Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. N. Ushakov, A. A. Zimovets, Invariance defect of sets with respect to differential inclusion, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, Issue 2, 98–111

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.237.206.68

April 26, 2023, 16:17:00

УДК 517.977.1

© В. Н. Ушаков, А. А. Зимовец

**ДЕФЕКТ ИНВАРИАНТНОСТИ МНОЖЕСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ¹**

Рассматривается дифференциальное включение, порожденное управляемой системой на конечном промежутке времени. Исследуется свойство инвариантности множеств, содержащихся в пространстве позиций системы, относительно дифференциального включения. Введено понятие дефекта инвариантности относительно дифференциального включения для множества, не обладающего свойством инвариантности. Рассмотрен пример.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, гамильтониан, инвариантность, дефект инвариантности.

Введение

Работа посвящена исследованию свойства инвариантности множеств в пространстве позиций относительно дифференциального включения. Исследование свойства инвариантности (в различных его вариантах) — одна из ключевых тем в теории управления; ей посвящено значительное число работ (см., например, [1–11]). Оно тесно связано с понятиями множеств достижимости и интегральных воронок управляемых систем и дифференциальных включений. Интегральные воронки управляемых систем, выраженные в обратном времени (рассматриваем системы на конечном промежутке времени), представляют собой множества управляемости этих систем, записанных в обратном времени. Поскольку множества управляемости слабо инвариантны относительно систем, записанных в обратном времени, то видим, что свойство инвариантности находится в тесной связи со свойством слабой инвариантности и, следовательно, — с весьма важными задачами о наведении управляемой системы на целевое множество.

Настоящая работа посвящена некоторому расширению понятия инвариантности, связанному с рассмотрением в пространстве позиций динамической системы не только инвариантных множеств, но и множеств, не обладающих свойством инвариантности. Для осуществления такого расширения оказалось удобным применение инфинитезимальных представлений свойства инвариантности; эти представления выражены в работе в виде производных множеств многозначных отображений. Суть расширения заключается в том, что для заданного замкнутого множества в пространстве позиций динамической системы вводится некоторая числовая характеристика — неотрицательная функция, заданная на границе этого множества. Эта функция оценивает степень несогласованности множества и динамики системы с точки зрения понятия инвариантности.

Работа дополняет исследования по дефекту стабильности в позиционных дифференциальных играх [12–15].

§ 1. Инвариантные множества относительно дифференциального включения

Пусть задана управляемая система на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta < \infty$)

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x[t_0] = x_0, \quad u \in P. \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 11–01–00427, программы президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики» регионального гранта РФФИ/ПСО № 07–0196085.

Здесь x — m -мерный фазовый вектор системы, u — вектор управляющих воздействий, P — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$.

Предполагается, что выполнены следующие условия

Условие 1. Функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t, x, u) , и для любой ограниченной замкнутой области $\mathcal{D} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ существует такая постоянная $L = L(\mathcal{D}) \in (0, \infty)$, что

$$\begin{aligned} \|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| &\leq L \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \\ (t, x^{(i)}, u) &\in \mathcal{D} \times P, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Условие 2. Существует такая постоянная $\mu \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leq \mu(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P. \quad (1.3)$$

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Поставим в соответствие системе (1.1) дифференциальное включение (д. в.) на $[t_0, \vartheta]$

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x[t_0] = x_0, \quad (1.4)$$

где $F(t, x) = \text{co}\{f(t, x, u) : u \in P\}$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$; $\text{co}\{f\}$ — выпуклая оболочка множества $\{f\}$.

Множества достижимости $X(t; t_0, x_0)$ системы (1.1) и $Y(t; t_0, x_0)$ д. в. (1.4), как известно, связаны соотношением

$$Y(t; t_0, x_0) = \text{cl } X(t; t_0, x_0), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (1.5)$$

где $\text{cl } X$ — замыкание множества X в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим некоторый компакт $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, для которого $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\} \neq \emptyset$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Исследуем его на предмет инвариантности относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$. Поскольку компакт W выбран достаточно произвольно, то может оказаться, что W неинвариантен относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$. В таком случае введем неотрицательную числовую характеристику, представляющую собой некоторую меру неинвариантности W относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$.

