Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. S. Bannikov, About a problem of positional capture of one evader by group of pursuers, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, Issue 1, 3–7

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.162.85.209

April 26, 2023, 13:01:33

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

© А. С. Банников

О ЗАДАЧЕ ПОЗИЦИОННОЙ ПОИМКИ ОДНОГО УБЕГАЮЩЕГО ГРУППОЙ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ¹

Рассматривается задача позиционной поимки группой преследователей одного убегающего при равенстве динамических и инерционных возможностей всех участников. Получены достаточные условия ε -поимки на конечном отрезке времени.

Ключевые слова: дифференциальная игра, позиционное управление с поводырём.

Введение

Рассматривается нестационарная задача простого преследования несколькими управляемыми объектами одного убегающего при равных динамических возможностях всех участников. Стационарный случай $a(t) \equiv 1$ задачи простого преследования рассматривался многими авторами [1, 2]. В этих работах одним из условий окончания игры было условие преимущества преследователей по ресурсам управления или же условие информационной дискриминации убегающего. Основываясь на процедуре управления с поводырём, предложенной Н. Н. Красовским [3, 4], А. А. Чикрий приводит позиционную процедуру управления для квазилинейной задачи преследования один на один [5]. В работе [6] этот подход развивается для игры со многими преследователями.

В данной работе показывается, что если преследование может быть завершено за конечное время в классе позиционных контрстратегий, то при информированности преследователей только о позиции игры, оно может быть закончено за то же самое время в сколь угодно малой окрестности терминального множества.

§ 1. Постановка задачи

В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ -го лица: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и убегающего E . Законы движения каждого из преследователей P_i и убегающего E имеют вид:

$$\begin{array}{llll} P_i: & \dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), & x_i(t_0) = x_i^0, & u_i \in Q, \\ E: & \dot{y}(t) = a(t)v(t), & y(t_0) = y^0, & v \in Q, \end{array}$$

причём $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$, $i \in N_n = \{1, \dots, n\}$, $M_i \subset \mathbb{R}^k$ — заданные выпуклые компакты, $a(t): [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримая по Лебегу функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве полуоси $[t_0, +\infty)$, $Q \subset \mathbb{R}^k$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей.

Пусть $z_i(t) = x_i(t) - y(t)$, $i \in N_n$, $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$. Тогда

$$\dot{z}_i(t) = a(t)(u_i(t) - v(t)), \quad z_i(t_0) = z_i^0. \quad (1)$$

Для каждой из систем (1) рассмотрим систему-поводыря [4]

$$\dot{w}_i(t) = a(t)(u_i(t) - v(t)), \quad w_i(t_0) = w_i^0, \quad u_i, v \in Q, \quad i \in N_n. \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00380).

Определение 1. Будем говорить, что в игре Γ *происходит поимка* из заданной начальной позиции $z^0 = z(t_0)$, если существуют момент времени $T_0 = T(z^0)$, позиционные стратегии управления с поводырём $\mathcal{U}_i = (U_i, \psi_i, \chi_i)$ преследователей P_i , $i \in N_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in Q$, $t \in [t_0, T_0]$ существуют момент времени $\tau \in [t_0, T_0]$ и номер $s \in N_n$ такие, что имеет место включение $z_s(\tau) \in M_s$.

Здесь U_i — функция, которая будет формировать управление преследователя P_i в исходной системе (1)

$$U_i: [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow Q,$$

функция ψ_i есть переходная функция i -го поводыря

$$\psi_i: T_+^2 \times \mathbb{R}^{nk} \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}^k \quad \left(T_+^2 = \{ (t_1, t_2) \in [t_0, T_0]^2 \mid t_1 \leq t_2 \} \right).$$

Значение переходной функции $\psi_i(t_1, t_2, z, w)$ есть положение $w_i = w_i(t_2)$, в котором i -й поводырь окажется в заданный момент времени t_2 при условии, что в момент $t = t_1$ управляемая система и поводыри находились в точках $z = z(t_1)$ и $w = w(t_1)$ соответственно.

Третья функция χ_i ставит в соответствие позиции (t, z) положение поводыря $\chi_i(t, z) = w_i = w_i(t)$.

