Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

T. S. Tinyukova, Quasi-levels of the discrete Schrödinger operator for a quantum waveguide, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, Issue 2, 88–97

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.208.226.222

April 26, 2023, 18:23:01

УДК 517.958 : 530.145.6

© Т. С. Тюлюкова

КВАЗИУРОВНИ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ КВАНТОВОГО ВОЛНОВОДА

Для дискретного оператора Шредингера, отвечающего квантовому волноводу, с экспоненциально убывающим потенциалом вида εV доказано, что в окрестности особенностей невозмущенной функции Грина для малых ε существуют квазиуровни (собственные значения или резонансы), для которых найдены асимптотические формулы.

Ключевые слова: дискретное уравнение Шредингера, собственное значение, резонанс.

Введение

Положим $\Gamma = \mathbb{Z} \times \{1, \dots, N\} \subset \mathbb{Z}^2$, $N > 1$. Множество Γ будем отождествлять с вершинами неориентированного графа (вершины располагаем в $\mathbb{Z}^2$ лишь для удобства обозначений). Обозначим через $l^2(\Gamma)$ гильбертово пространство функций $\varphi(n, m)$, где $(n, m) \in \Gamma$, со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{l^2(\Gamma)} = \sum_{(n,m) \in \Gamma} \varphi(n, m) \overline{\psi(n, m)}.$$

Введем в рассмотрение оператор $H_0 = (H_{01} \otimes 1) + (1 \otimes H_{02})$, действующий в $l^2(\Gamma)$. Здесь оператор $H_{01} : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ действует по правилу

$$(H_{01}\varphi)(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор H_{02} действует в $l^2(\{1, \dots, N\}) \cong \mathbb{C}^N$ и определяется равенствами

$$(H_{02}\varphi)(m) = \varphi(m-1) + \varphi(m+1), \quad m = 2, \dots, N-1,$$

$$(H_{02}\varphi)(1) = \varphi(2),$$

$$(H_{02}\varphi)(N) = \varphi(N-1).$$

Положим $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, где $\varepsilon > 0$, а $V \neq 0$ является оператором умножения на вещественную функцию $V(n, m)$, заданную на Γ и удовлетворяющую условию

$$|V(n, m)| \leq \beta e^{-\alpha|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \{1, \dots, N\}$$

для некоторых $\beta > 0$, $\alpha > 0$. Подобные функции в дальнейшем называем экспоненциально убывающими.

Операторы такого вида являются гамильтонианами (операторами энергии) электрона в квантовой проволоке (квантовом волновом) в приближении сильной связи (см., например, [1]). Через $\sigma(A)$ и $\sigma_{ess}(A)$ обозначим спектр и существенный спектр оператора A соответственно.

§ 1. Спектральные свойства оператора H_0

Теорема 1. Оператор H_0 самосопряжен и ограничен.

Легко проверяется непосредственно. В дальнейшем понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Существует ровно N различных собственных значений оператора H_{02} :

$$\lambda_j = 2 \cos \frac{j\pi}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N$$

с соответствующими собственными функциями

$$\varphi_j(m) = a_j \sin \left(\frac{mj\pi}{N+1} \right), \quad j = 1, \dots, N,$$

образующими ортонормированный базис в $\mathbb{C}^N$, где a_j , $j = 1, \dots, N$ — нормировочные коэффициенты.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение на собственные значения $H_{02}\varphi = \lambda\varphi$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(m-1) + \varphi(m+1) &= \lambda\varphi(m), \quad m = 2, \dots, N-1, \\ \varphi(2) &= \lambda\varphi(1), \\ \varphi(N-1) &= \lambda\varphi(N). \end{aligned} \tag{1}$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$\varphi(m) = c_1 e^{ikm} + c_2 e^{-ikm}, \quad m = 1, \dots, N.$$

Для $m \in \{2, \dots, N-1\}$ имеем

$$c_1 e^{ikm} (e^{-ik} + e^{ik}) + c_2 e^{-ikm} (e^{-ik} + e^{ik}) = \lambda (c_1 e^{ikm} + c_2 e^{-ikm}).$$

