Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. I. Danilov, On a class of Weyl almost periodic selections of multivalued maps,
Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2009, Issue 1, 24–45

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.229.45.116

April 26, 2023, 17:03:49

УДК 517.518.6

© Л. И. Данилов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВЕЙЛЮ СЕЧЕНИЙ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ¹

Рассмотрен класс почти периодических по Вейлю функций, для которых множество ε -почти периодов, определяемых с помощью псевдометрики Вейля, относительно плотно при всех $\varepsilon > 0$. Для этого класса функций при некоторых дополнительных ограничениях доказано существование почти периодических сечений многозначных почти периодических отображений.

Ключевые слова: почти периодическая функция, сечение, многозначное отображение.

Введение

В [1, 2] в связи с исследованием почти периодических (п.п.) дифференциальных включений был поставлен вопрос о существовании п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу сечений многозначных отображений $\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(t) \subseteq \mathcal{H}$ с замкнутыми образами в банаховом пространстве $\mathcal{H}$. Известно, что п.п. по Бору многозначные отображения могут не иметь п.п. по Бору сечений [3, 4]. С другой стороны, у п.п. по Степанову многозначных отображений всегда существуют п.п. по Степанову сечения. Впервые это было доказано в [5] на основе результатов Фришковского [6]. Другое доказательство, использующее равномерную аппроксимацию п.п. по Степанову функций элементарными п.п. по Степанову функциями, приведено в [4]. В [7] предложен также вариант доказательства, в котором используются «овыпукливание» задачи и теорема Майкла. Существование п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу сечений у многозначных п.п. (соответственно по Вейлю и по Безиковичу) отображений было доказано в [8] и [9]. П.п. по Степанову и п.п. по Вейлю сечения имеются также у многозначных отображений, которые являются носителями п.п. мерозначных функций (но сами могут не быть почти периодическими) [10, 11]. В настоящей работе (при некоторых дополнительных ограничениях) дается положительный ответ на вопрос (см. [2]) о существовании п.п. по Вейлю сечений многозначных п.п. по Вейлю отображений, когда рассматривается другой класс п.п. функций, определяемый не с помощью замыкания в псевдометрике Вейля множества тригонометрических многочленов (или множества п.п. по Степанову функций), а как класс функций, для которых ε -почти периоды в псевдометрике Вейля для всех $\varepsilon > 0$ относительно плотны.

В § 1 приведены определения и некоторые утверждения о п.п. функциях, которые используются в дальнейшем. Большинство утверждений о п.п. функциях можно найти в [12, 13]. Многие свойства п.п. по Вейлю функций приведены также в [14]. Разные классы п.п. по Вейлю функций и соотношения между ними подробно рассмотрены в [15]. Основным результатом работы является теорема 2, сформулированная в § 1. Доказательство этой теоремы приведено в § 4. В § 2 собраны вспомогательные результаты. В § 3 доказывается теорема 7 из § 2.

§ 1. Определения, обозначения и основное утверждение

Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, meas — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow U$ называется *элементарной*, если существуют точки $x_j \in U$ и попарно непересекающиеся измеримые по Лебегу множества $T_j \subseteq \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\text{meas } \mathbb{R} \setminus \bigcup_j T_j = 0$ и $f(t) = x_j$ при $t \in T_j$. Обозначим такую функцию через $f(\cdot) = \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot)$. Для произвольных функций $f_j : \mathbb{R} \rightarrow U$, $j \in \mathbb{N}$, пусть $\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot)$ — функция, совпадающая с $f_j(\cdot)$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00403).

на множествах T_j (функции f_j и множества T_j будут нумероваться в дальнейшем также с помощью нескольких индексов, при этом можно рассматривать и конечное число множеств T_j , которые всегда можно дополнить пустыми множествами до счетной совокупности). Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow U$ (сильно) *измерима*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $f_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow U$ такая, что $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при почти всех (п. в.) $t \in \mathbb{R}$. Совокупность измеримых функций $f: \mathbb{R} \rightarrow U$ обозначим через $M(\mathbb{R}, U)$, при этом функции, совпадающие при п. в. $t \in \mathbb{R}$, отождествляются (поэтому измеримые функции и в том числе элементарные функции $\mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot)$, а также функции $\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot)$ могут не определяться на множествах нулевой меры). Пусть $(L^\infty(\mathbb{R}, U), D_\infty^{(\rho)})$ — метрическое пространство в существенном ограниченных измеримых функций $f: \mathbb{R} \rightarrow U$ с метрикой

$$D_\infty^{(\rho)}(f, g) = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(t), g(t)), \quad f, g \in L^\infty(\mathbb{R}, U).$$

Фиксируем точку $x_0 \in U$. Пусть при $p \geq 1$

$$M_p(\mathbb{R}, U) = \left\{ f \in M(\mathbb{R}, U) : \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_\xi^{\xi+1} \rho^p(f(t), x_0) dt < +\infty \right\}.$$

На множестве $M_p(\mathbb{R}, U)$ для всех $l > 0$ определяются метрики

$$D_{p,l}^{(\rho)}(f, g) = \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_\xi^{\xi+l} \rho^p(f(t), g(t)) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f, g \in M_p(\mathbb{R}, U).$$

При $l_1 \geq l$ справедливы оценки

$$\left(\frac{l}{l_1} \right)^{\frac{1}{p}} D_{p,l}^{(\rho)}(f, g) \leq D_{p,l_1}^{(\rho)}(f, g) \leq \left(1 + \frac{l}{l_1} \right)^{\frac{1}{p}} D_{p,l}^{(\rho)}(f, g),$$

поэтому все метрики $D_{p,l}^{(\rho)}$, $l > 0$, эквивалентны и существует предел

$$D_p^{(\rho)}(f, g) = \lim_{l \rightarrow +\infty} D_{p,l}^{(\rho)}(f, g) = \inf_{l > 0} D_{p,l}^{(\rho)}(f, g), \quad f, g \in M_p(\mathbb{R}, U),$$

который является псевдометрикой на $M_p(\mathbb{R}, U)$.

Если $U = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ — банахово пространство ($\rho(x, y) = \rho_{\mathcal{H}}(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathcal{H}$; $\rho_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$), то для функций $f \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ определена норма

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|,$$

а для функций $f \in M_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \geq 1$, определены нормы

$$\|f\|_{p,l} = \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_\xi^{\xi+l} \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad l > 0,$$

и полунорма

$$\|f\|_p = \lim_{l \rightarrow +\infty} \|f\|_{p,l}.$$

В дальнейшем удобно предполагать, что $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ — комплексное банахово пространство. Если банахово пространство $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ вещественное, то можно рассматривать его комплексификацию $\mathcal{H} + i\mathcal{H}$, отождествляя пространство $\mathcal{H}$ с вещественным подпространством (норма $\|\cdot\|_{\mathcal{H} + i\mathcal{H}}$ на вещественном подпространстве $\mathcal{H}$ совпадает с исходной нормой).

Множество $T \subseteq \mathbb{R}$ называется *относительно плотным*, если существует число $a > 0$ такое, что $[\xi, \xi + a] \cap T \neq \emptyset$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Совокупность относительно плотных множеств $T \subseteq \mathbb{R}$ будем обозначать через $\mathcal{S}_{\text{rd}}$. Число $\tau \in \mathbb{R}$ называется $(\varepsilon, D_\infty^{(\rho)})$ -*почти периодом* (или

просто ε -почти периодом) функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}, U)$, $\varepsilon > 0$, если $D_\infty^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \varepsilon$. Непрерывная ограниченная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow U$ принадлежит пространству $CAP(\mathbb{R}, U)$ п. н. по Бору функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $(\varepsilon, D_\infty^{(\rho)})$ -почти периодов функции f относительно плотно. Число $\tau \in \mathbb{R}$ называется $(\varepsilon, D_{p,l}^{(\rho)})$ -почти периодом (соответственно $(\varepsilon, D_p^{(\rho)})$ -почти периодом) функции $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, если $D_{p,l}^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \varepsilon$ (соответственно $D_p^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \varepsilon$). Функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R}, U)$ п. н. по Степанову функций степени p , если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество $(\varepsilon, D_{p,1}^{(\rho)})$ -почти периодов функции f (вместо метрики $D_{p,1}^{(\rho)}$ можно использовать любую метрику $D_{p,l}^{(\rho)}$, $l > 0$). Функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R}, U)$ п. н. по Вейлю функций степени p , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $l = l(\varepsilon, f) > 0$ такое, что множество $(\varepsilon, D_{p,l}^{(\rho)})$ -почти периодов функции f относительно плотно. Функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$ принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R}, U)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in S_p(\mathbb{R}, U)$ такая, что $D_p^{(\rho)}(f, f_\varepsilon) < \varepsilon$. Если $U = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, то в качестве функций f_ε можно выбирать тригонометрические многочлены

$$f_\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} h_j^{(\varepsilon)} e^{i\lambda_j^{(\varepsilon)} t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $h_j^{(\varepsilon)} \in \mathcal{H}$, $\lambda_j^{(\varepsilon)} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N(\varepsilon)$. Множество $W_p(\mathbb{R}, U)$ замкнуто в псевдометрическом пространстве $(M_p(\mathbb{R}, U), D_p^{(\rho)})$. Справедливы вложения $S_p(\mathbb{R}, U) \subseteq W_p(\mathbb{R}, U)$, $W_{p_1}(\mathbb{R}, U) \subseteq W_p(\mathbb{R}, U)$, $1 \leq p \leq p_1$.

Будем далее обозначать через $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon; f)$ множество $(\varepsilon, D_p^{(\rho)})$ -почти периодов функции $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$. Функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$ принадлежит пространству $\widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $(\varepsilon, D_p^{(\rho)})$ -почти периодов функции f относительно плотно $(\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon; f) \in \mathcal{S}_{\text{rd}})$. Если $1 \leq p \leq p_1$, то $\widetilde{W}_{p_1}(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ и для любой функции $f \in \widetilde{W}_{p_1}(\mathbb{R}, U)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ выполняется вложение $\mathcal{P}_{p_1}^{(\rho)}(\varepsilon; f) \subseteq \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon; f)$. Для всех $p \geq 1$ имеем $W_p(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$, при этом в общем случае пространство $\widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ не совпадает с пространством $W_p(\mathbb{R}, U)$. Например, для функции $f(t) = \sin \sqrt{|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, справедливо включение $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, но $f \notin W_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (при всех $p \geq 1$). Множество $\widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ замкнуто в псевдометрическом пространстве $(M_p(\mathbb{R}, U), D_p^{(\rho)})$. В ряде недавних статей почти периодическими по Вейлю функциями степени p называются функции из пространства $\widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ (см., например, [2, 15]), а для функций $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$ используется название «equi-Weyl almost periodic functions». В данной работе функции $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ также называются п. н. по Вейлю функциями степени p , но будет уточняться, какому именно из рассматриваемых пространств ($W_p(\mathbb{R}, U)$ или $\widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$) они принадлежат.

На пространстве U определим также метрику $\rho'(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$, $x, y \in U$, эквивалентную метрике ρ в смысле порождаемой топологии; (U, ρ') — полное метрическое пространство. Пусть $W(\mathbb{R}, U) \doteq W_1(\mathbb{R}, (U, \rho'))$ — пространство п. н. по Вейлю функций $f : \mathbb{R} \rightarrow U$ степени 1 со значениями в метрическом пространстве (U, ρ') . Аналогично определяется пространство $\widetilde{W}(\mathbb{R}, U) \doteq \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, (U, \rho'))$. При этом $W_1(\mathbb{R}, U) \subseteq W(\mathbb{R}, U)$ и $\widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}(\mathbb{R}, U)$. Если $f \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U)$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо вложение $\mathcal{P}_1^{(\rho)}(\varepsilon; f) \subseteq \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\varepsilon; f)$.