Введём функции λ_i следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_i(v, m_i) &= \max\{\lambda | v - \lambda(w_i^0 - m_i) \in Q, v \in Q\}, & \lambda_i(v) &= \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i), \\ \lambda_i^-(v, m_i) &= \max\{\lambda | v - \lambda(w_i^0 - m_i) \in -Q, v \in -Q\}, & \lambda_i^-(v) &= \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(v, m_i). \end{aligned}$$

$$w^0 = (w_1^0, \dots, w_n^0), \quad w_i^0 \notin M_i, \quad i \in N_n.$$

Так как Q — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то существуют

$$\delta(w^0) = \min_{v \in Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i(v) \geq 0, \quad \delta^-(w^0) = \min_{v \in -Q} \max_{i \in N_n} \lambda_i^-(v) \geq 0,$$

причём $(\delta(w^0))^2 + (\delta^-(w^0))^2 > 0 \Leftrightarrow 0 \in \text{Int conv } \bigcup_{i \in N_n} (w_i^0 - M_i)$.

Введём обозначения: $A^+(t) = \{\tau \in [t_0, t] | a(\tau) > 0\}$, $A^-(t) = \{\tau \in [t_0, t] | a(\tau) < 0\}$, $C(Q; h) = \max_{q \in Q} \langle q, h \rangle$ — опорная функция компакта Q , $C'(Q; h)$ — градиент опорной функции, B^k — единичный шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в начале координат.

§ 2. Достаточные условия поимки

Теорема 1. Пусть начальная позиция z^0 и функция $a(\cdot)$ таковы, что

$$\widehat{T} = \widehat{T}(z^0) = \min \left\{ t \geq t_0 \mid \delta(z^0) \int_{A^+(t)} a(s) ds + \delta^-(z^0) \int_{A^-(t)} |a(s)| ds = n \right\} < +\infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в игре Γ происходит поимка с терминальными множествами $M_i^\varepsilon = M_i + \varepsilon B^k$.

Доказательство. В качестве $T(z^0)$ возьмём $\widehat{T}(z^0)$ и определим функции χ_i , U_i следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_i(t, z) &= z_i, \quad i \in N_n. \\ U_i(t, x, w) &= \begin{cases} C'(Q, w - x), & \text{при } x \neq w \text{ и } a(t) > 0, \\ C'(Q, x - w), & \text{при } x \neq w \text{ и } a(t) < 0, \\ u_i^0 \in Q, & \text{при } x = w \text{ или } a(t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

где u_i^0 — произвольный фиксированный вектор из Q . Тогда для всех $(t, x, w) \in [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ будет выполнено

$$\langle x - w, a(t)U_i(t, x, w) \rangle = \min_{u \in Q} \langle x - w, a(t)u \rangle, \quad i \in N_n.$$

Для определения переходной функции поводыря рассмотрим стратегию $V^*(t, s_1, \dots, s_n)$ фиктивного убегающего в системе (2)

$$V^*(t, s_1, \dots, s_n): [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow Q$$

$$V^*(t, s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} C'(Q, -\sum_{i \in N_n} s_i), & \text{при } \sum_{i \in N_n} s_i \neq 0 \text{ и } a(t) > 0, \\ C'(Q, \sum_{i \in N_n} s_i), & \text{при } \sum_{i \in N_n} s_i \neq 0 \text{ и } a(t) < 0, \\ v^0 \in Q, & \text{при } \sum_{i \in N_n} s_i = 0 \text{ или } a(t) = 0, \end{cases}$$

где v^0 — произвольный фиксированный вектор из Q , и контрстратегии фиктивных преследователей

$$U_i^*(t, w^0, v^*(t)) = \begin{cases} v^*(t) - \lambda_i(v^*(t))(w_i^0 - \mathcal{M}_i(v^*(t))), & a(t) > 0, \\ v^*(t), & a(t) = 0, \\ v^*(t) + \lambda_i^-(v^*(t))(w_i^0 - \mathcal{M}_i^-(v^*(t))), & a(t) < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $v^*(t) = V^*(t, s_1, \dots, s_n)$, $\mathcal{M}_i(v)$ и $\mathcal{M}_i^-(v)$ — измеримые по Борелю селекторы полунепрерывных сверху по включению компактных множеств

$$\mathfrak{M}_i(v) = \{m_i \in M_i | \lambda_i(v, m_i) = \lambda_i(v)\}, \quad \mathfrak{M}_i^-(v) = \{m_i \in M_i | \lambda_i^-(v, m_i) = \lambda_i^-(v)\}$$

соответственно. Тогда для всех $(t, s_1, \dots, s_n) \in [t_0, T_0] \times \mathbb{R}^{nk}$ выполнено

$$\sum_{i \in N_n} \langle s_i, a(t)V^*(t, s_1, \dots, s_n) \rangle = \min_{v \in Q} \sum_{i \in N_n} \langle s_i, a(t)v \rangle.$$

Переходные функции поводырей определяются теперь так:

$$\psi_i(t_1, t_2, z, w) = w_i + \int_{t_1}^{t_2} a(t)(u_i^*(t) - v^*(t)) dt,$$

$$v^*(t) = V^*(t, z_1 - w_1, \dots, z_n - w_n), \quad u_i^*(t) = U_i^*(t, w^0, v^*(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

$$z = (z_1, \dots, z_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n).$$

Рассмотрим построение пошаговых движений $z_i(t)$ и $w_i(t)$, $t \in [t_0, T_0]$, в процедуре управления с поводырём, где начальное положение поводыря w^0 выбирается равным начальному положению z^0 .