Следовательно, $\lambda = e^{-ik} + e^{ik} = 2 \cos k$. Второе уравнение (1) примет вид:

$$c_1 e^{2ik} + c_2 e^{-2ik} = (e^{-ik} + e^{ik})(c_1 e^{ik} + c_2 e^{-ik}),$$

откуда $c_1 = -c_2 = c$. Подставим $\varphi(m) = c(e^{ikm} - e^{-ikm})$ в третье уравнение (1):

$$ce^{ik(N-1)} - ce^{-ik(N-1)} = (e^{-ik} + e^{ik})(ce^{ikN} - ce^{-ikN}).$$

Следовательно, $\sin k(N+1) = 0$, откуда

$$k = \frac{j\pi}{N+1}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, существует ровно N различных собственных значений оператора H_{02} :

$$\lambda_j = 2 \cos \frac{j\pi}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N,$$

которым соответствуют N собственных функций

$$\sin \left(\frac{mj\pi}{N+1} \right), \quad j = 1, \dots, N.$$

Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны, а их количество совпадает с размерностью пространства. Следовательно, функции $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ образуют ортонормированный базис. $\square$

Спектр оператора H_{01} совпадает с отрезком $[-2, 2]$ (см. [2], раздел VII.2). Обозначим через $R_{01}(\lambda)$ резольвенту этого оператора, $R_{01}(\lambda) = (H_{01} - \lambda)^{-1}$. Ядро резольвенты (функция Грина) оператора H_{01} имеет вид (см., например, [3])

$$G_{01}(n-m, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|n-m|}. \tag{2}$$

Заметим, что функция

$$g(\lambda) = \lambda/2 - \sqrt{(\lambda/2)^2 - 1}$$

является обратной к функции Жуковского $w = (z + z^{-1})/2$ для $z = \lambda/2$. Риманова поверхность ν функции g двулистка, причем листы склеиваются вдоль интервала $(-2, 2)$, а точки ± 2 являются точками ветвления. Функция Грина G_{01} аналитически продолжается на второй лист поверхности ν . Выбор знака перед (арифметическим для $\lambda > 2$) корнем в (2) отвечает экспоненциальному убыванию функции G_{01} при $|n - m| \rightarrow \infty$ для $\lambda > 2$.

Ядро (являющееся матрицей) $\{G_0(n, m, n', m', \lambda)\}_{(n, m), (n', m') \in \Gamma}$ резольвенты $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1}$ оператора H_0 назовем функцией Грина этого оператора.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mu_j &= \lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{N+1}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \cos k_j &= \mu_j/2, \quad j = 1, \dots, N, \\ \sin k_j &= -\sqrt{1 - (\mu_j/2)^2}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

Лемма 2. *Имеет место формула*

$$G_0(n, m, n', m', \lambda) = \sum_{j=1}^N a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_{01}(n - n', \mu_j), \quad (4)$$

где

$$\lambda \notin \bigcup_{j=1}^N \left[-2 + 2 \cos \frac{j\pi}{N+1}, 2 + 2 \cos \frac{j\pi}{N+1} \right] = \left[-2 + 2 \cos \frac{N\pi}{N+1}, 2 + 2 \cos \frac{\pi}{N+1} \right].$$

Доказательство. Покажем справедливость равенства

$$(H_0 - \lambda)R_0(\lambda)\varphi = \varphi, \quad \varphi \in l^2(\Gamma) \quad (5)$$

при условии, что оператору $R_0(\lambda)$ отвечает ядро (4). Используя лемму (1), получим

$$\begin{aligned} (H_0 - \lambda)R_0(\lambda)\varphi(n, m) &= \\ &= ((H_{01} \otimes 1) - \lambda) \sum_{j=1}^N a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sum_{(n', m') \in \Gamma} a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_{01}(n - n', \mu_j) \varphi(n', m') + \\ &+ \sum_{j=1}^N \lambda_j a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sum_{(n', m') \in \Gamma} a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_{01}(n - n', \mu_j) \varphi(n', m') = \\ &= \sum_{j=1}^N a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sum_{m'=1}^N a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) ((H_{01} \otimes 1) - \mu_j) \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_{01}(n - n', \mu_j) \varphi(n', m') = \\ &= \sum_{j=1}^N a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sum_{m'=1}^N a_j \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) \varphi(n, m'). \end{aligned} \quad (6)$$