Обозначим через $\text{cl}_b U = \text{cl}_b(U, \rho)$ совокупность непустых замкнутых ограниченных подмножеств $A \subseteq U$. На $\text{cl}_b U$ определяется метрика Хаусдорфа

$$\text{dist}(A, B) = \text{dist}_\rho(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \rho(x, B), \sup_{x \in B} \rho(x, A) \right\}, \quad A, B \in \text{cl}_b U,$$

где $\rho(x, F) = \inf_{y \in F} \rho(x, y)$ — расстояние от точки $x \in U$ до непустого множества $F \subseteq U$. Пусть $\text{cl} U = \text{cl}(U, \rho) = \text{cl}_b(U, \rho')$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств $A \subseteq U$

и $\text{dist}_{\rho'}$ — метрика Хаусдорфа на $\text{cl } U$, соответствующая метрике ρ' . Метрические пространства $(\text{cl}_b U, \text{dist})$ и $(\text{cl } U, \text{dist}_{\rho'})$ являются полными. Совокупность непустых компактных подмножеств $A \subseteq U$ обозначим через $\text{cl}_c U = \text{cl}_c(U, \rho)$, при этом $\text{cl}_c(U, \rho) = \text{cl}_c(U, \rho')$. Так как $\text{dist}'(A, B) \doteq \min\{1, \text{dist}(A, B)\} = \text{dist}_{\rho'}(A, B)$ для всех $A, B \in \text{cl}_b U$, то вложение $(\text{cl}_b U, \text{dist}') \subseteq (\text{cl } U, \text{dist}_{\rho'})$ изометрично.

Пространства $W(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \doteq W_1(\mathbb{R}, (\text{cl}_b U, \text{dist}'))$ и $W_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$, $p \geq 1$, *н.н. по Вейлю многозначных отображений* $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl}_b U$ определяются как соответствующие пространства п.п. по Вейлю функций со значениями в (полном) метрическом пространстве $(\text{cl}_b U, \text{dist})$. Пусть $W(\mathbb{R}, \text{cl } U) \doteq W_1(\mathbb{R}, (\text{cl } U, \text{dist}_{\rho'}))$. Справедливы вложения $W_1(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \subseteq W(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \subseteq W(\mathbb{R}, \text{cl } U)$. Аналогично определяются пространства $\widetilde{W}_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$, $p \geq 1$, и $\widetilde{W}(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \doteq \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, (\text{cl}_b U, \text{dist}'))$ *н.н. по Вейлю многозначных отображений* $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl}_b U$. Положим $\widetilde{W}(\mathbb{R}, \text{cl } U) \doteq \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, (\text{cl } U, \text{dist}_{\rho'}))$. Также имеем $\widetilde{W}_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \subseteq \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \subseteq \widetilde{W}(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \subseteq \widetilde{W}(\mathbb{R}, \text{cl } U)$, при этом $W_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \subseteq \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$, $W(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \subseteq \widetilde{W}(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$, $W(\mathbb{R}, \text{cl } U) \subseteq \widetilde{W}(\mathbb{R}, \text{cl } U)$.

Обозначим через $M_p^\sharp(\mathbb{R}, U)$ множество функций $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, для которых

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \lim_{l_0 \rightarrow +\infty} \sup_{l \geq l_0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \sup_{T \subseteq [\xi, \xi+l]: \text{meas } T \leq \delta l} \int_T \rho^p(f(t), x_0) dt \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Множество $M_p^\sharp(\mathbb{R}, U)$ (как и множество $M_p(\mathbb{R}, U)$) не зависит от выбора точки $x_0 \in U$. Имеет место равенство (см., например, [8])

$$W_p(\mathbb{R}, U) = W(\mathbb{R}, U) \cap M_p^\sharp(\mathbb{R}, U), \quad p \geq 1.$$

Для произвольного измеримого (по Лебегу) множества $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa_W(T) \doteq \|\chi_T\|_1 = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \text{meas} [\xi, \xi+l] \cap T$$

(где χ_T — характеристическая функция множества T). Если $T_j \subseteq \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, — измеримые множества, то

$$\varkappa_W\left(\bigcup_{j=1}^n T_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \varkappa_W(T_j).$$

Пусть $M_p^*(\mathbb{R}, U)$ — множество функций $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех измеримых множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\varkappa_W(T) < \delta$, справедливо неравенство

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T} \rho^p(f(t), x_0) dt < \varepsilon^p.$$

Множество $M_p^*(\mathbb{R}, U)$ также не зависит от выбора точки $x_0 \in U$.

Лемма 1. *Справедливо равенство $M_p^*(\mathbb{R}, U) = M_p^\sharp(\mathbb{R}, U)$. Более того, множество $M_p^*(\mathbb{R}, U)$ совпадает также с замыканием множества $L^\infty(\mathbb{R}, U)$ в псевдометрическом пространстве $(M_p(\mathbb{R}, U), D_p^{(\rho)})$.*

Доказательство. Пусть $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$. Для любой функции $g \in L^\infty(\mathbb{R}, U)$ и любого измеримого множества $T \subseteq \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T} \rho^p(f(t), x_0) dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq D_p^{(\rho)}(f, g) + \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T} \rho^p(g(t), x_0) dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\leq D_p^{(\rho)}(f, g) + \varkappa_W^{\frac{1}{p}}(T) \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(g(t), x_0).$$

Также для любой функции $g \in L^\infty(\mathbb{R}, U)$ и любого числа $\delta \in (0, 1]$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} \lim_{l_0 \rightarrow +\infty} \sup_{l \geq l_0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \sup_{T \subseteq [\xi, \xi+l]: \operatorname{meas} T \leq \delta l} \int_T \rho^p(f(t), x_0) dt \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ &\leq D_p^{(\rho)}(f, g) + \delta^{\frac{1}{p}} \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(g(t), x_0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) (при $\delta \rightarrow +0$) непосредственно следует, что каждая функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, принадлежащая замыканию множества $L^\infty(\mathbb{R}, U)$, содержится в множествах $M_p^*(\mathbb{R}, U)$ и $M_p^\sharp(\mathbb{R}, U)$. Для функции $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$ и числа $a > 0$ обозначим $T_a = \{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), x_0) > a\}$,

$$f_a(t) = \begin{cases} x_0, & \text{если } t \in T_a, \\ f(t), & \text{если } t \in \mathbb{R} \setminus T_a. \end{cases}$$

Справедливы оценки

$$\operatorname{meas} [\xi, \xi + l] \cap T_a \leq a^{-p} \int_\xi^{\xi+l} \rho^p(f(t), x_0) dt, \quad l > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

$$\varkappa_W(T_a) \leq a^{-p} \lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_\xi^{\xi+l} \rho^p(f(t), x_0) dt. \quad (1.4)$$

Если $f \in M_p^\sharp(\mathbb{R}, U)$, то с помощью оценки (1.3) и определения множества $M_p^\sharp(\mathbb{R}, U)$ получаем, что $D_p^{(\rho)}(f, f_a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow +\infty$, поэтому (так как $f_a \in L^\infty(\mathbb{R}, U)$, $a > 0$) каждая функция $f \in M_p^\sharp(\mathbb{R}, U)$ содержится в замыкании множества $L^\infty(\mathbb{R}, U)$. Если $f \in M_p^*(\mathbb{R}, U)$, то из (1.4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое (достаточно большое) число $a > 0$, что

$$D_p^{(\rho)}(f, f_a) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T_a} \rho^p(f(t), x_0) dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Оценка (1.5) означает, что каждая функция $f \in M_p^*(\mathbb{R}, U)$ также содержится в замыкании множества $L^\infty(\mathbb{R}, U)$. $\square$

Функции $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ (в отличие от функций из пространства $W_p(\mathbb{R}, U)$) могут не принадлежать множеству $M_p^*(\mathbb{R}, U)$. Например, для функции

$$f(t) = \begin{cases} |n|^{\frac{1}{p}}, & \text{если } t \in [n, n + \frac{1}{|n|}), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

справедливо включение $f \in M_p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus M_p^*(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $D_p^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + m)) = 0$ для всех $m \in \mathbb{Z}$, поэтому $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Пусть $M^c(\mathbb{R}, U) = M^c(\mathbb{R}, (U, \rho))$ — множество функций $f \in M(\mathbb{R}, U)$ таких, что для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует компакт $K_{\varepsilon, \delta} \in \operatorname{cl}_c U$ такой, что

$$\varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), K_{\varepsilon, \delta}) \geq \varepsilon\}) < \delta.$$

Так как $\operatorname{cl}_c(U, \rho) = \operatorname{cl}_c(U, \rho')$, то $M^c(\mathbb{R}, (U, \rho)) = M^c(\mathbb{R}, (U, \rho'))$. Если $f \in M(\mathbb{R}, U)$, $A \in \operatorname{cl}_c U$ и $f(t) \in A$ п.в., то $f \in M^c(\mathbb{R}, U)$ тогда и только тогда, когда $f \in M^c(\mathbb{R}, (A, \rho))$. Множество $M^c(\mathbb{R}, U)$ замкнуто в псевдометрическом пространстве $(M(\mathbb{R}, U), D_1^{(\rho')})$. Также в псевдометрическом пространстве $(M_p(\mathbb{R}, U), D_p^{(\rho)})$ замкнуто множество $M_p(\mathbb{R}, U) \cap M^c(\mathbb{R}, U)$, где $p \geq 1$.

Из определения множества $M^c(\mathbb{R}, U)$ непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $f \in M^c(\mathbb{R}, U)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), \bigcup_{j=1}^N \{x_j\}) \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow +\infty.$$

Определение 1. Полное метрическое пространство (U, ρ) обладает свойством Гейне–Бореля, если $\text{cl}_b U = \text{cl}_c U$.

Примерами пространств, обладающих свойством Гейне–Бореля, являются конечномерные линейные пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, с любыми нормами, а также соответствующие им пространства $(\text{cl}_b \mathbb{R}^n, \text{dist})$.

Если $f \in M_1(\mathbb{R}, U)$, то $\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), x_0) \geq a\}) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow +\infty$. Поэтому для метрического пространства (U, ρ) , обладающего свойством Гейне–Бореля, имеет место вложение $M_1(\mathbb{R}, U) \subseteq M^c(\mathbb{R}, U)$.

Лемма 3. Для полного метрического пространства (U, ρ) следующие условия эквивалентны:

- 1) пространство (U, ρ) обладает свойством Гейне–Бореля,
- 2) $\widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U) \subseteq M^c(\mathbb{R}, U)$,
- 3) $\widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U) \cap L^\infty(\mathbb{R}, U) \subseteq M^c(\mathbb{R}, U)$.

Доказательство. Если пространство (U, ρ) обладает свойством Гейне–Бореля, то $\widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U) \subseteq M_1(\mathbb{R}, U) \subseteq M^c(\mathbb{R}, U)$. Поэтому из 1) следует 2). Условие 3) непосредственно вытекает из 2). Предположим теперь, что выполнено условие 3), но пространство (U, ρ) не обладает свойством Гейне–Бореля. Тогда найдутся множество $A \in \text{cl}_b U$, число $\varepsilon > 0$ и точки $x_j \in A$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\rho(x_j, x_k) \geq \varepsilon$ для всех $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$. Определим функцию

$$f(t) = \begin{cases} x_1, & \text{если } t \leq 1, \\ x_j, & \text{если } (j-1)^2 < t \leq j^2, \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Имеем $f \notin M^c(\mathbb{R}, U)$. С другой стороны, $D_1^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) = 0$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$, поэтому $f \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, U) \cap L^\infty(\mathbb{R}, U)$. Полученное противоречие показывает, что выполнено условие 1). $\square$

Обозначим

$$\widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U) \doteq \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U) \cap M^c(\mathbb{R}, U), \quad p \geq 1, \quad \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U) \doteq \widetilde{W}(\mathbb{R}, U) \cap M^c(\mathbb{R}, U).$$

Справедливы вложения $W_p(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U)$, $W(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ [8].

