных v_φ , $\dot{\theta}$, θ уравнения движения не содержат сингулярностей.

Качественный анализ при $\theta_0 = 0$. Построим подробный качественный анализ динамики тележки, когда задняя ось закреплена под прямым углом к прямой O_1O_2 .

Замечание. Хотя уравнения (6) можно проинтегрировать в квадратурах [5], из них практически невозможно сделать каких-либо выводов о характере движения, поэтому при анализе мы их не применяем.

Приведенная система. В пространстве переменных $z = (v_\varphi, \dot{\theta}, \theta)$, $\theta \bmod 2\pi$, траектория определяется пересечением поверхностей уровня первых интегралов (7), которые представляются в форме

$$\begin{aligned}\dot{\theta} + v_\varphi \sin \theta &= \omega, \quad (1 + A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta)v_\varphi^2 = 2\epsilon, \\ A &= \frac{J_0 - J_1}{J_1 + J_2} = \frac{I_0 + I_2 + Mb_2^2 + 2m_w a_2^2 - (M + 2m_w)(b_1 + b_2)^2}{(M + 4m_w)(b_1 + b_2)^2}, \\ B &= \frac{J_3}{J_1 + J_2} = \frac{2M\eta}{(M + 4m_w)(b_1 + b_2)},\end{aligned}\quad (8)$$

где ω , ϵ — константы первых интегралов.

Считая, что масса колеса много меньше массы всей системы, то есть $m_w \ll M$, можно найти области определения констант A , B . Преобразуем равенство для константы A из (8):

$$A = \frac{I_0 + I_2}{M(b_1 + b_2)^2} + \frac{b_2^2}{(b_1 + b_2)^2} - 1. \quad (9)$$

Величина второго слагаемого в (9) принадлежит интервалу $(0, 1)$, тогда из равенства (9) получим следующее неравенство:

$$A \geq \frac{I_0 + I_2}{M(b_1 + b_2)^2} - 1, \quad (10)$$

так как $(I_0 + I_2)/M(b_1 + b_2) \geq 0 \Rightarrow A \geq -1$.

Равенство для константы B в предположении $m_w \ll M$ примет вид

$$B = \frac{2\eta}{(b_1 + b_2)}, \quad (11)$$

поскольку величина $(b_1 + b_2) > 0$, то знак постоянной B определяется знаком η , поскольку η не ограничена по величине и может быть как положительной, так и отрицательной, то $B \in (+\infty, -\infty)$. Заметим, что при $\eta = 0$, а следовательно, и $B = 0$, мы получим уравнения движения и квадратуры (6), (4) для случая симметричной тележки с зафиксированной колесной парой.

Уравнения (6) (или, точнее, уравнения для $(\theta, \dot{\theta}, v_\varphi)$) описывают так называемую приведенную систему, то есть динамику взаимного расположения частей тележки. По известным решениям приведенной системы можно определить положение и ориентацию тележки на плоскости, воспользовавшись квадратурами (так называемая реконструкция динамики):

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= v_\varphi \sin \theta, \\ \dot{x} &= v_\varphi (b_1 \cos \theta \cos \varphi + b_2 \cos(\varphi + \theta)), \quad \dot{y} = v_\varphi (b_1 \cos \theta \sin \varphi + b_2 \sin(\varphi + \theta)). \end{aligned} \quad (12)$$

Любопытно, что ни в уравнения движения для переменных z , ни в уравнения связи (12) не входит длина передней полуоси a_1 . Это, в частности, означает, что «трехколесник» эквивалентен обычной тележке (колесному экипажу) с некоторыми специально выбранными постоянными A , B .

Рис. 3. Проекция траекторий, соответствующих различным значениям ϵ , на развертку цилиндра $(\dot{\theta}, \theta)$ при $A = 1$, $\omega = 1$ а) $B = 0$, б) $B = 1.6$

Таким образом, соотношения (8) определяют двухпараметрическое семейство траекторий (параметризуемых величинами ω , ϵ), которые целиком заполняют трехмерное фазовое пространство приведенной системы, определяемое координатами z (и вследствие единственности решений, очевидно, не пересекаются друг с другом).