Проведем предварительные построения.

Полагаем $Z = [t_0, \vartheta] \times B(0; \gamma)$ — цилиндр в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ такой, что $W \subset Z$; здесь $B(0; \gamma) = \{b \in \mathbb{R}^m : \|b\| \leq \gamma\}$.

Погрузим Z в замкнутую область $D = \{(t, x) : t \in [t_0, \vartheta], x \in B(0; \gamma(t))\}$, $\gamma(t) = (\gamma + \mu(t - t_0))e^{\mu(t - t_0)}$. D есть интегральная воронка д. в. $\dot{x} \in U(x)$ с начальным множеством $D(t_0) = B(0; \gamma)$; здесь $U(x) = B(0; \mu(1 + \|x\|))$.

Так как по условию 2 справедливо $F(x) \subset U(x)$ при $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, то все решения $x(t)$ д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, $x(t_*) = x_* \in Z(t_*)$ удовлетворяют включению $(t, x(t)) \in D$ на $[t_*, \vartheta]$.

Поскольку $W \subset Z$, то и все решения $x(t)$ д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, $x(t_*) = x_* \in W(t_*)$, удовлетворяют включению $(t, x(t)) \in D$ на $[t_*, \vartheta]$.

Полагаем $Z(t_*, x_*)$ — интегральная воронка д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, $x(t_*) = x_*$ на $[t_*, \vartheta]$. Уточним определение множества $Z(t_*, x_*)$.

Определение 1. $Z(t_*, x_*)$ есть множество всех точек $(t^*, x^*) \in D$, $t_* \leq t^* \leq \vartheta$, для которых существуют решения $x(t)$ д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, $x(t_*) = x_*$, удовлетворяющие равенству $x(t^*) = x^*$.

Приведем определение инвариантности множества $W \subset D$ относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$.

Определение 2. Множество $\mathcal{W} \subset D$ назовем инвариантным относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, если

$$Z(t_*, x_*) \subset \mathcal{W}, \quad (t_*, x_*) \in \mathcal{W}. \quad (1.6)$$

Приведем инфинитезимальную формулировку инвариантности множества $\mathcal{W}$, предварительно введя обозначение $\vec{D}\mathcal{W}(t_*, x_*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^m : d = \lim_{k \rightarrow \infty} (t_k - t)^{-1}(w_k - x_*), \quad \{(t_k, w_k)\} \text{ — последовательность в } \mathcal{W}, \text{ где } t_k \downarrow t_* \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} w_k = x_* \right\}, \quad (t_*, x_*) \in \mathcal{W}, \quad t_* \in [t_0, \vartheta]$.

Обозначив $Z = Z(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in D$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$, получим $\vec{D}Z(t_*, x_*) = F(t_*, x_*)$.

Теперь определение 2 представим в виде

Определение 3. Множество $\mathcal{W} \subset D$ назовем инвариантным относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, если

$$\vec{D}Z(t_*, x_*) \subset \vec{D}\mathcal{W}(t_*, x_*), \quad (t_*, x_*) \in \mathcal{W}, \quad t_* \in [t_0, \vartheta]. \quad (1.7)$$

Включение (1.7) представимо в виде

$$F(t_*, x_*) \subset \vec{D}\mathcal{W}(t_*, x_*). \quad (1.8)$$

Полагаем $G = B(0; R)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в 0 и радиуса R , для которого $F(t, x) \subset G$, $(t, x) \in D$.

В случае, если $\mathcal{W}$ инвариантно относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, то из (1.8) следует

$$G \cap \vec{D}\mathcal{W}(t_*, x_*) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in \mathcal{W}, \quad t_* \in [t_0, \vartheta]. \quad (1.9)$$

§ 2. Дефект инвариантности множества относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$

В этом параграфе рассматриваем множество W из параграфа 1. Для него приведем определение дефекта инвариантности относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$.

Предполагаем, что в дополнение к условию $W(t) \neq \emptyset$, $t \in [t_0, \vartheta]$, выполнено

Условие 3. $d(W(t_*), W(t^*)) \leq R(t^* - t_*)$, $(t_*, t^*) \in \Delta$.