Последовательность $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, называется f -возвращающей для функции f из $W(\mathbb{R}, U)$, если $D_1^{(\rho')} (f(\cdot), f(\cdot + \tau_j)) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Если функция f принадлежит одному из пространств $W_p(\mathbb{R}, U)$, $S(\mathbb{R}, U)$, $S_p(\mathbb{R}, U)$ или $CAP(\mathbb{R}, U)$, то псевдометрику $D_1^{(\rho')}$ в определении f -возвращающих последовательностей можно заменить на псевдометрику $D_p^{(\rho)}$ или метрику $D_{1,1}^{(\rho')}$, $D_{p,1}^{(\rho)}$ или $D_\infty^{(\rho)}$ соответственно. При такой замене множество f -возвращающих последовательностей не меняется [14]. Последовательность $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, является f -возвращающей для функции $f \in W(\mathbb{R}, U)$ (соответственно для функции $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $l = l(\varepsilon, f) > 0$ и $j_0 \in \mathbb{N}$ такие, что все числа τ_j , для которых $j \geq j_0$, являются $(\varepsilon, D_{1,l}^{(\rho')})$ -почти периодами (соответственно $(\varepsilon, D_{p,l}^{(\rho)})$ -почти периодами) функции f [14].

Для функции $f \in W(\mathbb{R}, U)$ через $\text{Mod } f$ обозначается модуль (группа по сложению) таких чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, что $e^{i\lambda\tau_j} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow +\infty$ (где $i^2 = -1$) для любой f -возвращающей последовательности τ_j . Если $D_1^{(\rho')} (f(\cdot), y_0(\cdot)) \neq 0$ для всех постоянных функций $y_0(t) \equiv y_0 \in U$, $t \in \mathbb{R}$, то $\text{Mod } f$ — счетный модуль (в противном случае $\text{Mod } f = \{0\}$). Если $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$,

и $e^{i\lambda\tau_j} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow +\infty$ для всех $\lambda \in \text{Mod } f$, где $f \in W(\mathbb{R}, U)$, то последовательность τ_j является f -возвращающей.

Пусть $f \in W(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, где $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ — (комплексное) банахово пространство. Тогда (см., например, [12]) для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует среднее значение

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{-i\lambda t} f(t) dt = M\{e^{-i\lambda t} f(t)\}. \quad (1.6)$$

Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *показателем Фурье* функции $f \in W_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, если $M\{e^{-i\lambda t} f(t)\} \neq 0$. При этом $\text{Mod } f$ совпадает с *модулем частот* (показателей Фурье) функции f , то есть с наименьшим модулем (группой по сложению) в $\mathbb{R}$, содержащим все показатели Фурье функции f .

Для функций $f \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ средние значения (1.6) могут не существовать. Например, рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 1, \\ (-1)^k, & \text{если } 3^{k-1} < t \leq 3^k, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

принадлежащую пространству $\widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Для нее не существует среднее значение (1.6) при $\lambda = 0$ (и $M\{e^{-i\lambda t} f(t)\} = 0$ при $\lambda \neq 0$).

Если $\Lambda_j \subseteq \mathbb{R}$ — произвольные модули (где индекс j принадлежит любому непустому индексному множеству), то через $\sum_j \Lambda_j$ (или $\Lambda_1 + \dots + \Lambda_n$ для конечного множества модулей Λ_j , $j = 1, \dots, n$) обозначается наименьший модуль в $\mathbb{R}$, содержащий все множества Λ_j .

Теорема 1 (см. [8]). Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $g \in W(\mathbb{R}, U)$, $F \in W(\mathbb{R}, \text{cl } U)$. Тогда для любой неубывающей функции $\eta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, для которой $\eta(0) = 0$ и $\eta(t) > 0$ при $t > 0$, существует функция $f \in W(\mathbb{R}, U)$ такая, что $\text{Mod } f \subseteq \text{Mod } g + \text{Mod } F$, $f(t) \in F(t)$ н. в. и $\rho(f(t), g(t)) \leq \rho(g(t), F(t)) + \eta(\rho(g(t), F(t)))$ н. в. Если, кроме того, $F \in W_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$ для некоторого $p \geq 1$, то функция f принадлежит пространству $W_p(\mathbb{R}, U)$.

В теореме 1 утверждается существование п. п. по Вейлю сечений $f \in W(\mathbb{R}, U)$ многозначных п. п. по Вейлю отображений $F \in W(\mathbb{R}, \text{cl } U)$. В следующей теореме 2, которая является основным результатом данной работы, содержится аналогичное утверждение о существовании п. п. по Вейлю сечений $f \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ многозначных п. п. по Вейлю отображений $F \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, \text{cl } U)$. Теорема 2 была ранее анонсирована в [16].

Теорема 2. Пусть (U, ρ) — полное метрическое пространство, $g \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$, $F \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, \text{cl } U)$ и $\mathcal{T}(\delta) \doteq \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta; g) \cap \mathcal{P}_1^{(\text{dist } \rho')}(\delta; F) \in \mathcal{S}_{\text{rd}}$ для всех $\delta > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $h \in W_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ с плотным в $\mathbb{R}$ модулем частот $\text{Mod } h$ (для нее $\mathcal{T}(\delta) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho)}(\delta; h) \in \mathcal{S}_{\text{rd}}$ для всех $\delta > 0$) найдется функция $f_\varepsilon \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ такая, что $f_\varepsilon(t) \in F(t)$ н. в., $\rho(f_\varepsilon(t), g(t)) < \rho(g(t), F(t)) + \varepsilon$ н. в. и для любого $\delta' > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta'; f_\varepsilon) \supseteq \mathcal{T}(\delta) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho)}(\delta; h)$. Если, кроме того, $F \in M_p^*(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$ для некоторого $p \geq 1$, то $f_\varepsilon \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U) \cap M_p^*(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U)$.

Доказательство теоремы 2 приведено в § 4.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Для множеств $T, T_1, T_2 \subseteq \mathbb{R}$ обозначим $-T = \{-t : t \in T\}$, $T_1 + T_2 = \{t_1 + t_2 : t_1 \in T_1, t_2 \in T_2\}$.

Пусть $\mathbf{T}$ — совокупность многозначных отображений $(0, +\infty) \ni \delta \rightarrow \mathcal{T}(\delta) \subseteq \mathbb{R}$ таких, что $\mathcal{T}(\delta) \in \mathcal{S}_{\text{rd}}$, $\mathcal{T}(\delta) = -\mathcal{T}(\delta)$ и $\mathcal{T}(\delta_1) + \mathcal{T}(\delta_2) \subseteq \mathcal{T}(\delta_1 + \delta_2)$ для всех $\delta, \delta_1, \delta_2 > 0$. Из этих условий следует, что $0 \in \mathcal{T}(\delta)$ для всех $\delta > 0$ и $\mathcal{T}(\delta_1) \subseteq \mathcal{T}(\delta_2)$ при $0 < \delta_1 \leq \delta_2$.

Для любой функции $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, имеет место включение $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \in \mathbf{T}$.

Если $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $(0, +\infty) \ni \delta \rightarrow \mathcal{T}'(\delta) \subseteq \mathbb{R}$ — произвольное многозначное отображение, то будем писать $\mathcal{T}'(\cdot) \prec \mathcal{T}(\cdot)$, если для любого $\delta' > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $\mathcal{T}'(\delta') \supseteq \mathcal{T}(\delta)$.

Если $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $(0, +\infty) \ni \delta \rightarrow \mathcal{T}'_\alpha(\delta) \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — произвольное семейство многозначных отображений, то будем писать $\mathcal{T}'_\alpha(\cdot) \prec_\alpha \mathcal{T}(\cdot)$, если для любого $\delta' > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $\mathcal{T}'_\alpha(\delta') \supseteq \mathcal{T}(\delta)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Для семейства многозначных отображений $(0, +\infty) \ni \delta \rightarrow \mathcal{T}'_\alpha(\delta) \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, через $\bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha(\cdot)$ обозначается многозначное отображение, принимающее значения $\bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha(\delta)$, $\delta > 0$.

Если $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $(0, +\infty) \ni \delta \rightarrow \mathcal{T}'_j(\delta) \subseteq \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$ (где $N \in \mathbb{N}$), — многозначные отображения, для которых $\mathcal{T}'_j(\cdot) \prec \mathcal{T}(\cdot)$, то также $\bigcap_{j=1}^N \mathcal{T}'_j(\cdot) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Для конечного множества функций $f_j \in W_{p_j}(\mathbb{R}, (U_j, \rho_j))$, $j = 1, \dots, N$, где $p_j \geq 1$ и (U_j, ρ_j) — (полные) метрические пространства, справедливо включение $\bigcap_{j=1}^N \mathcal{P}_{p_j}^{(\rho_j)}(\cdot; f_j) \in \mathbf{T}$.

При этом если $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, то следующие три условия эквивалентны (см. [14]):

- 1) $\text{Mod } f \subseteq \sum_{j=1}^N \text{Mod } f_j$,
- 2) каждая f_j -возвращающая для всех $j = 1, \dots, N$ последовательность $\tau_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, является f -возвращающей,
- 3) $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \bigcap_{j=1}^N \mathcal{P}_{p_j}^{(\rho_j)}(\cdot; f_j)$.

В частности, для любых функций $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$ и $f \in W_{p_1}(\mathbb{R}, (U_1, \rho_1))$ условие $\text{Mod } f \subseteq \text{Mod } f_1$ эквивалентно условию $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \mathcal{P}_{p_1}^{(\rho_1)}(\cdot; f_1)$.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$. Тогда $\mathcal{T}(\cdot) \cap \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \in \mathbf{T}$.

Доказательство. Достаточно показать, что при всех $\delta > 0$ выполнено включение $\mathcal{T}(\delta) \cap \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta; f) \in \mathcal{S}_{\text{rd}}$. Выберем произвольное число $\delta > 0$. Так как $f \in W_p(\mathbb{R}, U)$, то найдутся числа $N \in \mathbb{N}$, $b_j > 0$, где $j = 1, \dots, N$, и $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ такие, что каждое число

$$\tau' \in \bigcap_{j=1}^N \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((k - \frac{1}{M})b_j, (k + \frac{1}{M})b_j)$$

является $(\delta, D_p^{(\rho)})$ -почти периодом функции f [12]. Для всех чисел $m_j \in \{1, \dots, M\}$, где $j = 1, \dots, N$, определим множества

$$T(m_1, \dots, m_N) = \bigcap_{j=1}^N \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(k + \frac{m_j-1}{M})b_j, (k + \frac{m_j}{M})b_j].$$

В каждом множестве $\mathcal{T}(\frac{\delta}{2}) \cap T(m_1, \dots, m_N)$ фиксируем некоторое число $\tilde{\tau}(m_1, \dots, m_N)$ (если такое число существует, а при $m_1 = \dots = m_N = 1$ оно существует и, более того, можно считать, что $\tilde{\tau}(1, \dots, 1) = 0$). Тогда для любого $\tau \in \mathcal{T}(\frac{\delta}{2})$ найдутся числа $m_j = m_j(\tau)$, $j = 1, \dots, N$, такие, что число $\tilde{\tau}(m_1(\tau), \dots, m_N(\tau))$ существует и

$$\tau - \tilde{\tau}(m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)) \in \bigcap_{j=1}^N \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((k - \frac{1}{M})b_j, (k + \frac{1}{M})b_j).$$

Следовательно, $\tau - \tilde{\tau}(m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)) \in \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta; f)$. С другой стороны,

$$\tau - \tilde{\tau}(m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)) \in \mathcal{T}(\frac{\delta}{2}) + \mathcal{T}(\frac{\delta}{2}) \subseteq \mathcal{T}(\delta),$$

и относительно плотно множество $\{\tau - \tilde{\tau}(m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)) : \tau \in \mathcal{T}(\frac{\delta}{2})\}$ (так как имеется только конечное множество чисел $\tilde{\tau}(m_1, \dots, m_N)$ при разных $m_j \in \{1, \dots, M\}$, $j = 1, \dots, N$). Поэтому $\mathcal{T}(\delta) \cap \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta; f) \in \mathcal{S}_{\text{rd}}$. $\square$

Теорема 3. Если $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U) \cap M_p^*(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, то $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$, $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f)$.