Для описания возможных движений тележки, по аналогии с гамильтоновыми системами с одной степенью свободы, поступим следующим образом. Зафиксируем величину линейного интеграла ω и спроецируем получившееся однопараметрическое семейство траекторий на цилиндр $(\dot{\theta}, \theta \bmod 2\pi)$. Проекция траекторий на этом цилиндре определяются уравнением

$$(1 + A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta)(\omega - \dot{\theta})^2 = 2\epsilon \sin^2 \theta, \quad (13)$$

и, как видно из рисунка 3, пересекаются друг с другом в точках $\theta = 0, \pi$, $\dot{\theta} = \omega$. Очевидно, что эти пересечения лишь особенности проекции и в трехмерном пространстве $(v_\varphi, \dot{\theta}, \theta)$ траектории не пересекаются, в чем легко убедиться, спроецировав их на плоскость/цилиндр $(v_\varphi, \theta \bmod 2\pi)$.

Одно из отличий описываемой системы от обычной гамильтоновой системы с одной степенью свободы заключается в том, что линии уровня интеграла (13) пересекают прямую $\dot{\theta} = 0$ не под прямым углом. Следовательно, на траектории в окрестности точки пересечения $\theta = \theta_*$ справедливо равенство $\dot{\theta} = k(\theta - \theta_*) + O(|\theta - \theta_*|^2)$, $k = \text{const}$ (тангенс угла наклона кривой). Зависимость угла от времени $\theta(t)$ при больших по величине t на этой траектории определяется соотношением

$$\dot{\theta} = \theta_* + e^{kt} + O(e^{2kt}), \quad \begin{array}{l} t \rightarrow -\infty, \text{ при } k > 0, \\ t \rightarrow +\infty, \text{ при } k < 0. \end{array} \quad (14)$$

Отсюда замечаем, что на прямой $\dot{\theta} = 0$ лежат (вырожденные) неподвижные точки системы, разделяющие линии уровня интеграла (13) на пару асимптотических траекторий; как следует из (14) при $k > 0$ эти неподвижные точки неустойчивы, а при $k < 0$ — устойчивы.

Таким образом окончательно получаем, что приведенная система (8) имеет четыре типа решений (см. рис. 3):

T_1 — неподвижные точки на оси $\dot{\theta} = 0$;

T_2 — асимптотические траектории, стремящиеся к оси $\dot{\theta} = 0$;

T_3 — периодические траектории $\dot{\theta} = \omega$, $\epsilon = 0$;

T_4 — периодические траектории, не пересекающие ось $\dot{\theta} = 0$.

На плоскости первых интегралов тип приведенной системы определяется следующей бифуркационной диаграммой.

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма приведенной системы. Тип траектории в каждой области указан соответствующими буквами T_k . $k = 1 \dots 4$. Траектории типа T_3 лежат только на оси $\epsilon = 0$

Абсолютная динамика. Опишем теперь динамику всей тележки в абсолютном пространстве для каждого из вышеперечисленных типов траекторий.

(T_1) В этом случае подвижная ось фиксирована, то есть $\theta = \theta_* = \text{const}$, при этом согласно (12)

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \omega t, \\ x &= \frac{b_1 \cos \theta_* \sin \omega t + b_2 \sin(\omega t + \theta_*)}{\sin \theta_*}, \quad y = -\frac{b_1 \cos \theta_* \cos \omega t + b_2 \cos(\omega t + \theta_*)}{\sin \theta_*}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, тележка катится так, что центр масс движется по окружности радиуса R :

$$R = \frac{b_1^2 \cos^2 \theta_* + 2b_1 b_2 \cos^2 \theta_* + b_2^2}{\sin^2 \theta_*}. \quad (16)$$

(T_2) В приведенной системе траектория выходит (при $t \rightarrow -\infty$) из неустойчивой неподвижной точки $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \theta_*^s$, и входит в устойчивую $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \theta_*^u$, при этом стремление к этим точкам (при $t \rightarrow \pm\infty$) экспоненциальное. Соответственно, тележка на плоскости переходит от одного движения, описываемого соотношениями (15), при $t \rightarrow -\infty$, к другому аналогичному движению (см. рис. 5).