Выбираем некоторое разбиение $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{\ell+1}$ отрезка $[t_0, T_0]$: $t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_{\ell+1} = T_0$. В начальный момент времени $t = t_0$ определим управления преследователей P_i , $i \in N_n$ на интервале $[\tau_0, \tau_1)$, полагая $u_i^0(t) = U_i(t, z_i^0, w_i^0)$, где $w_i^0 = z_i^0$ — начальное положение поводырей. Управление $v^*(t)$ убегающего в системе-поводыре (2) на $[\tau_0, \tau_1)$ полагает равным $V^*(t, z_1^0 - w_1^0, \dots, z_n^0 - w_n^0)$, а управления фиктивных преследователей согласно (3) $u_i^*(t) = U_i^*(t, w^0, v^*(t))$.

Пусть $z_i(\tau_j)$ и $w_i(\tau_j)$ — положения, в которые пришли управляемые система (1) и система-поводырь (2) в момент $t = \tau_j$. Определяем движения $z_i(t)$, $w_i(t)$, полагая в системе (2) управление убегающего на $j+1$ шаге $v^*(t) = V^*(t, z_1(\tau_j) - w_1(\tau_j), \dots, z_n(\tau_j) - w_n(\tau_j))$, управления преследователей $u_i^*(t) = U_i^*(t, w^0, v^*(t))$, а управления преследователей P_i в системе (1) $u_i^0(t) = U_i(t, z_i(\tau_j), w_i(\tau_j))$.

Таким образом, преследователи в системе (1) строят свои управления пошагово, зная на каждом шаге реальную позицию игры и позицию во вспомогательной системе–поводыре.

Указанные построения продолжаются до тех пор, пока один из поводырей не попадёт на своё терминальное множество. Такой момент времени $\tau = \tau^0(w(\cdot)) \in [t_0, T_0]$ и номер $i_0 \in N_n$, что $w_{i_0}(\tau) \in M_{i_0}$ обязательно найдутся в силу условий теоремы и способов построения управлений в системе–поводыре (2) (см. [7, с. 47]).

Однако удобнее будет продолжить движения $z_i(t)$, $w_i(t)$ до момента $t = T_0$, формально полагая, что на промежутках $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, где $\tau_j > \tau^0(w(\cdot))$, в качестве движения поводырей выбираются решения уравнений (2), в которых $v^*(t) = V^*(t, z_1(\tau_j) - w_1(\tau_j), \dots, z_n(\tau_j) - w_n(\tau_j))$, а $u_i^*(t) = u_i^* \in Q$ — произвольные постоянные управления. При этом в системе (1) по-прежнему выбираются управления преследователей $u_i^0(t) = U_i(t, z_i(\tau_j), w_i(\tau_j))$, $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$.

Оценим теперь расстояние между движениями поводырей и соответствующими движениями систем (1).

Введём обозначения

$$g(t) = \begin{cases} |a(t)|, & t \in [t_0, T_0], \\ 0, & t \in [T_0, 2T_0 - t_0], \end{cases}, \quad A(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds, \quad t \in [T_0, 2T_0 - t_0],$$

$$h(t, \delta) = A(t + \delta) - A(t) = \int_t^{t+\delta} g(s) ds, \quad (t, \delta) \in [t_0, T_0] \times [0, T_0 - t_0],$$

$$f(\delta) = \max_{t \in [t_0, T_0]} h(t, \delta), \quad \delta \in [0, T_0 - t_0].$$

Тогда для любого решения уравнения

$$\dot{x}(t) = a(t)(u(t) - v(t)), \quad u, v \in Q, \quad t \in [t_0, T_0]$$

с любым начальным условием $x(t_0) = x_0$ выполнено

$$\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |a(t)| \|u(t) - v(t)\| dt \right| \leq 2Rf(\delta), \quad |t_1 - t_2| \leq \delta, \quad t_1, t_2 \in [t_0, T_0],$$

где $R = \max_{q \in Q} \|q\|$ — модуль компакта Q .