Доказательство. Пусть $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U) \cap M_p^*(\mathbb{R}, U)$, $\delta' > 0$. Выберем число $\Delta' > 0$ такое, что для любого измеримого множества $T \subseteq \mathbb{R}$, для которого $\varkappa_W(T) < \Delta'$, выполняется неравенство

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T} \rho^p(f(t), x_0) dt \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\delta'}{3}.$$

Положим $\Delta = \min\{1, \frac{\delta'}{3}\}$, $\delta = \Delta' \Delta$. Пусть $\tau \in \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta; f)$, то есть

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho'(f(t), f(t+\tau)) dt < \delta.$$

Для выбранного числа Δ обозначим $T_{\Delta}(\tau) = \{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), f(t+\tau)) \geq \Delta\}$. Так как

$$\begin{aligned} \varkappa_W(T_{\Delta}(\tau)) &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \text{meas } [\xi, \xi+l] \cap T_{\Delta}(\tau) \leq \\ &\leq \frac{1}{\Delta} \lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho'(f(t), f(t+\tau)) dt < \frac{\delta}{\Delta} = \Delta', \end{aligned}$$

то справедливы оценки

$$\begin{aligned} D_p^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho^p(f(t), f(t+\tau)) dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T_{\Delta}(\tau)} \rho^p(f(t), f(t+\tau)) dt \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{[\xi, \xi+l] \setminus T_{\Delta}(\tau)} \rho^p(f(t), f(t+\tau)) dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T_{\Delta}(\tau)} \rho^p(f(t), x_0) dt \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \lim_{l \rightarrow +\infty} \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T_{\Delta}(\tau)} \rho^p(f(t+\tau), x_0) dt \right)^{\frac{1}{p}} + \Delta < \frac{\delta'}{3} + \frac{\delta'}{3} + \frac{\delta'}{3} = \delta'. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tau \in \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta'; f)$. Из произвольности выбора числа $\tau \in \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta; f)$ получаем, что $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta'; f) \supseteq \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta; f)$. Так как число $\delta' > 0$ также можно выбирать произвольно, то $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f)$. Отсюда и из включения $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta; f) \in \mathcal{S}_{\text{rd}}$, которое справедливо для всех $\delta > 0$, следует, что $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$. $\square$

Так как $L^\infty(\mathbb{R}, U) \subseteq M_p^*(\mathbb{R}, U)$ для всех $p \geq 1$, то из теоремы 3, в частности, следует, что для всякой функции $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U) \cap L^\infty(\mathbb{R}, U)$ имеем $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ и, более того, $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f)$ (для всех $p \geq 1$).

Лемма 5. Пусть $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$, $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U)$, $g \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ при некотором $p \geq 1$ и $\rho(f(\cdot), g(\cdot)) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Предположим, что $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f) \prec \mathcal{T}(\cdot)$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; g) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. Тогда $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Доказательство. Так как $g \in M_p(\mathbb{R}, U)$, то также справедливо $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$. Обозначим

$$C = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(t), g(t)).$$

Выберем любое число $\delta' \in (0, 1]$ и положим $\delta'' = (1 + 3^{p-1}(1 + 2C^p))^{-\frac{1}{p}} \delta'$. Определим множества $T_{\delta''}(\tau) = \{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), f(t + \tau)) \geq \delta''\}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Для всех $l > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$ (так как $\delta'' \in (0, 1)$) имеем

$$\frac{1}{l} \operatorname{meas} [\xi, \xi + l] \cap T_{\delta''}(\tau) \leq \frac{1}{l\delta''} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho'(f(t), f(t + \tau)) dt < \frac{1}{\delta''} D_{1,l}^{(\rho')}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)),$$

поэтому

$$\begin{aligned} D_{p,l}^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) &= \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho^p(f(t), f(t + \tau)) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T_{\delta''}(\tau)} \rho^p(f(t), f(t + \tau)) dt + \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{[\xi, \xi+l] \setminus T_{\delta''}(\tau)} \rho^p(f(t), f(t + \tau)) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{[\xi, \xi+l] \cap T_{\delta''}(\tau)} 3^{p-1} (\rho^p(f(t), g(t)) + \rho^p(g(t), g(t + \tau)) + \rho^p(f(t + \tau), g(t + \tau))) dt + \\ &\quad + (\delta'')^p \leq 2 \cdot 3^{p-1} C^p \left(\frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \operatorname{meas} [\xi, \xi + l] \cap T_{\delta''}(\tau) \right) + \\ &\quad + 3^{p-1} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+l} \rho^p(g(t), g(t + \tau)) dt + (\delta'')^p \leq \\ &\leq 2 \cdot 3^{p-1} C^p (\delta'')^{-1} D_{1,l}^{(\rho')}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) + 3^{p-1} (D_{p,l}^{(\rho)}(g(\cdot), g(\cdot + \tau)))^p + (\delta'')^p. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для числа δ'' найдется число $\delta > 0$ такое, что

$$\mathcal{P}_1^{(\rho')}((\delta'')^{p+1}; f) \cap \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta''; g) \supseteq \mathcal{T}(\delta).$$

Тогда для любого $\tau \in \mathcal{T}(\delta)$ из оценок (2.1) при $l \rightarrow +\infty$ вытекает оценка $D_p^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) \leq \delta'$ и, следовательно, $\mathcal{T}(\delta) \subseteq \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta'; f)$. Так как число $\delta' \in (0, 1]$ можно выбирать произвольно, то последнее вложение означает, что $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. $\square$

Следующие три простые леммы приведены без доказательства.

Лемма 6. Пусть $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U)$. Тогда $\rho(f(\cdot), x) \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ для всех $x \in U$ и, более того, для всех $\delta > 0$

$$\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta; f) \subseteq \mathcal{P}_1^{(\rho'_\mathbb{R})}(\delta; \rho(f(\cdot), x)).$$

Лемма 7. Пусть $f_\alpha, f_{\alpha,j} \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $p \geq 1$, и

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} D_p^{(\rho)}(f_\alpha, f_{\alpha,j}) \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow +\infty$. Если $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f_{\alpha,j}) \prec_{\alpha} \mathcal{T}(\cdot)$ для всех $j \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f_\alpha) \prec_{\alpha} \mathcal{T}(\cdot)$.

Из леммы 7, в частности, получаем, что для любых многозначного отображения $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и функций $f, f_j \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $D_p^{(\rho)}(f, f_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f_j) \prec \mathcal{T}(\cdot)$ для всех $j \in \mathbb{N}$, также справедливо $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Лемма 8. Пусть (U, ρ) и (V, ρ_V) — (полные) метрические пространства. Предположим, что для функции $\mathcal{F} : U \rightarrow V$ выполняется оценка $\rho_V(\mathcal{F}(x_1), \mathcal{F}(x_2)) \leq C\rho(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in U$, где $C \geq 0$. Тогда для любой функции $f \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, имеем $\mathcal{F}(f(\cdot)) \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, V)$. Если $T(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec_\alpha T(\cdot)$, то также $\mathcal{P}_p^{(\rho_V)}(\cdot; \mathcal{F}(f)) \prec_\alpha T(\cdot)$. Если $f_\alpha \in \widetilde{W}_p(\mathbb{R}, U)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f_\alpha) \prec_\alpha T(\cdot)$, то также $\mathcal{P}_p^{(\rho_V)}(\cdot; \mathcal{F}(f_\alpha)) \prec_\alpha T(\cdot)$.

Лемма 8 (при $p = 1$) справедлива также для пространств (U, ρ') и (V, ρ'_V) (с заменой константы C на константу $\max\{1, C\}$), поэтому для каждой функции $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U)$ имеем $\mathcal{F}(f(\cdot)) \in W(\mathbb{R}, V)$ и выполняются аналоги остальных утверждений леммы.

Для $y \in (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ обозначим

$$\text{sign } y = \begin{cases} \|y\|^{-1}y, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Если $a > 0$ и $y \in \mathcal{H}$, то положим

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a; y) = \begin{cases} a^{-1}y, & \text{если } \|y\| \leq a, \\ \|y\|^{-1}y, & \text{если } \|y\| > a. \end{cases}$$

Для всех $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ имеет место оценка

$$\|\mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a; y_1) - \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(a; y_2)\| \leq \frac{2}{a} \|y_1 - y_2\|.$$

Лемма 9. Пусть $f_\alpha \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, (\mathcal{H}, \|\cdot\|))$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $T(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot; f_\alpha) \prec_\alpha T(\cdot)$. Предположим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \|f_\alpha(t)\| \leq \varepsilon\}) = 0. \quad (2.2)$$

Тогда $\text{sign } f_\alpha(\cdot) \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : f_\alpha(t) = 0\}) = 0$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Более того, $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathcal{H}})}(\cdot; \text{sign } f_\alpha) \prec_\alpha T(\cdot)$.

Доказательство. Из (2.2) следует, что $\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : f_\alpha(t) = 0\}) = 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Определим функции $f_{\alpha,j}(\cdot) = \mathcal{F}_{\mathcal{H}}(j^{-1}; f_\alpha(\cdot))$, $j \in \mathbb{N}$. Из леммы 8 (и утверждения после нее) получаем, что $f_{\alpha,j} \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot; f_{\alpha,j}) \prec_\alpha T(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$. Так как $\|f_{\alpha,j}\|_\infty \leq 1$, то $f_{\alpha,j} \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \subseteq \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathcal{H}})}(\cdot; f_{\alpha,j}) \prec_\alpha T(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$ (см. теорему 3). С другой стороны, $\text{sign } f_\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \subseteq M_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и

$$\|\text{sign } f_\alpha - f_{\alpha,j}\|_1 \leq \kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \|f_\alpha(t)\| < j^{-1}\}), \quad \alpha \in \mathfrak{A},$$

поэтому $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \|\text{sign } f_\alpha - f_{\alpha,j}\|_1 = 0$. Теперь из леммы 7 вытекает, что для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ справедливо включение $\text{sign } f_\alpha(\cdot) \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathcal{H}})}(\cdot; \text{sign } f_\alpha) \prec_\alpha T(\cdot)$. $\square$

Лемма 10. Пусть $f_1, f_2 \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $T(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot; f_j) \prec_\alpha T(\cdot)$ при $j = 1, 2$. Тогда $f_1 + f_2 \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot; f_1 + f_2) \prec_\alpha T(\cdot)$.

Для доказательства леммы 10 достаточно воспользоваться вложением

$$\mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_1; f_1) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_2; f_2) \subseteq \mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\delta_1 + \delta_2; f_1 + f_2),$$

справедливым для всех функций $f_1, f_2 \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и чисел $\delta_1, \delta_2 > 0$.