Здесь $d(W(t_*), W(t^*))$ — хаусдорфово расстояние между компактами W_* и W^* в $\mathbb{R}^m$, $\Delta = \{(t_*, t^*) : t_0 \leq t_* \leq t^* \leq \vartheta\} \subset [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta]$.

Считаем, не нарушая общности, что R — та же самая константа, что и в параграфе 1. Условие 3, означающее, что отображение $t \mapsto W(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ — липшицево с константой Липшица R , не слишком ограничительно для W . Из него выводится, что W удовлетворяет соотношению

$$G \cap \vec{D}W(t_*, x_*) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.1)$$

Условие (2.1) аналогично условию (1.9), которому удовлетворяет инвариантное множество $\mathcal{W}$.

Представляет интерес вопрос о том, в какой степени множество W не является инвариантным относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$. Иными словами, спрашивается: в какой степени W не удовлетворяет определению 3?

Для аккуратной формализации этого вопроса и ответа на него введем понятие дефекта инвариантности множества W относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$.

А именно, сопоставим каждой точке $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$ число

$$\varepsilon(t_*, x_*) = h(F(t_*, x_*), \vec{D}W(t_*, x_*)) \geq 0, \quad (2.2)$$

где

$$h(F(t_*, x_*), \vec{D}W(t_*, x_*)) = \max_{f \in F(t_*, x_*)} \rho(f, \vec{D}W(t_*, x_*)), \quad \rho(f, \vec{D}W(t_*, x_*)) = \min_{d \in \vec{D}W(t_*, x_*)} \|f - d\|$$

есть расстояние от f до замкнутого множества $\vec{D}W(t_*, x_*)$.

Заметим, что множество $\vec{D}W(t_*, x_*)$, входящее в выражение (2.2), далеко не для всякой точки $(t_*, x_*) \in \partial W$ является компактом в $\mathbb{R}^m$. Однако для последующих рассуждений желательно и удобно, чтобы это множество было компактом. В связи с этим мы подменим $\vec{D}W(t_*, x_*)$ более узким множеством — компактом в $\mathbb{R}^m$, сохраняя при этом значение $\varepsilon(t_*, x_*)$. А именно, введем множество (см. рис. 1)

$$\vec{D}^c W(t_*, x_*) = \vec{D}W(t_*, x_*) \cap B(0; 3R).$$

Рис. 1.

По определению числа R имеем, что $F(t_*, x_*) \subset B(0; R)$ удовлетворяет соотношению (2.1). Отсюда следует, что для любого $f \in F(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ выполняется

$$\rho(f, \vec{D}W(t_*, x_*)) \leq 2R. \quad (2.3)$$

Обозначим $\text{int } B(0; 3R)$ — внутренность шара $B(0; 3R)$ в $\mathbb{R}^m$.

Учитывая (2.3) и неравенство

$$\rho(f, \vec{D}W(t_*, x_*) \setminus \text{int } B(0; 3R)) \geq 2R,$$

получаем для любого $f \in F(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$,

$$\rho(f, \vec{D}W(t_*, x_*)) = \rho(f, \vec{D}^c W(t_*, x_*)).$$

Значит, справедливо равенство

$$h(F(t_*, x_*), \vec{D}W(t_*, x_*)) = h(F(t_*, x_*), \vec{D}^c W(t_*, x_*)); \quad (2.4)$$

здесь $h(F(t_*, x_*), \vec{D}^c W(t_*, x_*))$ — хаусдорфово отклонение компакта $F(t_*, x_*)$ от компакта $\vec{D}^c W(t_*, x_*)$.

Тем самым показали, что величину $\varepsilon(t_*, x_*)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_*, x_*) &= h(F(t_*, x_*), \vec{D}^c W(t_*, x_*)) \geq 0, \\ (t_*, x_*) &\in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Будем говорить, что в этом смысле мы компактифицировали множество $\vec{D}W(t_*, x_*)$.

Далее полагаем при $t_* \in [t_0, \vartheta]$

$$\varepsilon(t_*) = \sup_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*); \quad (2.6)$$

здесь $\Lambda(t_*) = \partial W \cap \Gamma_{t_*}$, $\Gamma_{t_*} = \{(t, x) : t = t_*\}$.