Считая n константой, разложим $\varphi(n, m)$ по базису $\left\{ a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \right\}_{j=1}^N$:

$$\varphi(n, m) = \sum_{j=1}^N c_j(n) a_j \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right),$$

где

$$c_j(n) = \left(\varphi(n, m), a_j \sin \left(\frac{mj\pi}{N+1} \right) \right)_{l^2(\{1, \dots, N\})} = \sum_{m'=1}^N \varphi(n, m') a_j \sin \left(\frac{m'j\pi}{N+1} \right).$$

Имеем

$$\varphi(n, m) = \sum_{j=1}^N a_j \sin \left(\frac{mj\pi}{N+1} \right) \sum_{m'=1}^N a_j \sin \left(\frac{m'j\pi}{N+1} \right) \varphi(n, m'). \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует справедливость (5).

Осталось показать, что

$$R_0(\lambda)(H_0 - \lambda)\varphi = \varphi, \quad \varphi \in l^2(\Gamma).$$

Имеем

$$\begin{aligned} R_0(\lambda)(H_0 - \lambda)\varphi(n, m) &= \sum_{(n', m') \in \Gamma} G_0(n, m, n', m', \lambda)((H_0 - \lambda)\varphi)(n', m') = \\ &= \sum_{m'=2}^{N-1} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', m', \lambda)(\varphi(n'+1, m') + \varphi(n'-1, m') + \varphi(n', m'+1) + \varphi(n', m'-1) - \lambda\varphi(n', m')) + \\ &\quad + \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', 1, \lambda)(\varphi(n'+1, 1) + \varphi(n'-1, 1) + \varphi(n', 2) - \lambda\varphi(n', 1)) + \\ &\quad + \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', N, \lambda)(\varphi(n'+1, N) + \varphi(n'-1, N) + \varphi(n', N-1) - \lambda\varphi(n', N)) = \\ &= \sum_{m'=2}^{N-1} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} (G_0(n, m, n'-1, m', \lambda) + G_0(n, m, n'+1, m', \lambda) - \lambda G_0(n, m, n', m', \lambda))\varphi(n', m') + \\ &\quad + \sum_{m'=3}^N \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', m'-1, \lambda)\varphi(n', m') + \sum_{m'=1}^{N-2} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', m'+1, \lambda)\varphi(n', m') + \\ &\quad + \sum_{n' \in \mathbb{Z}} (G_0(n, m, n'-1, 1, \lambda) + G_0(n, m, n'+1, 1, \lambda))\varphi(n', 1) + \\ &\quad + \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', 1, \lambda)\varphi(n', 2) - \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', 1, \lambda)\lambda\varphi(n', 1) + \\ &\quad + \sum_{n' \in \mathbb{Z}} (G_0(n, m, n'-1, N, \lambda) + G_0(n, m, n'+1, N, \lambda))\varphi(n', N) + \\ &\quad + \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', N, \lambda)\varphi(n', N-1) - \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', N, \lambda)\lambda\varphi(n', N) = \\ &= \sum_{(n', m') \in \Gamma} (G_0(n, m, n'-1, m', \lambda) + G_0(n, m, n'+1, m', \lambda) - \lambda G_0(n, m, n', m', \lambda))\varphi(n', m') + \\ &\quad + \sum_{m'=2}^N \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', m'-1, \lambda)\varphi(n', m') + \sum_{m'=1}^{N-1} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} G_0(n, m, n', m'+1, \lambda)\varphi(n', m') = \\ &= \sum_{(n', m') \in \Gamma} (H_0 G_0(n, m, n', m', \lambda) - \lambda G_0(n, m, n', m', \lambda))\varphi(n', m'). \end{aligned}$$

Справедливо равенство

$$(H_0 - \lambda)G_0(n, m, n', m', \lambda) = \delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