Обозначим через $\widetilde{W}(\mathbb{R})$ совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Лемма 11. Пусть $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $T \in \widetilde{W}(\mathbb{R})$. Предположим, что $\mathcal{P}_1^{(\rho'_H)}(\cdot; f) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_T) \in \mathbf{T}$. Тогда $\chi_T f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и для любых $\delta_1, \delta_2 > 0$

$$\mathcal{P}_1^{(\rho'_H)}(\delta_1; f) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\delta_2; \chi_T) \subseteq \mathcal{P}_1^{(\rho'_H)}(\delta_1 + \delta_2; \chi_T f).$$

Доказательство. Действительно, пусть $\tau \in \mathcal{P}_1^{(\rho'_H)}(\delta_1; f) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\delta_2; \chi_T)$. Тогда

$$\begin{aligned} & D_1^{(\rho'_H)}(\chi_T(\cdot)f(\cdot), \chi_T(\cdot + \tau)f(\cdot + \tau)) = \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+l} \min \{1, \|\chi_T(t)f(t) - \chi_T(t+\tau)f(t+\tau)\|\} dt \leq \\ &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+l} \min \{1, \|(\chi_T(t) - \chi_T(t+\tau))f(t)\|\} dt + \\ &+ \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+l} \min \{1, \|\chi_T(t+\tau)(f(t) - f(t+\tau))\|\} dt \leq \\ &\leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+l} |\chi_T(t) - \chi_T(t+\tau)| dt + \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+l} \min \{1, \|f(t) - f(t+\tau)\|\} dt = \\ &= \|\chi_T(t) - \chi_T(t+\tau)\|_1 + D_1^{(\rho'_H)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \delta_1 + \delta_2 \end{aligned}$$

и, следовательно, $\tau \in \mathcal{P}_1^{(\rho'_H)}(\delta_1 + \delta_2; \chi_T f)$. Так как числа $\delta_1, \delta_2 > 0$ можно выбирать произвольно, то $\chi_T f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. $\square$

Следующая лемма 12 является следствием леммы 11.

Лемма 12. Пусть $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $T \in \widetilde{W}(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$, $\mathcal{P}_1^{(\rho'_H)}(\cdot; f) \prec \mathcal{T}(\cdot)$, $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_T) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. Тогда $\chi_T f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho'_H)}(\cdot; \chi_T f) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Лемма 13. Пусть $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и $T_j \in \widetilde{W}(\mathbb{R})$, $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_{T_j}) \prec \mathcal{T}(\cdot)$, $j = 1, 2$. Тогда множества $T_1 \cap T_2$, $T_1 \cup T_2$ и $T_1 \setminus T_2$ принадлежат $\widetilde{W}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_{T_1 \cap T_2}) \prec \mathcal{T}(\cdot)$, $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_{T_1 \cup T_2}) \prec \mathcal{T}(\cdot)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_{T_1 \setminus T_2}) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Доказательство. Для любого множества $T \in \widetilde{W}(\mathbb{R})$, для которого $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_T) \prec \mathcal{T}(\cdot)$, имеем $\chi_{\mathbb{R} \setminus T}(\cdot) = 1 - \chi_T(\cdot) \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, при этом $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\delta; \chi_{\mathbb{R} \setminus T}) = \mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\delta; \chi_T)$ для всех $\delta > 0$. Следовательно, также $\mathbb{R} \setminus T \in \widetilde{W}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_{\mathbb{R} \setminus T}) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. Отсюда получаем (так как $T_1 \cup T_2 = \mathbb{R} \setminus ((\mathbb{R} \setminus T_1) \cap (\mathbb{R} \setminus T_2))$ и $T_1 \setminus T_2 = T_1 \cap (\mathbb{R} \setminus T_2)$), что достаточно рассмотреть только случай множества $T_1 \cap T_2$. Но в этом случае из леммы 12 следует, что $\chi_{T_1 \cap T_2}(\cdot) = \chi_{T_1}(\cdot)\chi_{T_2}(\cdot) \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_{T_1 \cap T_2}) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. $\square$

Пусть $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$. Обозначим через $\mathfrak{M}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$ совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ попарно непересекающихся множеств $T_j \in \widetilde{W}(\mathbb{R})$ (которые могут быть пустыми) таких, что $\text{meas } \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} T_j = 0$, $\chi_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \leq N} T_j) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_{T_j}) \prec \mathcal{T}(\cdot)$ для каждого $j \in \mathbb{N}$ (тогда из лемм 7 и 13 следует, что также $\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_{T_j}) \prec_j \mathcal{T}(\cdot)$).

Если $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$, где $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$, то (в силу лемм 7 и 13) для любого множества $J \subseteq \mathbb{N}$ справедливо включение $T(J) \doteq \bigcup_{j \in J} T_j \in \widetilde{W}(\mathbb{R})$ ($T(\emptyset) = \emptyset$) и, более того,

$$\mathcal{P}_1^{(\rho_R)}(\cdot; \chi_{T(J)}) \prec_{J \subseteq \mathbb{N}} \mathcal{T}(\cdot).$$

Если $\{T_j^{(l)}\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$, $l = 1, 2$, то также

$$\{T_{j_1}^{(1)} \cap T_{j_2}^{(2)}\}_{j_1, j_2 \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}. \quad (2.3)$$

Лемма 14. Пусть $f_j \in M^c(\mathbb{R}, U)$, $T_j \subseteq \mathbb{R}$ — попарно непересекающиеся измеримые множества, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\text{meas } \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} T_j = 0$ и $\kappa_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \leq N} T_j) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$. Тогда $\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in M^c(\mathbb{R}, U)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon, \delta > 0$. Выберем $N \in \mathbb{N}$ так, что $\kappa_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \leq N} T_j) < \frac{\delta}{2}$. Для каждого $j = 1, \dots, N$ найдется компактное множество $K_j \in \text{cl}_c U$ такое, что

$$\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f_j(t), K_j) \geq \varepsilon\}) < \frac{\delta}{2N}.$$

Тогда $K \doteq \bigcup_{j=1}^N K_j \in \text{cl}_c U$ и

$$\begin{aligned} \kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \rho(\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; t), K) \geq \varepsilon\}) &\leq \kappa_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \leq N} T_j) + \\ &+ \sum_{j=1}^N \kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f_j(t), K_j) \geq \varepsilon\}) < \delta. \end{aligned}$$

Лемма 15. Пусть $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$, где $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$, $f_j \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U)$, $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f_j) \prec \mathcal{T}(\cdot)$ для каждого $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; \mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Доказательство. Для всех $N \in \mathbb{N}$ определим функции $f(N; t)$, $t \in \mathbb{R}$, совпадающие с функциями $f_j(t)$ при $t \in T_j$, $j = 1, \dots, N$, и такие, что $f(N; t) = x_0 \in U$ при $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \leq N} T_j$. Из лемм 10 и 12 (а также из теоремы Фреше об изометрическом вложении метрического пространства в некоторое банахово пространство) следует, что $f(N; \cdot) \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f(N; \cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. С другой стороны, справедливо вложение $\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in M(\mathbb{R}, U)$ и

$$D_1^{(\rho')}(\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot), f(N; \cdot)) \leq \kappa_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \leq N} T_j), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Так как $\kappa_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \leq N} T_j) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$, то из леммы 7 получаем, что $\mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; \mathbb{F}(\{f_j\}, \{T_j\}; \cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. $\square$

Лемма 16. Пусть $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$, где $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$, и $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$.

Лемма 16 является следствием лемм 14 и 15.

Теорема 4. Пусть $f \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ и $h \in W_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — любая функция с плотным в $\mathbb{R}$ (счетным) модулем частот $\text{Mod } h$. Обозначим $\mathcal{T}(\cdot) \doteq \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot; h)$. Тогда $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся последовательность $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}(\cdot)\}$ и точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\rho(f(t), x_j) < \varepsilon$ при всех $t \in T_j$, $j \in \mathbb{N}$ (из леммы 16 следует, что $\mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$). Если, более того, $f \in \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U)$ при некотором $p \geq 1$, то $\mathcal{T}'(\cdot) \doteq \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot; h) \in \mathbf{T}$, $\mathcal{T}(\cdot) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$, $\mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot)) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$.

Доказательство теоремы 4 приведено в конце этого параграфа. Теорема 4 существенно используется при доказательстве теоремы 2.

Следствие 1. Функция $f \in M(\mathbb{R}, U)$ принадлежит пространству $\widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся многозначное отображение $\mathcal{T}^{(\varepsilon)}(\cdot) \in \mathbf{T}$, последовательность $\{T_j^{(\varepsilon)}\}_{j \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}^{(\varepsilon)}(\cdot)\}$ и точки $x_j^{(\varepsilon)} \in U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(t), \mathbb{F}(\{x_j^{(\varepsilon)}\}, \{T_j^{(\varepsilon)}\}; \cdot)) < \varepsilon.$$

При этом для функции $f \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ можно многозначные отображения $\mathcal{T}^{(\varepsilon)}(\cdot)$ выбрать так, что $\mathcal{T}(\cdot) \doteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{T}^{(\varepsilon)}(\cdot) \in \mathbf{T}$ (в этом случае $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f) \prec \mathcal{T}(\cdot)$).

Пусть $W(\mathbb{R})$ — совокупность множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\chi_T \in W_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Для множеств $T \in W(\mathbb{R})$ обозначим $\operatorname{Mod} T \doteq \operatorname{Mod} \chi_T$. Если Λ — произвольный модуль в $\mathbb{R}$, то пусть $\mathfrak{M}^{(W)}(\Lambda)$ — совокупность последовательностей $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ попарно непересекающихся множеств $T_j \in W(\mathbb{R})$, для которых $\operatorname{Mod} T_j \subseteq \Lambda$, $\operatorname{meas} \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} T_j = 0$ и $\varkappa_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \leq N} T_j) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$.

Если $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\Lambda)$ и $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, — произвольные точки, то $\mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in W(\mathbb{R}, U)$ и $\operatorname{Mod} \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot) \subseteq \Lambda$ [8]. В [8] также приведена следующая теорема, на которой основывается доказательство теоремы 1 и аналогом которой (для функций из пространства $\widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$) является теорема 4.

Теорема 5. Пусть $f \in W(\mathbb{R}, U)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся последовательность $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M}^{(W)}(\operatorname{Mod} f)$ и точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\rho(f(t), x_j) < \varepsilon$ при всех $t \in T_j$.

При доказательстве теоремы 5 используется либо теорема 6 (см. [8]), либо лемма 17 (как это сделано в [17]).

Пусть $\mathcal{A}$ — совокупность таких множеств $\mathbb{M} \subset M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти числа $l = l(\varepsilon, \mathbb{M}) > 0$ и $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, \mathbb{M}) > 0$ такие, что

$$\sup_{f \in \mathbb{M}} \sup_{\tau \in [0, \tau_0]} D_{1, l}^{(\rho'_l)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \varepsilon.$$

Если $\mathbb{M} \in \mathcal{A}$, то

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow +0} \sup_{f \in \mathbb{M}} \sup_{\tau \in [0, \tau_0]} D_1^{(\rho'_l)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) = 0.$$

Для любой функции $f \in W(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ одноэлементное множество $\{f\}$ принадлежит $\mathcal{A}$ [12].

Теорема 6. Пусть $\mathbb{M} \in \mathcal{A}$, $\Delta > 0$, $\mathbb{T} > 0$ и $\delta \in (0, 1]$. Тогда существует периодическая с периодом $\mathbb{T}$ непрерывная функция $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, зависящая от $\mathbb{M}$, Δ , $\mathbb{T}$, но не от числа δ , для которой $\|g\|_\infty < \Delta$, и числа $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \Delta) > 0$ и $l = l(\delta, \Delta, \mathbb{M}) > 0$ такие, что для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех $f \in \mathbb{M}$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \operatorname{meas} \{t \in [\xi, \xi + l] : |f(t) + g(t) - \lambda| \leq \varepsilon\} < \delta.$$

Теорема 6 была доказана в [8] для множеств $\mathbb{M} \subset W(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, но ее доказательство без каких-либо существенных изменений переносится и на случай произвольных множеств $\mathbb{M} \subset M(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (для которых $\mathbb{M} \in \mathcal{A}$).