Величину $\varepsilon(t_*)$ назовем *дефектом инвариантности* множества W в момент $t_* \in [t_0, \vartheta]$ относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$. Функцию $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ доопределим значением $\varepsilon(\vartheta) = 0$. Функция $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ представляет собой некоторую характеристику неинвариантности множества W относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$.

Если оказалось, что множество W инвариантно относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, то

$$F(t_*, x_*) \subset \vec{D}^c W(t_*, x_*), \quad (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует равенство $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$, и вместе с ним равенство $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta]$. Обратно, из равенства $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta]$ следует (2.7).

Вместе с тем мы показали, что инвариантность множества W относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$ эквивалентна равенству $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta]$.

Этот факт подводит нас к предположению о том, что в случае, когда множеству W соответствует малая на промежутке $[t_0, \vartheta]$ функция $\varepsilon(t)$, это множество можно погрузить в некоторое множество $\mathcal{W}$, обладающее свойством инвариантности относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$ и не сильно отличающееся от W (в хаусдорфовой метрике).

Ниже мы приводим обоснование этого предположения при дополнительных условиях на W .

Условие 4. Существует такая функция $\varphi^*(\delta) \geq 0$ на $(0, \vartheta - t_0)$ ($\varphi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$\begin{aligned} h(x_* + \delta \vec{D}^c(t_*, x_*), W(t_* + \delta)) &\leq \delta \varphi^*(\delta), \\ (t_*, x_*) &\in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta], \quad \delta \in (0, \vartheta - t_*). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Условие 5. Функция $\varepsilon(t)$ измерима по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$.

Введем в рассмотрение множество $\mathcal{W} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$: $\mathcal{W}(t) = W(t) + B(0; \varkappa(t))$, $\varkappa(t) = \int_{t_0}^t e^{L(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau$, $t \in [t_0, \vartheta]$, где $\varkappa(t)$ — интеграл Лебега.

Здесь и выше обозначено: $x_* + \delta \vec{D}^c(t_*, x_*) = \{x_* + \delta d : d \in \vec{D}^c(t_*, x_*)\}$, $W(t) + B(0; \varkappa(t))$ — замкнутая $\varkappa(t)$ -окрестность множества $W(t)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Величину $\varepsilon_W = \varkappa(\vartheta) = \int_{t_0}^{\vartheta} e^{L(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau$ назовем дефектом инвариантности множества W .

Замечание 1. В формуле для дефекта инвариантности ε_W вместо константы Липшица L можно взять константу Липшица $L(\tau)$ ($L(\tau) \leq L$ при $\tau \in [t_0, \vartheta]$) по переменной x вектор-функции $f(t, x, u)$ в множестве $\mathcal{D}(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^m : (\tau, x) \in \mathcal{D}\}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$. Считаем при этом, что $L(\tau)$ — интегрируемая функция на $[t_0, \vartheta]$. Так что с учетом этого замечания дефект инвариантности множества W примет вид

$$\varepsilon_W = \varkappa(\vartheta) = \int_{t_0}^{\vartheta} e^{L(\tau)(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau.$$

В ряде случаев подмена в формуле для ε_W константы L функцией $L(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ значительно улучшает величину ε_W .

Сформулируем и докажем основное утверждение этой работы.

Теорема 1. Пусть замкнутое множество $W \subset D$ таково, что $W(t) \neq \emptyset$ при $t \in [t_0, \vartheta]$ и выполнены условия 3, 4, 5. Тогда $\mathcal{W}$ — инвариантное множество относительно д.в. $\dot{x} \in F(t, x)$ на $[t_0, \vartheta]$.

Доказательство. Предположим противное утверждению теоремы 1: для некоторых $(\tau_*, t^*) \in \Delta$, $(\tau_*, w_*) \in \partial W$ выполняется соотношение (см. рис. 2)

$$Y(t^*; \tau_*, w_*) \not\subset \mathcal{W}(t^*). \quad (2.9)$$

По определению пары (τ_*, t^*) следует, что $[\tau_*, t^*]$ — невырожденный отрезок, то есть $\tau_* < t^*$.