Действительно,

$$(H_0 - \lambda)G_0(n, m, n', m', \lambda) =$$

$$\begin{aligned}
&= ((H_{01} \otimes 1) - \lambda) \sum_{j=1}^N a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_0(n-n', \mu_j) + \\
&\quad + (1 \otimes H_{02}) \sum_{j=1}^N a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_0(n-n', \mu_j) = \\
&= \sum_{j=1}^N ((H_{01} \otimes 1) - \lambda_j) a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_0(n-n', \lambda_j) = \\
&= \delta_{nn'} \sum_{j=1}^N a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) = \delta_{nn'} \delta_{mm'}.
\end{aligned}$$

Теорема 2.

$$\sigma(H_0) = \bigcup_{j=1}^N \left[-2 + 2 \cos \frac{j\pi}{N+1}, 2 + 2 \cos \frac{j\pi}{N+1} \right] = \left[-2 + 2 \cos \frac{N\pi}{N+1}, 2 + 2 \cos \frac{\pi}{N+1} \right].$$

Доказательство. Положим

$$A = \bigcup_{j=1}^N \left[-2 + 2 \cos \frac{j\pi}{N+1}, 2 + 2 \cos \frac{j\pi}{N+1} \right].$$

Пусть $\lambda \notin A$. Покажем, что $\lambda \notin \sigma(H_0)$, то есть $R_0(\lambda)$ — ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$. Действительно, тогда $\mu_j = \lambda - \lambda_j \notin [-2, 2]$, $j = 1, \dots, N$. Поэтому ядра $G_{01}(n-n', \mu_j)$ определяют ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$, и, следовательно, ядро G_0 оператора $R_0(\lambda)$ определяет ограниченный оператор в $l^2(\Gamma)$ в силу (4).

Пусть теперь $\lambda \in A$, то есть найдется такое $j_0 \in \{1, \dots, N\}$, что

$$\lambda \in \left[-2 + 2 \cos \frac{j_0\pi}{N+1}, 2 + 2 \cos \frac{j_0\pi}{N+1} \right].$$

Покажем, что найдется последовательность $\{\varphi_r\}_{r=1}^\infty \subset l^2(\Gamma)$ такая, что $\|\varphi_r\| = 1$, $(H_0 - \lambda)\varphi_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Это, в силу критерия Вейля (см., например, [2, с. 262]), будет означать, что $\lambda \in \sigma(H_0)$.

Рассмотрим последовательность

$$\varphi_r(n, m) = \frac{a_{j_0}}{\hat{c}} e^{ik_{j_0}n} \chi_{[-r, r]}(n) \sin\left(\frac{m\pi j_0}{N+1}\right),$$

где

$$\chi_{[-r, r]}(n) = \begin{cases} 1, & n \in [-r, r], \\ 0, & n \notin [-r, r]. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\hat{c} &= \hat{c}(r) = \sum_{n=-r}^r |e^{ik_{j_0}n}|^2 = 2r + 1, \\
\|\varphi_r(n, m)\|_{l^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{(n, m) \in \Gamma} \left| \frac{a_{j_0}}{\hat{c}(r)} \cdot e^{ik_{j_0}n} \chi_{[-r, r]}(n) \sin\left(\frac{m\pi j_0}{N+1}\right) \right|^2 = \\
&= \left\| \frac{1}{\hat{c}(r)} \cdot e^{ik_{j_0}n} \chi_{[-r, r]}(n) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 \cdot \left\| a_{j_0} \sin\left(\frac{m\pi j_0}{N+1}\right) \right\|_{l^2(\{1, \dots, N\})}^2 = \left\| \frac{1}{\hat{c}(r)} \cdot e^{ik_{j_0}n} \chi_{[-r, r]}(n) \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = 1.
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} ((H_0 - \lambda)\varphi_r)(n, m) &= ((H_0^1 \otimes 1) - \mu_{j_0}) \left(\frac{1}{\hat{c}(r)} \cdot e^{ik_{j_0}n} \chi_{[-r, r]}(n) \right) \sin \left(\frac{m\pi j_0}{N+1} \right) = \\ &= \frac{1}{\hat{c}(r)} (e^{ik_{j_0}(n+1)} \chi_{[-r, r]}(n+1) + e^{ik_{j_0}(n-1)} \chi_{[-r, r]}(n-1) - \lambda_{j_0} e^{ik_{j_0}n} \chi_{[-r, r]}(n)) = \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq \pm r, n \neq \pm(r+1), \\ \frac{1}{\hat{c}(r)} (e^{\pm ik_{j_0}(r-1)} - \lambda_{j_0} e^{\pm ik_{j_0}r}), & n = \pm r, \\ \frac{1}{\hat{c}(r)} e^{\pm ik_{j_0}r}, & n = \pm(r+1). \end{cases} \end{aligned}$$