Лемма 17 (см. [17]). Пусть $f \in W(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Тогда множество чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : |f(t) - \lambda| \leq \varepsilon\}) > 0,$$

не более чем счетно.

Для произвольного измеримого множества $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa_S(T) \doteq \|\chi_T\|_{1,1} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \text{meas } [\xi, \xi + 1] \cap T.$$

Определение 2. Функция $f \in M(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(S)}$ -свойством (или просто σ -свойством (см. [18, с. 502])), если $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varkappa_S(\{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| \leq \varepsilon\}) = 0$.

Определение 3. Функция $f \in M(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(W)}$ -свойством, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \|f(t)\| \leq \varepsilon\}) = 0.$$

Если функция $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(S)}$ -свойством, то $\text{sign } f \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\text{Mod sign } f \subseteq \text{Mod } f$ [18, 4]. Аналогично, если функция $f \in W(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(W)}$ -свойством, то $\text{sign } f \in W_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\text{Mod sign } f \subseteq \text{Mod } f$ [14, 8]. Из леммы 9 следует, что для функций $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, обладающих $\sigma^{(W)}$ -свойством, имеет место включение $\text{sign } f \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathcal{H}})}(\cdot; \text{sign } f) \prec \mathcal{P}_1^{(\rho'_{\mathcal{H}})}(\cdot; f)$. Не всякая функция $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(S)}$ -свойством (как и не всякая функция $f \in W(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обладает $\sigma^{(W)}$ -свойством). В [4] приведен пример функции $f \in \text{CAP}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такой, что $|f(t)| < 1$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $\text{sign}(f(\cdot) - \lambda) \notin S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ для всех $\lambda \in (-1, 1)$, при этом множества $\{t \in \mathbb{R} : f(t) = \lambda\}$ счетны и не имеют конечных предельных точек, следовательно, функция $f(\cdot) - \lambda$ для всех $\lambda \in (-1, 1)$ не обладает $\sigma^{(S)}$ -свойством. Лемма 17 означает, что для функции $f \in W(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ найдется не более чем счетное множество $\mathfrak{N}(f) \subset \mathbb{R}$ такое, что функция $f(\cdot) - \lambda$ обладает $\sigma^{(W)}$ -свойством для всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathfrak{N}(f)$. Из теоремы 6 следует, что для любой функции $f \in W(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ найдется непрерывная периодическая функция $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с заданным периодом T и со сколь угодно малой нормой $\|g\|_{\infty}$ такая, что функция $f(\cdot) + g(\cdot) - \lambda$ обладает $\sigma^{(W)}$ -свойством для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Выберем любые числа $a_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $a_{j+1}(a_1 + \dots + a_j)^{-1} \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow +\infty$, и пусть $x_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, — любая последовательность, множество предельных точек которой совпадает со всей вещественной прямой $\mathbb{R}$. Определим функцию

$$f(t) = \begin{cases} x_1, & \text{если } t \in [-a_1, a_1], \\ x_j, & \text{если } t \in [-a_j, a_j] \setminus [-a_{j-1}, a_{j-1}], \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Для нее справедливо включение $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, при этом для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $f(\cdot) - \lambda$ не обладает $\sigma^{(W)}$ -свойством. Более того, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех $\varepsilon > 0$

$$\varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : |f(t) - \lambda| \leq \varepsilon\}) = 1.$$

Приведем также пример функции $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такой, что $f(t) \in \{0, 1\}$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и

$$D_1^{(\rho'_{\mathbb{R}})}(f(\cdot), f(\cdot + \tau_j)) = D_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(f(\cdot), f(\cdot + \tau_j)) = 1$$

для некоторой последовательности $\tau_j \rightarrow +0$, $j \in \mathbb{N}$. Выберем для всех $j \in \mathbb{N}$ какие-либо числа $k(j) \in \mathbb{N}$ так, чтобы для всех $k \in \mathbb{N}$ множество $\{j \in \mathbb{N} : k(j) = k\}$ было бесконечным. Положим

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 1), \\ 1, & \text{если } t \in [-1, 0), \\ \frac{1}{2}(1 + (-1)^{[2^{k(j)}t]}), & \text{если } t \in [2^{j-1}, 2^j) \cup [-2^j, -2^{j-1}), \quad j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где $[\xi]$ — целая часть числа $\xi \in \mathbb{R}$. Так как $D_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(f(\cdot), f(\cdot + m)) = 0$ для всех $m \in \mathbb{Z}$, то $f \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. При этом $D_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(f(\cdot), f(\cdot + \tau_j)) = 1$ для всех $\tau_j = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$.

Теорема 7. Пусть $f_\alpha \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\Delta > 0$ и Λ — счетный плотный в $\mathbb{R}$ модуль. Предположим, что

$$\mathcal{T}(\cdot) \doteq \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}_1^{(\rho'_\alpha)}(\cdot; f_\alpha) \in \mathbf{T}. \quad (2.4)$$

Тогда найдется функция $g \in S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (зависящая от Δ , Λ и $\mathcal{T}(\cdot)$) такая, что $\text{Mod } g \subseteq \Lambda$, $\|g\|_\infty < \Delta$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : |f_\alpha(t) + g(t)| \leq \varepsilon\}) = 0. \quad (2.5)$$

Доказательство теоремы 7 приведено в § 3.

Пусть $f \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Тогда для индексного множества $\mathfrak{A} = \mathbb{R}$ и функций $f_\alpha(\cdot) = f(\cdot) - \alpha$ справедливо включение (2.4). Поэтому из теоремы 7 получаем, что для любого счетного плотного в $\mathbb{R}$ модуля Λ найдется функция $g \in S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ со сколь угодно малой нормой $\|g\|_\infty$, для которой $\text{Mod } g \subseteq \Lambda$, и такая, что функция $f(\cdot) + g(\cdot) - \lambda$ обладает $\sigma^{(W)}$ -свойством для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (из лемм 4 и 10 следует, что $f + g \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Для метрических пространств (U, ρ) и (V, ρ_V) обозначим через $C(U, V)$ метрическое пространство непрерывных функций $\mathcal{F} : U \rightarrow V$ с метрикой

$$d_{C(U, V)} = \sup_{x \in U} \min \{1, \rho_V(\mathcal{F}_1(x), \mathcal{F}_2(x))\}, \quad \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in C(U, V).$$

Теорема 8 (см. [14]). Пусть (U, ρ) и (V, ρ_V) — полные метрические пространства. Предположим, что функция $t \rightarrow \mathcal{F}(\cdot; t) \in C(U, V)$ принадлежит $W_1(\mathbb{R}, (C(U, V), d_{C(U, V)}))$ и $f \in W(\mathbb{R}, U)$. Тогда $\mathcal{F}(f(\cdot); \cdot) \in W(\mathbb{R}, V)$ и $\text{Mod } \mathcal{F}(f(\cdot); \cdot) \subseteq \text{Mod } \mathcal{F}(\cdot; \cdot) + \text{Mod } f(\cdot)$.

При доказательстве теоремы 8 используется теорема 5. Доказательство следующей теоремы, обобщающей лемму 8, опирается на теорему 4 и во многом аналогично доказательству теоремы 8 (см. [14]).

Теорема 9. Пусть (U, ρ) и (V, ρ_V) — полные метрические пространства. Предположим, что функция $t \rightarrow \mathcal{F}(\cdot; t) \in C(U, V)$ принадлежит пространству $\widetilde{W}_1^c(\mathbb{R}, (C(U, V), d_{C(U, V)}))$, $f \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ и при этом $\mathcal{T}(\cdot) \doteq \mathcal{P}_1^{(d_{C(U, V)})}(\cdot; \mathcal{F}(\cdot; \cdot)) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f) \in \mathbf{T}$. Тогда $\mathcal{F}(f(\cdot); \cdot) \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, V)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho'_V)}(\cdot; \mathcal{F}(f(\cdot); \cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho'_\mathbb{R})}(\cdot; h)$ для любой функции $h \in W_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ с плотным в $\mathbb{R}$ (счетным) модулем частот $\text{Mod } h$.

Доказательство теоремы 4. Включение $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$ следует из леммы 4. В силу леммы 2 существуют точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\rho(f(t), \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x_j\}) < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.6)$$

при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : \rho(f(t), \bigcup_{j \leq N} \{x_j\}) \geq \frac{\varepsilon}{3}\}) = 0. \quad (2.7)$$

Обозначим $g_j(t) = \rho(f(t), x_j) - \frac{2}{3}\varepsilon$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Из леммы 6 получаем, что $g_j \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho'_\mathbb{R})}(\cdot; g_j) \prec \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f)$, поэтому также $\mathcal{P}_1^{(\rho'_\mathbb{R})}(\cdot; g_j) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. В соответствии с теоремой 7 найдем функцию $g \in S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (зависящую от ε , $\text{Mod } h$ и функции f (а также от выбора точек x_j , $j \in \mathbb{N}$, который в свою очередь зависит от числа ε и функции f)) такую, что $\text{Mod } g \subseteq \text{Mod } h$ (тогда $\mathcal{P}_1^{(\rho_\mathbb{R})}(\cdot; g) \prec \mathcal{T}(\cdot)$), $\|g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{j \in \mathbb{N}} \kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : |g_j(t) + g(t)| \leq \tilde{\varepsilon}\}) = 0. \quad (2.8)$$

Из лемм 4 и 10 следует $g_j + g \in \widetilde{W}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$. Так как $\mathcal{P}_1^{(\rho'_j)}(\cdot; g_j) \prec_j \mathcal{T}(\cdot)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot; g) \prec \mathcal{T}(\cdot)$, то, учитывая лемму 10, получаем $\mathcal{P}_1^{(\rho'_j)}(\cdot; g_j + g) \prec_j \mathcal{T}(\cdot)$. Теперь из (2.8) и леммы 9 вытекает справедливость включений $\text{sign}(g_j(\cdot) + g(\cdot)) \in \widetilde{W}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (и $\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : g_j(t) + g(t) = 0\}) = 0$), $j \in \mathbb{N}$. Более того, $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot; \text{sign}(g_j(\cdot) + g(\cdot))) \prec_j \mathcal{T}(\cdot)$.

Обозначим $T'_j = \{t \in \mathbb{R} : g_j(t) + g(t) < 0\}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда (это следует, в частности, из леммы 8) $T'_j \in \widetilde{W}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot; \chi_{T'_j}) \prec_j \mathcal{T}(\cdot)$. Если $t \in T'_j$, то $\rho(f(t), x_j) < \varepsilon$. При п. в. $t \in \mathbb{R} \setminus T'_j$ имеем $\rho(f(t), x_j) > \frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому (см. (2.6)) $\text{meas } \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} T'_j = 0$ и из (2.7) вытекает, что $\kappa_W(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \leq N} T'_j) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$. Обозначим $T_1 = T'_1$ и $T_j = T'_j \setminus \bigcup_{k < j} T'_k$ при $j \geq 2$. В силу леммы 13 $T_j \in \widetilde{W}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot; \chi_{T_j}) \prec \mathcal{T}(\cdot)$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Кроме того, $\bigcup_{j \leq N} T_j = \bigcup_{j \leq N} T'_j$, $N \in \mathbb{N}$, поэтому $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}(\mathcal{T}(\cdot))$ (и, следовательно, $\mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot; \chi_{T_j}) \prec_j \mathcal{T}(\cdot)$). Так как $T_j \subseteq T'_j$, $j \in \mathbb{N}$, то для всех $t \in T_j$ имеем $\rho(f(t), x_j) < \varepsilon$. Из леммы 16 получаем, что $\mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot)) \prec \mathcal{T}(\cdot)$. Предположим теперь, что $f \in \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U)$ при некотором $p \geq 1$. Тогда из леммы 4 следует

$$\mathcal{T}'(\cdot) = \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \bigcap \mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot; h) \in \mathbf{T}$$

(при этом $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$). Так как $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\delta; f) \subseteq \mathcal{P}_p^{(\rho')}(\delta; f)$ для всех $\delta > 0$, то $\mathcal{T}(\cdot) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$. С другой стороны, $\rho(f(\cdot), \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot)) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, поэтому из леммы 5 получаем, что $\mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot) \in \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; \mathbb{F}(\{x_j\}, \{T_j\}; \cdot)) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$. Теорема 4 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 7

Сформулируем предварительно простую лемму, которая используется при доказательстве теоремы 7.