Соотношение (2.9) означает, что для некоторого решения $x(t)$ д.в. $\dot{x} \in F(t, x)$, $t \in [\tau_*, t^*]$, $x(\tau_*) = w_*$ выполняется соотношение

$$x(t^*) \notin \mathcal{W}(t^*). \quad (2.10)$$

Положив $H = \{(t, x(t)) : t \in [\tau_*, t^*]\}$, получаем, что $\mathcal{W} \cap H$ — непустой компакт в D . Множество $\Omega = \text{pr}_t(\mathcal{W} \cap H)$ — ортогональная проекция множества $\mathcal{W} \cap H$ на ось t — компакт, содержащийся в $[\tau_*, t^*]$. Учитывая (2.10), получаем $t_* = \max_{t \in \Omega} t < t^*$.

Рассмотрим отрезок $[t_*, t^*]$, для которого имеем

$$\begin{aligned} x_* &= x(t_*) \in \mathcal{W}(t_*), \\ x(t) &\notin \mathcal{W}(t), \quad t \in (t_*, t^*]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.11) и непрерывности вектор-функции $x(t)$ на $[t_*, t^*]$ следует, что точка x_* удовлетворяет включению $x_* \in \partial \mathcal{W}(t_*)$.

Итак, предположив противное утверждению теоремы 1, получаем, что найдутся такие $(t_*, t^*) \in \Delta$, $(t_*, x_*) \in \partial \mathcal{W}$, для которых

$$x(t) \notin \mathcal{W}(t), \quad t \in (t_*, t^*]. \quad (2.12)$$

Введем функцию расстояния $\rho(t) = \rho(x(t), W(t))$ от точки $x(t)$ до множества $W(t)$ на промежутке $[t_*, t^*]$. Для нее имеем в силу (2.12) $\rho(t_*) = \varkappa(t_*)$, $\rho(t) > \varkappa(t)$ при $t \in (t_*, t^*]$.

Так как отображения $t \mapsto \{x(t)\}$ и $t \mapsto W(t)$ липшицевы на $[t_*, t^*]$ (в хаусдорфовой метрике), то функция $\rho(t)$ липшицева, и, значит, существует почти всюду на $[t_*, t^*]$ производная $\dot{\rho}(t)$.

Пусть η_* — произвольная точка из (t_*, t^*) , в которой существует производная $\dot{\rho}(\eta_*)$, а y_* — ближайшая к $z_* = x(\eta_*)$ точка на множестве $W(\eta_*)$.

Так как $\eta_* \in (t_*, t^*)$ и $z_* \notin W(\eta_*)$, то $y_* \in \partial W(\eta_*)$ (см. рис. 3).

Рис. 2.

Рис. 3.

Рассмотрим точку $(\eta_*, y_*) \in \partial W$. Очевидно, что многозначное отображение $(t, x) \mapsto F(t, x)$ на выделенной нами в параграфе 1 области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ имеет ту же константу Липшица $L = L(D)$, что и вектор-функция $f(t, x, u)$:

$$\begin{aligned} d(F(t, x^{(1)}), F(t, x^{(2)})) &\leq L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \\ (t, x^{(1)}) \text{ и } (t, x^{(2)}) &\text{ из } D. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Полагаем $f_* = \dot{x}(\eta_*) \in F(\eta_*, z_*)$. Так как выполняется $d(F(\eta_*, z_*), F(\eta_*, y_*)) \leq L\|z_* - y_*\|$, то для вектора f_* найдется вектор $f \in F(\eta_*, y_*)$ такой, что

$$\|f - f_*\| \leq L\|y_* - z_*\|. \quad (2.14)$$

Согласно определению дефекта множества W в точке $(\eta_*, y_*) \in \partial W$, вектор $f \in F(\eta_*, y_*)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(f, \vec{D}^c W(\eta_*, y_*)) \leq h(F(\eta_*, y_*), \vec{D}^c W(\eta_*, y_*)) = \varepsilon(\eta_*, y_*). \quad (2.15)$$

Пусть $d \in \vec{D}^c W(\eta_*, y_*)$ — один из векторов, на которых

$$\|f - d\| \leq \varepsilon(\eta_*, y_*). \quad (2.16)$$

Так как $d \in \vec{D}^c W(\eta_*, y_*)$, то найдутся такие последовательности $\{\delta_k\}$ ($\delta_k \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$) и $\{y^*(\eta_* + \delta_k)\}$, $y^*(\eta_* + \delta_k) \in W(\eta_* + \delta_k)$, $k = 1, 2, \dots$, которые удовлетворяют равенству

$$\begin{aligned} y^*(\eta_* + \delta_k) &= y_* + \delta_k d + \delta_k \varphi^*(\delta_k), \\ k &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где функция $\varphi^*(\delta_k)$ определяется в условии 4.