Рис. 5. Характерные траектории для второго типа решений T_2 , при параметрах системы $E = 1$, $A = 2$, $\omega = 0.8$. а) Проекция траектории на развертку цилиндра $(\dot{\theta}, \theta)$. б) Траектория центра масс

(T_3) В этом случае

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = 0,$$

то есть тележка стоит на месте, а ее подвижная ось равномерно вращается.

(T_4) Приведенная система совершает периодическое движение, период которого определяется квадратурой

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - \sqrt{\frac{2\epsilon}{1 + A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta}}}.$$

При этом тележка совершает квазипериодическое двухчастичное движение в ограниченной области на плоскости (см. рис. 6).

Рис. 6. Характерные траектории для четвертого типа решений T_4 при параметрах системы $E = 2.3$, $A = 2$, $\omega = 0.8$. а) Проекция траектории на развертку цилиндра $(\dot{\theta}, \theta)$. б) Траектория центра масс

2.3. Симметричная тележка с незакрепленными осями

Рассмотрим движение тележки, подчиненной следующим дополнительным условиям:

- точки закрепления колесных пар O_1 , O_2 совпадают с центрами масс этих пар и с серединами осей, несущих колеса:

$$d_1 = d_2 = 0, \quad a_{11} = a_{12} = a_1, \quad a_{21} = a_{22} = a_2;$$

- точка O на прямой O_1O_2 выбирается на перпендикуляре к этой прямой, проходящей через центр масс системы C , так что:

$$R = (-\eta \sin \varphi, \eta \cos \varphi), \quad |CO| = \eta;$$

- колеса имеют один и тот же момент инерции:

$$I_{ij} = m_w h^2, \quad i, j = 1, 2.$$

Уравнения движения и первые интегралы. Уравнения связей в этом случае представляются в форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} (b_1 \cos \theta_1 \cos(\varphi + \theta_2) + b_2 \cos \theta_2 \cos(\varphi + \theta_1)), \\ \dot{y} &= \frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} (b_1 \cos \theta_1 \sin(\varphi + \theta_2) + b_2 \cos \theta_2 \sin(\varphi + \theta_1)), \\ h\dot{\psi}_{11/12} &= -\frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} (b_1 + b_2) \cos \theta_2 + / - a_1(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1), \\ h\dot{\psi}_{21/22} &= -\frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} (b_1 + b_2) \cos \theta_1 + / - a_2(\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2). \end{aligned} \quad (17)$$

После подстановки связей (17) в кинетическую энергию (3) находим:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \frac{1}{2} I_1^* (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_2^* (\dot{\varphi} + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} g(\theta_1, \theta_2) \dot{\varphi}^2, \\ g(\theta_1, \theta_2) &= \sin^{-2}(\theta_2 - \theta_1) (J_0 \sin^2(\theta_2 - \theta_1) + J_1 \cos^2 \theta_1 + J_2 \cos^2 \theta_2 + J_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)), \\ I_i^* &= I_i + 2m_w a_i^2, \quad J_0 = I_0 + I_1 + I_2 - Mb_1 b_2, \quad J_3 = 2M\eta(b_1 + b_2), \\ J_1 &= (b_1 + b_2)(Mb_1 + 2m_w(b_1 + b_2)), \quad J_2 = (b_1 + b_2)(Mb_2 + 2m_w(b_1 + b_2)). \end{aligned} \quad (18)$$

Для матрицы, определяющей неголономные члены в уравнениях (4), получим соответственно

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \dot{\varphi} \frac{\partial g}{\partial \theta_1} & \frac{1}{2} \dot{\varphi} \frac{\partial g}{\partial \theta_2} \\ -\frac{1}{2} \dot{\varphi} \frac{\partial g}{\partial \theta_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \dot{\varphi} \frac{\partial g}{\partial \theta_2} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Используя *предположение 1*, получим уравнения движения системы в следующей форме:

$$\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = -\ddot{\varphi} = \frac{1}{g(\theta_1, \theta_2)} \left(\frac{\partial g(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 + \frac{\partial g(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 \right) \frac{\dot{\varphi}}{2} = \frac{\dot{\varphi}}{2} \frac{\dot{g}(\theta_1, \theta_2)}{g(\theta_1, \theta_2)}. \quad (19)$$