Так как $|e^{ik_{j_0}}| = 1$ и $\hat{c}(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, то очевидно, что

$$|(H_0 - \lambda)\varphi_r(n, m)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

§ 2. Квазиуровни слабо возмущенного оператора

Рассмотрим оператор H_ε (см. введение). Резольвенту оператора H_ε обозначим через $R_\varepsilon(\lambda)$. В дальнейшем будем использовать обозначение $\sqrt{V} = \sqrt{|V|} \operatorname{sign} V$ (только для $\sqrt{V}$), тогда $V = \sqrt{V} \sqrt{|V|}$.

Уравнение на собственные значения оператора H_ε в области, где существует резольвента $R_0(\lambda)$, можно записать в виде

$$\psi = -\varepsilon R_0(\lambda)(V\psi), \quad (8)$$

где функция $\psi \in l^2(\Gamma)$ и отлична от нуля. Для того чтобы, оставаясь в рамках пространства $l^2(\Gamma)$, исследовать также резонансы, переходим к новой функции $\varphi = \sqrt{|V|}\psi \in l^2(\Gamma)$.

Обозначим через $L(\lambda) = \sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V}$ оператор с ядром

$$l(n, m, n', m', \lambda) = \sqrt{|V(n, m)|} \sum_{j=1}^N a_j^2 \sin \left(\frac{mj\pi}{N+1} \right) \sin \left(\frac{m'j\pi}{N+1} \right) G_{01}(n - n', \mu_j) \sqrt{V(n', m')} \quad (9)$$

(аналитическое продолжение операторнозначной функции, осуществляемое ее ядром, обозначаем тем же символом).

Определение 1. Назовем *резонансом* оператора H_ε значение λ , принадлежащее второму листу римановой поверхности $\nu_j = \nu - \lambda_j$ одного из слагаемых в выражении (9), для которого существует ненулевое решение уравнения

$$\varphi = -\varepsilon \sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V}\varphi \quad (10)$$

(предполагается, что $\sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V}$ существует как оператор в $l^2(\Gamma)$).

Определение 2. Назовем *квазиуровнем* оператора H_ε его собственное значение или резонанс.

В силу аналитической теоремы Фредгольма (см. [2]) и равенства

$$\sqrt{|V|}R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V} = (1 + \varepsilon \sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V})^{-1} \sqrt{|V|}R_0(\lambda)\sqrt{V} \quad (11)$$

λ является квазиуровнем тогда и только тогда, когда в этой точке существует полюс операторнозначной функции $\sqrt{|V|}R_\varepsilon(\lambda)\sqrt{V}$.

Лемма 3. Оператор $(1 - L(\lambda))^{-1}$ существует для всех $\lambda \in D \setminus S$, где

$$D = \left\{ a + bi \mid a \in \left(-2 + 2 \cos \frac{N\pi}{N+1}, 2 + 2 \cos \frac{\pi}{N+1} \right) \setminus \left\{ \pm 2 + 2 \cos \frac{j\pi}{N+1} \right\}, b \in (-\delta, +\infty) \right\},$$

$j = 1, \dots, N$, $\delta > 0$ достаточно мало, S — некоторое дискретное подмножество в D (то есть множество, не имеющее предельных точек в D).

Доказательство. Во-первых, покажем компактность оператора $L(\lambda)$ для каждого $\lambda \in D$. Для этого достаточно, чтобы он являлся оператором Гильберта–Шмидта, то есть достаточно выполнения условия

$$\sum_{(n,m) \in \Gamma} \sum_{(n',m') \in \Gamma} |l(n, m, n', m', \lambda)|^2 < +\infty$$

для фиксированного $\lambda \in D$.