Последовательность $\{\delta_k\}$ порождает последовательность $\{z_* + \delta_k f_*\}$ (см. рис. 4).

По определению вектора f_* имеем

$$x(\eta_* + \delta_k) = x(\eta_*) + \delta_k f_* + h(\delta_k), \quad (2.18)$$

где $\|h(\delta_k)\| = \omega(\delta_k)$ удовлетворяет предельному соотношению $\delta_k^{-1}\omega(\delta_k) \rightarrow 0$ при $\delta_k \downarrow 0$.

Из соотношений (2.14)–(2.18) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|x(\eta_* + \delta_k) - (z_* + \delta_k f_*)\| &\leq \omega(\delta_k), \\ \|(z_* + \delta_k f_*) - (y_* + \delta_k f)\| &\leq (1 + L\delta_k)\|z_* - y_*\|, \\ \|(y_* + \delta_k f) - (y_* + \delta_k d)\| &\leq \delta_k \varepsilon(\eta_*, y_*), \\ \|(y_* + \delta_k d) - y^*(\eta_* + \delta_k)\| &\leq \delta_k \varphi^*(\delta_k). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Суммируя неравенства (2.19), приходим к следующей оценке для функции $\rho(t)$:

$$\begin{aligned} \rho(\eta_* + \delta_k) &= \rho(x(\eta_* + \delta_k), W(\eta_* + \delta_k)) \\ &\leq \|x(\eta_* + \delta_k) - y^*(\eta_* + \delta_k)\| \\ &\leq \omega(\delta_k) + (1 + \delta_k L)\|z_* - y_*\| + \delta_k \varepsilon(\eta_*) + \delta_k \varphi^*(\delta_k), \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Принимая во внимание (2.20) и равенство $\rho(\eta_*) = \|z_* - y_*\|$, получаем

$$\begin{aligned} \delta_k^{-1}(\rho(\eta_* + \delta_k) - \rho(\eta_*)) &\leq L\rho(\eta_*) + \varepsilon(\eta_*) + \delta_k^{-1}\omega(\delta_k) + \varphi^*(\delta_k), \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Рис. 4.

Из этого неравенства вытекает, что для любой точки $\eta_* \in (t_*, t^*)$, в которой существует производная $\dot{\rho}(\eta_*)$ функции $\rho(t)$, справедлива оценка

$$\dot{\rho}(\eta_*) \leq L\rho(\eta_*) + \varepsilon(\eta_*). \quad (2.21)$$

Из оценки (2.21), имеющей место при почти всех $\eta_* \in [t_*, t^*]$, вытекает неравенство

$$\rho(t) \leq e^{L(t-t_*)}\rho(t_*) + \int_{t_*}^t e^{L(t-\tau)}\varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in [t_*, t^*]. \quad (2.22)$$

Подставив в (2.22) величину $\rho(t_*) = \varkappa(t_*) = \int_{t_0}^{t_*} e^{L(t_*-\tau)}\varepsilon(\tau) d\tau$, получаем, что $\rho(t) \leq \varkappa(t)$ при $t \in [t_*, t^*]$. Это неравенство противоречит неравенству $\rho(t) > \varkappa(t)$, $t \in (t_*, t^*]$, вытекающему из предположения от противного.

Теорема 1 доказана. $\square$

§ 3. Примеры множеств W , удовлетворяющих условиям 3, 4, 5

Пусть в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ задан компакт

$$W = \{(t, x) \in D: \varphi(t, x) \leq 0\}, \quad (3.1)$$

где функция $\varphi(t, x)$ определена и непрерывна вместе с производными $\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$ на $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$. Предполагаем, что $W \subset \text{int } D$ и выполняется

$$\begin{aligned} h(t_*, x_*) &= \text{grad}_x \varphi(t_*, x_*) \neq 0, \\ (t_*, x_*) &\in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $\text{grad}_x \varphi(t_*, x_*) = \left(\frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial x_m} \right)$, $\partial W = \{(t_*, x_*) \in D : \varphi(t_*, x_*) = 0\}$.