Поэтому для любых реализовавшихся движений в системах (1) и (2)

$$\max_{i \in N_n} \|z_i(t_1) - z_i(t_2)\| \leq 2Rf(\delta),$$

$$\max_{i \in N_n} \|w_i(t_1) - w_i(t_2)\| \leq 2Rf(\delta),$$

как только $|t_1 - t_2| \leq \delta$, причём $f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть $s_i(t) = z_i(t) - w_i(t)$, $i \in N_n$, $t \in [t_*, t_* + \delta]$, $t_* \in [t_0, T_0]$, $\delta \in (0, T_0 - t_*]$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\|s_i(t)\|^2}{dt} &= 2\langle s_i(t), a(t)(u_i^0(t) - v(t) - u_i^*(t) + v^*(t)) \rangle = \\ &= 2\langle s_i(t_*) + s_i(t) - s_i(t_*), a(t)(u_i^0(t) - v(t) - u_i^*(t) + v^*(t)) \rangle = \\ &= 2\left(\langle s_i(t_*), a(t)(u_i^0(t) - u_i^*(t)) \rangle + \langle s_i(t_*), a(t)(v^*(t) - v(t)) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle s_i(t) - s_i(t_*), a(t)(u_i^0(t) - v(t) - u_i^*(t) + v^*(t)) \rangle \right) \leq \\ &\leq 2\left(4Rf(\delta) \cdot 4R|a(t)| + \langle s_i(t_*), a(t)(v^*(t) - v(t)) \rangle \right), \end{aligned}$$

если $v^*(t) = V^*(t, s_1(t_*), \dots, s_n(t_*))$, $u_i^0(t) = U_i(t, z_i(t_*), w_i(t_*))$, а управления $u_i^*(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — произвольные допустимые управления.

Поэтому $\sum_{i \in N_n} \frac{d\|s_i(t)\|^2}{dt} \leq 2 \sum_{i \in N_n} \langle s_i(t_*), a(t)(v^*(t) - v(t)) \rangle + 32nR^2 f(\delta) |a(t)| \leq |a(t)| \zeta(\delta)$, где $\zeta(\delta) = 32nR^2 f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Значит,

$$\max_{t \in [t_*, t_* + \delta]} \max_{i \in N_n} \|s_i(t)\|^2 \leq \sum_{i \in N_n} \|s_i(t_*)\|^2 + \zeta(\delta) \int_{t_*}^{t_* + \delta} |a(\tau)| d\tau.$$

Так как $\sum_{i \in N_n} \|s_i(t_0)\|^2 = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\max_{t \in [t_0, T_0]} \max_{i \in N_n} \|s_i(t)\|^2 \leq \zeta(\delta) \int_{t_0}^{T_0} |a(\tau)| d\tau \leq \varepsilon^2 \quad (4)$$

как только будет выбрано разбиение с диаметром, не превосходящим δ , а δ подобрано из условия $\zeta(\delta) \leq \frac{\varepsilon^2}{\int_{t_0}^{T_0} |a(\tau)| d\tau}$.

В силу оценки (4) как только $w_{i_0}(\tau) \in M_{i_0}$, это будет означать, что преследователь P_{i_0} находится в ε -окрестности множества M_{i_0} , то есть в дифференциальной игре Γ происходит поимка, где в качестве терминальных множеств взяты множества $M_i^\varepsilon = M_i + \varepsilon B^k$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Вышеуказанный подход можно применять и в случае, когда необходимо завершить игру Γ в точности на терминальном множестве. В случае, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $i \in N_n$ $\widetilde{M}_i = M_i - \varepsilon B^k \neq \emptyset$, можно рассмотреть игру с терминальными множествами $\widetilde{M}_i$. Тогда попадание одного из поводырей на $\widetilde{M}_{i_0}$ гарантирует поимку в игре с исходными множествами M_i .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б. Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.
2. Григоренко Н. Л. Игра простого преследования–убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и кибер. — 1983. — № 1. — С. 41–47.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
4. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
5. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 384 с.
6. Шишкина Н. Б. О задаче преследования по позиции в дифференциальной игре со многими преследователями // Кибернетика. — 1987. — № 1. — С. 47–50.
7. Банников А. С., Петров Н. Н. К нестационарной задаче группового преследования // Труды ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16, №1. — С. 40–51.

Поступила в редакцию 30.09.10

A. S. Bannikov

About a problem of positional capture of one evader by group of pursuers

We study a problem of positional capture of one evader by group of pursuers with equal dynamic and inertial capabilities of the players. Sufficient conditions for ε -capture on a finite interval of time are obtained.

Keywords: differential game, position control with guide.

Mathematical Subject Classifications: 49N70, 49N75

Банников Александр Сергеевич, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4),
E-mail: bannikov_a_s@mail.ru