Лемма 18. Если $a_j \in \{-1, 0, 1\}$, $j \in \mathbb{N}$, то для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{j=1}^{+\infty} 3^{-j} a_j \right| \geq \frac{1}{2} 3^{-k} |a_k|.$$

Доказательство теоремы 7. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Delta \in (0, 1]$. Для $b > 0$ и $\theta > 0$ положим

$$g(\theta, b; t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, b) \cup [2b, (2 + \theta)b), \\ -1, & \text{если } t \in [b, 2b), \end{cases}$$

и продолжим функцию $g(\theta, b; \cdot)$ периодически с периодом $(2 + \theta)b$ на всю вещественную прямую $\mathbb{R}$. При этом

$$g(\theta, b; t + b) - g(\theta, b; t) = \begin{cases} -2 & \text{при } t \in [0, b), \\ 2 & \text{при } t \in [b, 2b), \\ 0 & \text{при } t \in [2b, (2 + \theta)b) \end{cases}$$

и функция $g(\theta, b; \cdot + b) - g(\theta, b; \cdot)$ также периодична с периодом $(2 + \theta)b$. Откуда, в частности, следует, что

$$\kappa_W(\{t \in \mathbb{R} : g(\theta, b; t + b) - g(\theta, b; t)\}) = \frac{\theta}{2 + \theta}. \quad (3.1)$$

Определим числа $\varepsilon_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Если $k^2 \leq j < (k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}$, то положим

$$\varepsilon_j = \Delta_k \doteq 3^{-2k(k^2+2k+2)} \Delta.$$

Пусть $\delta_j = 2^{-j} \varepsilon_j$. Выберем числа $\tau_j \in \mathcal{T}(\delta_j)$ (зависящие от Δ и многозначного отображения $\mathcal{T}(\cdot)$, но не от индекса $\alpha \in \mathfrak{A}$) исходя из неравенств $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$. Так как $\tau_j \in \mathcal{P}_1^{(\rho'_j)}(\delta_j; f_\alpha)$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то

$$D_1^{(\rho'_j)}(f_\alpha(\cdot), f_\alpha(\cdot + \tau_j)) < \delta_j, \quad \alpha \in \mathfrak{A}.$$

Поэтому существуют числа $l_j = l_j(\alpha) > 0$ (зависящие также от Δ и многозначного отображения $\mathcal{T}(\cdot)$) такие, что числа τ_j являются $(\delta_j, D_{1,l}^{(\rho'_j)})$ -почти периодами функций f_α , $\alpha \in \mathfrak{A}$, для всех $l \geq l_j(\alpha)$.

Для $l > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}$ определим множества

$$A_j^\alpha(l, \xi) = \{t \in [\xi, \xi + l] : |f_\alpha(t) - f_\alpha(t + \tau_j)| < \varepsilon_j\}, \quad j \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathfrak{A}.$$

Так как $\varepsilon_j \in (0, 1)$, то при $l \geq l_j(\alpha)$ (при всех $\xi \in \mathbb{R}$) имеем

$$\frac{\varepsilon_j}{l} \text{meas } [\xi, \xi + l] \setminus A_j^\alpha(l, \xi) \leq D_{1,l}^{(\rho'_j)}(f_\alpha(\cdot), f_\alpha(\cdot + \tau_j)) < \delta_j = 2^{-j} \varepsilon_j.$$

Откуда

$$\frac{1}{l} \text{meas } [\xi, \xi + l] \setminus A_j^\alpha(l, \xi) < 2^{-j}. \quad (3.2)$$

Для всех $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathfrak{N}_k$ множество упорядоченных пар $\{m, m'\}$ чисел $m, m' \in \{0, 1, \dots, 2k\}$, для которых $m < m'$. При $\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k$ положим $s_k(m, m') = 2k^3 + m + (2k + 1)m'$ и выберем числа $\theta_{m, m'}^{(k)} > 0$ так, что

$$\theta_{m, m'}^{(k)} (2 + \theta_{m, m'}^{(k)})^{-1} < 2^{-s_k(m, m')}, \quad (3.3)$$

$$2\pi (2 + \theta_{m, m'}^{(k)})^{-1} (\tau_{k^2+m'} - \tau_{k^2+m})^{-1} \in \Lambda. \quad (3.4)$$

Для разных упорядоченных пар $\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k$ числа $s_k(m, m')$ разные и $2k^3 < s_k(m, m') < 2(k+1)^3$. Определим функции

$$g_{m, m'}^{(k)}(t) = g(\theta_{m, m'}^{(k)}, \tau_{k^2+m'} - \tau_{k^2+m}; t), \quad t \in \mathbb{R}, \{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k,$$

$$g(t) = 4\Delta \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k} 3^{-s_k(m, m')} g_{m, m'}^{(k)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Имеем $g_{m, m'}^{(k)}(t) \in \{-1, 1\}$ и

$$|g(t)| < 4\Delta \sum_{j=2}^{+\infty} 3^{-j} = \frac{2\Delta}{3} < \Delta$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как $g_{m, m'}^{(k)}$ — периодические функции с периодами $(2 + \theta_{m, m'}^{(k)})(\tau_{k^2+m'} - \tau_{k^2+m})$ (следовательно, $\text{Mod } g_{m, m'}^{(k)} \subseteq \Lambda$ (см. (3.4)), то $g \in S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и

$$\text{Mod } g \subseteq \sum_{k \in \mathbb{N}, \{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k} \text{Mod } g_{m, m'}^{(k)} \subseteq \Lambda.$$

Для $k \in \mathbb{N}$ и $\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k$ из (3.1) и (3.3) вытекает оценка

$$\varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : g_{m, m'}^{(k)}(t + \tau_{k^2+m'}) = g_{m, m'}^{(k)}(t + \tau_{k^2+m})\}) = \theta_{m, m'}^{(k)}(2 + \theta_{m, m'}^{(k)})^{-1} < 2^{-s_k(m, m')}.$$

Пусть $T^{(k)} = \{t \in \mathbb{R} : g_{m, m'}^{(k)}(t + \tau_{k^2+m'}) \neq g_{m, m'}^{(k)}(t + \tau_{k^2+m})\}$ для всех упорядоченных пар $\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Так как

$$\begin{aligned} \varkappa_W(\mathbb{R} \setminus T^{(k)}) &\leq \sum_{\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k} \varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : g_{m, m'}^{(k)}(t + \tau_{k^2+m'}) = g_{m, m'}^{(k)}(t + \tau_{k^2+m})\}) = \\ &= \theta_{m, m'}^{(k)}(2 + \theta_{m, m'}^{(k)})^{-1} < \sum_{\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k} 2^{-s_k(m, m')} < 2^{-2k^3-2}, \end{aligned}$$

то найдется число $\tilde{l}_k > 0$ такое, что для всех $l \geq \tilde{l}_k$ и всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{l} \text{meas } [\xi, \xi + l] \setminus T^{(k)} < 2^{-2k^3-1}. \quad (3.5)$$

Если $t \in T^{(k)}$, то для всех $\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k$

$$|g_{m, m'}^{(k)}(t + \tau_{k^2+m'}) - g_{m, m'}^{(k)}(t + \tau_{k^2+m})| = 2,$$

поэтому из леммы 18 получаем

$$|g(t + \tau_{k^2+m'}) - g(t + \tau_{k^2+m})| \geq 4\Delta \cdot 3^{-s_k(m, m')}.$$

Для $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $l > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}$ определим множества

$$B_k^\alpha(l, \xi) = T^{(k)} \cap \left(\bigcap_{j=k^2}^{k^2+2k} A_k^\alpha(l, \xi) \right).$$

Если

$$l \geq l'_k(\alpha) \doteq \max \{ \tilde{l}_k, \tau_{k^2+2k}, \max_{j=k^2, \dots, k^2+2k} l_j(\alpha) \},$$

то (при всех $\xi \in \mathbb{R}$) из (3.2), (3.5) следует оценка

$$\frac{1}{l} \text{meas } [\xi, \xi + l] \setminus B_k^\alpha(l, \xi) < 2^{-2k^3-1} + \sum_{j=0}^{2k} 2^{-k^2-j} < 2^{-2k^3-1} + 2^{-k^2+1}$$

и для всех $t \in B_k^\alpha(l, \xi)$ и всех $\{m, m'\} \in \mathfrak{N}_k$ имеем

$$\begin{aligned} &|f_\alpha(t + \tau_{k^2+m'}) + g(t + \tau_{k^2+m'}) - f_\alpha(t + \tau_{k^2+m}) - g(t + \tau_{k^2+m})| \geq \\ &\geq |g(t + \tau_{k^2+m'}) - g(t + \tau_{k^2+m})| - |f_\alpha(t) - f_\alpha(t + \tau_{k^2+m'})| - |f_\alpha(t) - f_\alpha(t + \tau_{k^2+m})| > \\ &> 4\Delta \cdot 3^{-s_k(m, m')} - \varepsilon_{k^2+m'} - \varepsilon_{k^2+m} > 2\Delta \cdot 3^{-2k(k^2+2k+2)} = 2\Delta_k. \end{aligned}$$

Последнее означает, что среди чисел $t + \tau_{k^2+m}$, $m = 0, 1, \dots, 2k$ (где $t \in B_k^\alpha(l, \xi)$), имеется не более одного числа $t + \tau_{k^2+m}$, для которого

$$|f_\alpha(t + \tau_{k^2+m}) + g(t + \tau_{k^2+m})| \leq \Delta_k.$$

Поэтому сдвиги множества

$$G_k^\alpha(l, \xi) = \{t \in B_k^\alpha(l, \xi) \setminus [\xi + l - \tau_{k^2+2k}, \xi + l] : |f_\alpha(t) + g(t)| \leq \Delta_k\}$$

на числа $t + \tau_{k^2+m}$, $m = 0, 1, \dots, 2k$, не пересекаются и, следовательно, $\text{meas } G_k^\alpha(l, \xi) \leq (2k+1)^{-1}l$ и при $l \geq l'_k(\alpha)$ (для всех $\xi \in \mathbb{R}$) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l} \text{meas } \{t \in [\xi, \xi + l] : |f_\alpha(t) + g(t)| \leq \Delta_k\} \leq \\ & \leq \frac{1}{l} \text{meas } [\xi, \xi + l] \setminus B_k^\alpha(l, \xi) + \frac{1}{l} \tau_{k^2+2k} + \frac{1}{l} \text{meas } G_k^\alpha(l, \xi) < \\ & < 2^{-2k^3-1} + 2^{-k^2+1} + \frac{1}{l} \tau_{k^2+2k} + (2k+1)^{-1}, \end{aligned}$$

из которой для всех $k \in \mathbb{N}$ (и всех $\alpha \in \mathfrak{A}$) непосредственно вытекает неравенство

$$\varkappa_W(\{t \in \mathbb{R} : |f_\alpha(t) + g(t)| \leq \Delta_k\}) < 2^{-k^2+2} + (2k+1)^{-1}. \quad (3.6)$$