В работе [15] было установлено, что множество W при таких условиях удовлетворяет условиям 3, 4.

Докажем выполнение в рассматриваемом случае условия 5, налагаемого на функцию $\varepsilon(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Выпишем аналитическое выражение для функции $\varepsilon(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$.

Учитывая, что множество W имеет гладкую границу ∂W , получаем, что $\overrightarrow{DW}(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in \partial W$ есть замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^m$:

$$\overrightarrow{DW}(t_*, x_*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^m : \langle h(t_*, x_*), d \rangle \leq -\frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \right\}.$$

Граница $\Gamma_* = \partial \overrightarrow{DW}(t_*, x_*)$ множества $\overrightarrow{DW}(t_*, x_*)$ имеет вид

$$\Gamma_* = \left\{ d \in \mathbb{R}^m : \langle h(t_*, x_*), d \rangle = -\frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \right\}.$$

Γ_* есть гиперплоскость в $\mathbb{R}^m$ с вектором нормали $h(t_*, x_*)$.

Принимая во внимание, что $\overrightarrow{DW}(t_*, x_*)$ имеет хорошую геометрическую структуру, воспользуемся в формуле для $\varepsilon(t_*, x_*)$ представлением через $\overrightarrow{DW}(t_*, x_*)$, а не через $\overrightarrow{D^cW}(t_*, x_*)$:

$$\varepsilon(t_*, x_*) = h(F(t_*, x_*), \overrightarrow{DW}(t_*, x_*)). \quad (3.3)$$

Для каждой точки $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$ возможны два случая: 1. $\varepsilon(t_*, x_*) > 0$; 2. $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$.

Допустим, что реализовался случай 1. Это означает, что $F(t_*, x_*) \notin \overrightarrow{DW}(t_*, x_*)$. При этом возможны два варианта взаимного расположения $F(t_*, x_*)$ и $\overrightarrow{DW}(t_*, x_*)$ (см. рис. 5)

В любом из этих вариантов справедливо равенство

$$\varepsilon(t_*, x_*) = h_{F(t_*, x_*)}(l_*) - h_{\overrightarrow{DW}(t_*, x_*)}(l_*);$$

здесь $l_* = \|h(t_*, x_*)\|^{-1} h(t_*, x_*)$ — единичный вектор в $\mathbb{R}^m$; $h_\Phi(l) = \sup_{f \in \Phi} \langle l, f \rangle$, $l \in \mathbb{R}^m$ — опорная функция выпуклого и замкнутого множества Φ в $\mathbb{R}^m$.

Тогда, согласно определению $F(t_*, x_*)$ и $\overrightarrow{DW}(t_*, x_*)$, имеем

$$\varepsilon(t_*, x_*) = H(t_*, x_*, l_*) + \|h(t_*, x_*)\|^{-1} \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t},$$

где $H(t_*, x_*, l_*) = \max_{u \in P} \langle l_*, f(t_*, x_*, u) \rangle$ — гамильтониан управляемой системы (1.1), порождающей д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$. Таким образом, случай 1 характеризуется неравенством

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left\{ H(t_*, x_*, h(t_*, x_*)) + \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \right\} > 0. \quad (3.4)$$

В случае 2 выполняется включение $F(t_*, x_*) \subset \overrightarrow{DW}(t_*, x_*)$, которое эквивалентно соотношению

$$\|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left\{ H(t_*, x_*, h(t_*, x_*)) + \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \right\} \leq 0. \quad (3.5)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\gamma(t_*, x_*) = \|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left\{ H(t_*, x_*, h(t_*, x_*)) + \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \right\}.$$

Рис. 5.