Пусть $\lambda \in D$, тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{(n,m) \in \Gamma} \sum_{(n',m') \in \Gamma} |l(n, m, n', m', \lambda)|^2 = \\ &= \sum_{(n,m) \in \Gamma} \sum_{(n',m') \in \Gamma} \left| \sqrt{|V(n, m)|} \sum_{j=1}^N \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_{01}(n - n', \mu_j) \sqrt{|V(n', m')|} \right|^2 \leq \\ & \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha|n|} e^{-\alpha|n'|} \sum_{j=1}^N |G_{01}(n - n', \mu_j)|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Имеем

$$|G_{01}(n - n', \mu_j)| \leq \frac{e^{\sigma|n-n'|}}{|\sqrt{\mu_j^2 - 4}|}$$

для всех j , где $\sigma > 0$. Следовательно, полученная в (12) сумма для $\sigma < \alpha$, то есть для достаточно малых σ , не превосходит

$$C \sum_{j=1}^N \frac{1}{|\sqrt{\mu_j^2 - 4}|^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} e^{-(\alpha-\sigma)|n|} e^{-(\alpha-\sigma)|n'|} < \infty. \quad (13)$$

Во-вторых, покажем, что отображение $\lambda \in D \rightarrow L(\lambda) \in \mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ является аналитической операторнозначной функцией в области D (под $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ понимаем множество линейных ограниченных операторов, действующих в $l^2(\Gamma)$).

Неравенства (12) и (13) показывают, что ряд (9) сходится равномерно на компактах из $D \setminus S$. В силу (векторнозначного варианта) теоремы Вейерштрасса об аналитичности ряда из аналитических функций функция $l(n, m, n', m', \lambda)$ определяет аналитическую функцию в $D \setminus S$ со значениями в $l^2(\Gamma^2)$. Следовательно и $L(\lambda)$ является аналитической функцией в $D \setminus S$ со значениями в $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$.

Вследствие оценок (12) и (13) $\|L(\lambda)\| < 1$ для достаточно больших $|\lambda|$. Отсюда вытекает существование обратного оператора $(1 - L(\lambda))^{-1}$ для таких λ . В силу аналитической теоремы Фредгольма (см. [2]) это доказывает лемму. $\square$

Замечание 1. В комплексной окрестности произвольной точки $\lambda_0 \in \sigma(H_0)$ может быть лишь конечное число квазиуровней.

Теорема 3. Справедливо равенство

$$\sigma_{ess}(H_\varepsilon) = \sigma(H_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что V — относительно компактное возмущение оператора H_0 , то есть что оператор $VR_0(\lambda)$ компактен для некоторого $\lambda \notin \sigma(H_0)$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in \Gamma} \sum_{(n',m') \in \Gamma} |V(n,m)G_0(n,m,n',m',\lambda)|^2 &\leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\alpha|n|} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^N |q_j|^{n-n'} = \\ &= C \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\alpha|n|} \sum_{j=1}^N \sum_{n' \in \mathbb{Z}} |q_j|^{n'} < +\infty, \end{aligned}$$

где $|q_j| < 1$, $j = 1, \dots, N$, $C = \text{const}$. Следовательно, оператор $VR_0(\lambda)$ является оператором Гильберта–Шмидта, а значит, компактен. Утверждение теоремы вытекает из [4, с. 130].

Теорема 4. *Предположим, что*

$$v = \sum_{(n',m') \in \Gamma} \sin^2 \left(\frac{m'j_0\pi}{N+1} \right) V(n',m') \neq 0.$$