При $k \rightarrow +\infty$ из (3.6) следует доказываемое равенство (2.5). Теорема 7 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Из условий теоремы 2 непосредственно следует, что $\mathcal{T}(\cdot) \in \mathbf{T}$. Так как $h \in W_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то (см. лемму 4) также $\mathcal{T}'(\cdot) \doteq \mathcal{T}(\cdot) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\cdot; h) \in \mathbf{T}$. Последнее включение, в частности, означает, что $\mathcal{T}(\delta) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho_{\mathbb{R}})}(\delta; h) \in \mathcal{S}_{\text{rd}}$ для всех $\delta > 0$. Не ограничивая общности, будем в дальнейшем считать, что $\varepsilon \in (0, 1]$. В силу теоремы 4 для всех $n \in \mathbb{N}$ существуют последовательность $\{T_j^{(n)}\}_{j \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}'(\cdot)\}$ и множества $F_j^{(n)} \in \text{cl } U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\text{dist}_{\rho'}(F(t), F_j^{(n)}) < 2^{-n-1} \frac{\varepsilon}{9}$$

для всех $t \in T_j^{(n)}$, $j \in \mathbb{N}$. Из теоремы 4 также следует, что существуют последовательность $\{T_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}'(\cdot)\}$ и точки $y_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $\rho(g(t), y_j) < \frac{\varepsilon}{36}$ для всех $t \in T_j$, $j \in \mathbb{N}$. Для всех упорядоченных пар $\{j, j_1\}$ индексов $j, j_1 \in \mathbb{N}$, для которых $T_j \cap T_{j_1}^{(1)} \neq \emptyset$, выберем (какие-либо) точки $x_{j, j_1} \in F_{j_1}^{(1)}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\rho(x_{j, j_1}, y_j) < \rho(y_j, F_{j_1}^{(1)}) + \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Далее последовательно при $n = 2, 3, \dots$ для упорядоченных наборов $\{j, j_1, \dots, j_n\}$ индексов $j, j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$, для которых $T_j \cap T_{j_1}^{(1)} \cap \dots \cap T_{j_n}^{(n)} \neq \emptyset$, будем находить точки $x_{j, j_1, \dots, j_n} \in F_{j_n}^{(n)}$. Пусть они уже найдены для некоторого числа $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что для упорядоченного набора $\{j, j_1, \dots, j_n, j_{n+1}\}$ индексов $j, j_1, \dots, j_n, j_{n+1} \in \mathbb{N}$ имеем $T_j \cap T_{j_1}^{(1)} \cap \dots \cap T_{j_n}^{(n)} \cap T_{j_{n+1}}^{(n+1)} \neq \emptyset$. Так как также $T_j \cap T_{j_1}^{(1)} \cap \dots \cap T_{j_n}^{(n)} \neq \emptyset$, то определены точки $x_{j, j_1, \dots, j_n} \in F_{j_n}^{(n)}$. Тогда точки $x_{j, j_1, \dots, j_n, j_{n+1}} \in F_{j_{n+1}}^{(n+1)}$ выберем так, что

$$\rho'(x_{j, j_1, \dots, j_n, j_{n+1}}, x_{j, j_1, \dots, j_n}) \leq 2 \text{dist}_{\rho'}(F_{j_{n+1}}^{(n+1)}, F_{j_n}^{(n)}).$$

Для любого $t \in T_j \cap T_{j_1}^{(1)} \cap \dots \cap T_{j_n}^{(n)} \cap T_{j_{n+1}}^{(n+1)} \neq \emptyset$ выполняется оценка

$$\text{dist}_{\rho'}(F_{j_{n+1}}^{(n+1)}, F_{j_n}^{(n)}) \leq \text{dist}_{\rho'}(F_{j_{n+1}}^{(n+1)}, F(t)) + \text{dist}_{\rho'}(F_{j_n}^{(n)}, F(t)) < (2^{-n-1} + 2^{-n-2}) \frac{\varepsilon}{9} = 2^{-n-2} \frac{\varepsilon}{3},$$

поэтому

$$\rho(x_{j, j_1, \dots, j_n, j_{n+1}}, x_{j, j_1, \dots, j_n}) = \rho'(x_{j, j_1, \dots, j_n, j_{n+1}}, x_{j, j_1, \dots, j_n}) < 2^{-n-1} \frac{\varepsilon}{3} < 1.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место включение (см. (2.3))

$$\{T_j \cap T_{j_1}^{(1)} \cap \dots \cap T_{j_n}^{(n)}\}_{j, j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(W)}\{\mathcal{T}'(\cdot)\}.$$

Определим функции

$$f(n; \cdot) = \mathbb{F}(\{x_{j, j_1, \dots, j_n}\}, \{T_j \cap T_{j_1}^{(1)} \cap \dots \cap T_{j_n}^{(n)}\}; \cdot), \quad n \in \mathbb{N}$$

(для которых $f(n; t) = x_{j, j_1, \dots, j_n}$ при всех $t \in T_j \cap T_{j_1}^{(1)} \cap \dots \cap T_{j_n}^{(n)}$ (если последнее множество непустое)). Из леммы 16 получаем, что $f(n; \cdot) \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$ и $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f(n; \cdot)) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$. Обозначим

$$T = \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} T_j \right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j_n \in \mathbb{N}} T_{j_n}^{(n)} \right).$$

Имеем $\text{meas } \mathbb{R} \setminus T = 0$. Для всех $t \in T$ существует последовательность $\{j(t), j_1(t), j_2(t), \dots\}$ такая, что $t \in T_{j(t)}$ и $t \in T_{j_n(t)}^{(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $t \in T$, то $f(n; t) = x_{j(t), j_1(t), \dots, j_n(t)}$, поэтому

$$\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(n+1; t), f(n; t)) \leq \sup_{t \in T} \rho(x_{j(t), j_1(t), \dots, j_n(t), j_{n+1}(t)}, x_{j(t), j_1(t), \dots, j_n(t)}) \leq 2^{-n-1} \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда получаем (так как метрическое пространство (U, ρ) является полным), что последовательность функций $f(n; \cdot)$ при $n \rightarrow +\infty$ равномерно (на множестве T) сходится к некоторой функции $f_\varepsilon \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U)$, при этом $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f_\varepsilon) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$ (см. лемму 7 и утверждение после нее). Последнее означает, что для любого $\delta' > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $\mathcal{P}_1^{(\rho')}(\delta'; f_\varepsilon) \supseteq \mathcal{T}'(\delta) \cap \mathcal{P}_1^{(\rho)}(\delta; h)$. Для всех $t \in T$ справедливо включение $f(n; t) \in F_{j_n(t)}^{(n)}$ и

$$\text{dist}_{\rho'}(F_{j_n}^{(n)}, F(t)) < 2^{-n-1} \frac{\varepsilon}{9} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$, следовательно, $f_\varepsilon(t) \in F(t)$ при всех $t \in T$. Если $t \in T$, то выполняются оценки

$$\begin{aligned} & \rho(f_\varepsilon(t), g(t)) \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(x_{j(t), j_1(t), \dots, j_n(t), j_{n+1}(t)}, x_{j(t), j_1(t), \dots, j_n(t)}) + \rho(x_{j(t), j_1(t)}, y_{j(t)}) + \rho(y_{j(t)}, g(t)) < \\ & < \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n-1} \frac{\varepsilon}{3} + \rho(y_{j(t)}, F_{j_1(t)}^{(1)}) + \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{36} \leq \\ & \leq \rho(y_{j(t)}, g(t)) + \rho(g(t), F(t)) + \text{dist}_{\rho'}(F_{j_1(t)}^{(1)}, F(t)) + \frac{17}{18} \varepsilon < \rho(g(t), F(t)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что также $F \in M_p^*(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$, $p \geq 1$. В этом случае из теоремы 3 следует, что $F \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \cap M_p^*(\mathbb{R}, \text{cl}_b U) \subseteq \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, \text{cl}_b U)$ (и $\mathcal{P}_p^{(\text{dist})}(\cdot; F) \prec \mathcal{P}_1^{(\text{dist}')}(\cdot; F) = \mathcal{P}_1^{(\text{dist } \rho')}(\cdot; F)$, поэтому $\mathcal{P}_p^{(\text{dist})}(\cdot; F) \prec \mathcal{T}(\cdot)$). Так как $\rho(f_\varepsilon, x_0) \leq \text{dist}(F(t), \{x_0\})$ п.в., то справедливо включение $f_\varepsilon \in M_p^*(\mathbb{R}, U)$ и, следовательно (см. теорему 3), $f_\varepsilon \in \widetilde{W}^c(\mathbb{R}, U) \cap M_p^*(\mathbb{R}, U) \subseteq \widetilde{W}_p^c(\mathbb{R}, U)$ (и $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f_\varepsilon) \prec \mathcal{P}_1^{(\rho')}(\cdot; f_\varepsilon)$, поэтому $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\cdot; f_\varepsilon) \prec \mathcal{T}'(\cdot)$). Теорема 2 доказана.

Автор выражает признательность рецензенту за ряд полезных замечаний и предложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andres J. Bounded, almost-periodic and periodic solutions of quasilinear differential inclusions // Differential Inclusions and Optimal Control (ed. by J. Andres, L. Górniewicz and P. Nistri). Lecture Notes in Nonlin. Anal. — 1998. — Vol. 2. — P. 35–50.

2. Andres J., Bersani A. M., Leśniak K. On some almost-periodicity problems in various metrics // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 65. — № 1–3. — P. 35–57.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуцкий О. О. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний: Сб. — Киев: Наукова думка, 1977. — С. 54–61.
4. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Известия отдела математики и информатики. — УдГУ. Ижевск, 1993. — Вып. 1. — С. 16–78.
5. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журнал. — 1991. — Т. 32. — № 2. — С. 172–175.
6. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. — 1983. — Vol. 76. — № 2. — P. 163–174.
7. Данилов Л. И. О почти периодических сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 2. — С. 34–41.
8. Danilov L. I. On Weyl almost periodic selections of multivalued maps // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 316. — № 1. — P. 110–127.
9. Данилов Л. И. О почти периодических по Безиковичу сечениях многозначных отображений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 1. — С. 97–120.
10. Данилов Л. И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сборник. — 1997. — Т. 188. — № 10. — С. 3–24.
11. Данилов Л. И. Почти периодические по Вейлю сечения носителей мерозначных функций // Сибирские электронные математические известия. — 2006. — Т. 3. — С. 384–392.
<http://semr.math.nsc.ru>
12. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 396 с.
13. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 205 с.
14. Данилов Л. И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений / ФТИ УрО РАН. — Ижевск, 2004. — 104 с. — Деп. в ВИНТИ 09.06.2004, № 981-B2004.
15. Andres J., Bersani A. M., Grande R. F. Hierarchy of almost-periodic function spaces // Rendiconti Mat. Appl. Ser. VII. — 2006. — Vol. 26. — № 2. — P. 121–188.
16. Данилов Л. И. Почти периодические по Вейлю сечения многозначных отображений // Известия Института математики и информатики. — УдГУ. Ижевск, 2006. — Вып. 3 (37). — С. 27–28.
17. Данилов Л. И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Вейлю и почти периодических по Безиковичу функций // Известия Института математики и информатики. — УдГУ. Ижевск, 2006. — Вып. 1 (35). — С. 33–48.
18. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышёва и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие. — М.: Наука, 1973. — 551 с.

Поступила в редакцию 22.09.08

L. I. Danilov

On a class of Weyl almost periodic selections of multivalued maps

We consider a class of Weyl almost periodic functions for which the set of ε -almost the periods defined by means of the Weyl pseudometric is relatively dense for all $\varepsilon > 0$. For this class of functions, under certain additional restrictions we prove the existence of almost periodic selections of almost periodic multivalued maps.

Keywords: almost periodic function, selection, multimap.

Mathematical Subject Classifications: 42A75, 54C65

Данилов Леонид Иванович, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник. Физико-технический институт УрО РАН. 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132. E-mail: danilov@otf.pti.udm.ru