Эта система имеет очевидные интегралы движения:

$$\mathcal{W}_1 = \dot{\varphi} + \dot{\theta}_1, \quad \mathcal{W}_2 = \dot{\varphi} + \dot{\theta}_2, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} g(\theta_1, \theta_2) \dot{\varphi}^2. \quad (20)$$

Особенность при $\theta_1 = \theta_2 \neq \pi/2$ в уравнениях связей (17) и уравнениях (20) — несущественная, она появляется вследствие того, что из исходных уравнений связей (1) вытекает, что при $\theta_1 = \theta_2$ обращается в ноль угловая скорость оси O_1O_2 то есть $\dot{\varphi} = 0$. Эта особенность устраняется выбором вместо $\dot{\varphi}$ новой независимой переменной:

$$v_\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Помимо того, чтобы привести уравнения движения к более удобному для исследований виду, положим дополнительно

$$\theta_1 + \theta_2 = \alpha, \quad \theta_1 - \theta_2 = \beta,$$

где $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\beta \in [-\pi, \pi]$ — угловые переменные на торе. Окончательно получим

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \left(\frac{\dot{G}}{G} \sin \beta - 2 \cos \beta \dot{\beta} \right) v_\varphi, \quad \ddot{\beta} = 0, \quad \dot{v}_\varphi = -\frac{v_\varphi}{2G} \dot{G}, \\ G &= 1 + \cos \alpha \cos \beta + A \sin^2 \beta - B(\cos \alpha + \cos \beta) \sin \beta - C \sin \alpha \sin \beta, \\ A &= \frac{2J_0}{J_1 + J_2}, \quad B = \frac{J_3}{J_1 + J_2}, \quad C = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где полагается, что $\dot{G} = \frac{\partial G}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial G}{\partial \beta} \dot{\beta}$. Эти уравнения не содержат (вырожденных) особенностей на оси $\beta = 0$ (то есть при $\theta_1 = \theta_2$), а содержат лишь изолированные сингулярности в точках $\alpha = \pi$, $\beta = 0$ (то есть $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$) и $\alpha = 0$, $\beta = \pm\pi$ (то есть $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$), так как в этих точках $G = 0$. Заметим, что согласно (21) $|C| \leq 1$.

Авторы выражают благодарность Васькину В. В. и Килину А. А. за полезные обсуждения в ходе работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартынюк А. А., Лобас Л. Г., Никитина Н. В. Динамика и устойчивость движения колесных транспортных машин. — Киев.: Техника, 1981. — 223 с.
2. Лобас Л. Г. Неголономные модели колесных экипажей. — Киев.: Научная мысль, 1986. — 230 с.
3. Рокар И. Неустойчивость в механике. — М.: Издательство иностранной литературы, 1959. — 285 с.
4. Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М.-Ижевск.: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. — 591 с.
5. Розенблат Г. М. К динамике неголономных моделей колесных экипажей // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 3. — С. 99–108.
6. Луценко С. Г. Динамика колесного экипажа // Вестник Удмуртского университета. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 87–94.

Поступила в редакцию 03.12.10

A. V. Borisov, S. G. Lutsenko, I. S. Mamaev

Dynamics of a wheeled carriage on a plane

The paper deals with the problem of motion of a wheeled carriage on a plane in the case where one of the wheeled pairs is fixed. In addition, the case of motion of a wheeled carriage on a plane in the case of two free wheeled pairs is considered.

Keywords: nonholonomic constraint, dynamics of the system, wheeled carriage.

Mathematical Subject Classifications: 37J60

Борисов Алексей Владимирович, Институт компьютерных исследований, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: borisov@rtd.ru

Луценко Степан Григорьевич, кафедра теоретической физики, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, E-mail: ул. Университетская, 1 (корп. 4), E-mail: lsg@rtd.ru

Мамаев Иван Сергеевич, Институт компьютерных исследований, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, E-mail: mamaev@rtd.ru