Тогда в достаточно малой окрестности точки $\lambda_{j_0}^{\pm} = \pm 2 + 2 \cos \frac{j_0\pi}{N+1}$, где $j_0 \in \{1, \dots, N\}$, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует единственный квазиуровень $\lambda^{\pm} = \lambda^{\pm}(\varepsilon)$ оператора H_{ε} , аналитически зависящий от ε , для которого справедлива формула

$$\lambda^{\pm}(\varepsilon) = \pm 2 + 2 \cos \frac{j_0\pi}{N+1} \pm \frac{a_{j_0}^4 \varepsilon^2 v^2}{4} + O(\varepsilon^4).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $j_0 \in \{1, \dots, N\}$. Введем обозначение

$$\eta_{j_0} = \eta_{j_0}(\lambda) = \sqrt{\mu_{j_0}^2 - 4}.$$

Заметим, что μ_{j_0} вблизи точки 2 (вблизи точки -2) отвечает $\text{Re } \mu_{j_0} > 0$ (соответственно $\text{Re } \mu_{j_0} < 0$). В достаточно малой окрестности $\mu_{j_0} = 0$ (то есть λ достаточно близки к $\lambda_{j_0}^{\pm}$) для функции Грина оператора H_{01} имеем

$$G_{01}(n - n', \mu_{j_0}) = -\frac{(\pm 1)^{|n-n'|}}{\eta_{j_0}} + g(n - n', \eta_{j_0}),$$

где $g(n - n', \eta_{j_0}) = \frac{(\pm 1)^{|n-n'|}}{\eta_{j_0}} - \frac{1}{\eta_{j_0}} \left(\frac{\sqrt{\eta_{j_0}^2 + 4} - \eta_{j_0}}{2} \right)^{|n-n'|}$ аналитическая по η_{j_0} в данной окрестности функция.

Нетрудно видеть, что для $j \neq j_0$ функции

$$G_{01}(n - n', \mu_j) = G_{01} \left(n - n', 2 \cos \frac{j_0\pi}{N+1} - 2 \cos \frac{j\pi}{N+1} + \sqrt{\eta_{j_0}^2 + 4} \right)$$

также являются аналитическими по η_{j_0} в этой окрестности.

Таким образом, уравнение (10), определяющее квазиуровни, можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(n, m) = \frac{\varepsilon a_{j_0}^2}{\eta_{j_0}} \sin \left(\frac{mj_0\pi}{N+1} \right) \sqrt{|V(n, m)|} \sum_{(n', m') \in \Gamma} (\pm 1)^{|n-n'|} \sin \left(\frac{m'j_0\pi}{N+1} \right) \sqrt{V(n', m')} \varphi(n', m') - \\ - \varepsilon \sqrt{|V(n, m)|} K(\eta_{j_0})(\sqrt{V}\varphi)(n, m), \end{aligned}$$

где $K(\eta_{j_0})$ — оператор с ядром

$$k(n, m, n', m', \eta_{j_0}) = a_{j_0}^2 \sin \left(\frac{mj_0\pi}{N+1} \right) \sin \left(\frac{m'j_0\pi}{N+1} \right) g(n - n', \eta_{j_0}) +$$

$$+ \sum_{j=1, j \neq j_0}^N a_j^2 \sin\left(\frac{mj\pi}{N+1}\right) \sin\left(\frac{m'j\pi}{N+1}\right) G_{01}(n-n', \mu_j), \quad \mu_j = \mu_j(\eta_{j_0}).$$

Легко видеть, что $K(\eta_{j_0})$ — аналитическая функция в окрестности нуля со значениями во множестве компактных операторов (см. доказательство леммы (3)).

Положим $\xi(n, m) = (1 + \varepsilon \sqrt{|V|} K(\eta_{j_0}) \sqrt{V}) \varphi(n, m)$. Предположим, что ε и η_{j_0} достаточно малы, тогда оператор $(1 + \varepsilon \sqrt{|V|} K \sqrt{V})^{-1}$ существует. Имеем

$$\begin{aligned} \xi(n, m) &= \frac{\varepsilon a_{j_0}^2 (\pm 1)^n}{\eta_{j_0}} \sin\left(\frac{mj_0\pi}{N+1}\right) \sqrt{|V(n, m)|} \times \\ &\times \sum_{(n', m') \in \Gamma} (\pm 1)^{n'} \sin\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right) \sqrt{V(n', m')} (1 + \varepsilon \sqrt{|V|} K \sqrt{V})^{-1} \xi(n', m'), \end{aligned} \quad (14)$$

откуда

$$\xi(n, m) = C (\pm 1)^n \sin\left(\frac{mj_0\pi}{N+1}\right) \sqrt{|V(n, m)|},$$

где

$$C = \frac{\varepsilon a_{j_0}^2}{\eta_{j_0}} \left((\pm 1)^n \sin\left(\frac{mj_0\pi}{N+1}\right), \sqrt{V(n, m)} (1 + \varepsilon \sqrt{|V|} K \sqrt{V})^{-1} \xi(n, m) \right)_{l^2(\Gamma)}.$$

Подставив выражение для $\xi(n, m)$ в (14), получим

$$\begin{aligned} \eta_{j_0} &= \varepsilon a_{j_0}^2 \sum_{(n', m') \in \Gamma} \sin\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right) \sqrt{V(n', m')} \times \\ &\times \left(1 + \varepsilon \sqrt{|V|} K \sqrt{V} \right)^{-1} \sin\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right) \sqrt{|V(n', m')|}. \end{aligned}$$

Правая часть полученного уравнения, очевидно, аналитически зависит от η_{j_0}, ε . В силу теоремы о неявной функции для аналитических функций (см. [5]) данное уравнение имеет единственное решение $\eta_{j_0} = \eta_{j_0}(\varepsilon)$, аналитически зависящее от ε . Разлагая $(1 + \varepsilon \sqrt{|V|} K \sqrt{V})^{-1}$ в ряд по степеням ε , получаем равенство

$$\eta_{j_0} = \varepsilon a_{j_0}^2 \sum_{(n', m') \in \Gamma} \sin^2\left(\frac{m'j_0\pi}{N+1}\right) V(n', m') + o(\varepsilon) = \varepsilon a_{j_0}^2 v + o(\varepsilon). \quad (15)$$

Вернемся к переменной λ , тогда в окрестности $\lambda_{j_0}^\pm$ при достаточно малых ε справедливо равенство:

$$\lambda = \pm 2 + 2 \cos \frac{j_0\pi}{N+1} \pm \frac{a_{j_0}^4 \varepsilon^2 v^2}{4} + O(\varepsilon^4).$$

Замечание 2. В силу равенства $\eta_{j_0} = -2i \sin k_{j_0}$ (см. (3)) бесконечно малые η_{j_0} и $-2ik_{j_0}$ эквивалентны. Вблизи границы существенного спектра $\lambda_1^+ = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{N+1}$ и $\lambda_N^- = -2 + 2 \cos \frac{N\pi}{N+1}$ экспоненциальное убывание функции из уравнения (8) обеспечивается условием (см. вид (4) функции Грина) $\operatorname{Im} k_{j_0} = \frac{\operatorname{Re} \mu_{j_0}}{2} > 0$, $j_0 = 1, \dots, N$. Поэтому, с учетом знака корня у функций $G_{01}(n-n', \mu_1)$ и $G_{01}(n-n', \mu_N)$ вблизи точек $\mu_1 = -2$ и $\mu_N = 2$ соответственно, согласно (15), получаем, что квазиуровень $k_{j_0} \approx \frac{i}{2} \eta_{j_0}$ вблизи точки -2 является собственным значением при $v < 0$, вблизи точки 2 — при $v > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mireles F., Kirczenow G. Ballistic spin-polarized transport and Rashba spin precession in semiconductor nanowires // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 64, 024426 (13 p).
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977. — 360 с.
3. Baranova L. Y., Chuburin Y. P. Quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential // J. Phys. A.: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, № 435205 (11 p).
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов — М.: Мир, 1982. — 432 с.
5. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1969. — 396 с.

Поступила в редакцию 25.04.11

T. S. Tinyukova

Quasi-levels of the discrete Schrödinger operator for a quantum waveguide

We proved that the discrete Schrödinger operator corresponding to a quantum waveguide with a small exponentially decreasing potential of the form εV has quasi-levels (eigenvalues or resonances). The asymptotic formulas for these quasi-levels are obtained.

Keywords: discrete Schrödinger equation, eigenvalue, resonance.

Mathematical Subject Classifications: 81Q10, 81Q15

Тинюкова Татьяна Сергеевна, аспирант кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет. 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: TAshih@mail.ru