В итоге получаем, что в рассматриваемом примере дефект инвариантности множества W в точке $(t_*, x_*) \in \partial W$ относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$ определяется равенством

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \max\{0, \gamma(t_*, x_*)\}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что при $t_* \in [t_0, \vartheta)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_*) &= \max_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*) = \max\{0, \gamma(t_*)\}, \\ \gamma(t_*) &= \max_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} \gamma(t_*, x_*). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Принимая во внимание условия, наложенные на функцию $\gamma(t, x)$, получаем, что функция $\gamma(t_*, x_*)$ непрерывна на ∂W . Кроме того, множество $\Lambda(t_*)$ непрерывно зависит в хаусдорфовой метрике от t_* на $[t_0, \vartheta)$. Поэтому функция $\gamma(t)$, а значит, и функция $\varepsilon(t)$ непрерывны на $[t_0, \vartheta)$. Следовательно, выполняется условие 5 в рассматриваемом случае.

Проиллюстрируем изложенную выше теорию на следующем примере управляемой системы на плоскости.

Управляемая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.25x_2 + 0.5u_1 + \varepsilon \frac{x_1}{\|x\|} |\sin 5t| \sin x_1 \sin x_2, \\ \dot{x}_2 = 0.25x_1 + 0.5u_2 + \varepsilon \frac{x_2}{\|x\|} |\sin 5t| \sin x_1 \sin x_2, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$u \in P = \{u = (u_1, u_2): \|u\| \leq 1\};$$

здесь $[t_0, \vartheta] = [0, 10]$, $\varepsilon = 0.2$.

Наряду с системой (3.8) рассмотрим на промежутке $[0, 10]$ огрубленную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.25x_2 + 0.5u_1, \\ \dot{x}_2 = 0.25x_1 + 0.5u_2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Нас интересуют интегральные воронки $Z = Z(t_0, X_0)$ и $W = Z(t_0, X_0)$ систем (3.8) и (3.9) соответственно на промежутке $[0, 10]$ с начальным множеством $X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| \leq 1\}$.

Нас интересует вопрос о том, насколько сильно может выступать интегральная воронка Z за пределы интегральной воронки W . Иными словами, спрашивается, насколько велико значение $h(Z(t), W(t))$ на $[t_0, \vartheta] = [0, 10]$?

Здесь $Z(t)$ и $W(t)$ — сечения (множества в $\mathbb{R}^2$) интегральных воронок Z и W в момент $t \in [0, 10]$, $h(Z(t), W(t))$ — хаусдорфово отклонение множества $Z(t)$ от $W(t)$.

Очевидно, что множество $W \subset [0, 10] \times \mathbb{R}^2$ описывается неравенством

$$W = \{(t, x) \in [0, 10] \times \mathbb{R}^2: \varphi(t, x) \leq 0\},$$

где $\varphi(t, x) = \|x\| - \frac{1}{2}t - 1$, $(t, x) \in \mathbb{R}^3$.

Для получения оценки сверху величины $h(Z(t), W(t))$ вычислим величину $\varkappa(t)$ на $[0, 10]$. Для этого вычислим сначала $\varepsilon(t, x)$ в точках (t, x) множества $\partial W = \{(t, x) \in [0, 10] \times \mathbb{R}^2: \varphi(t, x) = 0\}$.

Для функции $\varphi(t, x)$ имеем при $\|x\| \neq 0$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\|x\|}, \quad \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\|x\|}, \quad \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = -\frac{1}{2},$$

так что $h(t, x) = \|x\|^{-1}x$ и $\|h(t, x)\| = 1$ для точек $(t, x) \in \partial W$, при этом $\vec{D}W(t, x) = \{d \in \mathbb{R}^2: \langle h(t, x), d \rangle \leq -\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t}\}$.

Учитывая эти соотношения, получаем

$$\varepsilon(t, x) = H(t, x, h(t, x)) + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t}$$

в тех точках $(t, x) \in \partial W$, в которых $H(t, x, h(t, x)) + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} > 0$; здесь $H(t, x, h(t, x)) = \max_{u \in P} \langle h(t, x), f(t, x, u) \rangle = \frac{1}{2} + \varepsilon |\sin 5t| \sin x_1 \sin x_2$, вектор-функция $f(t, x, u)$ — правая часть системы (3.8).

В тех точках $(t, x) \in \partial W$, в которых $H(t, x, h(t, x)) + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \leq 0$, полагаем $\varepsilon(t, x) = 0$.

Таким образом, справедливо представление

$$\varepsilon(t, x) = \max \left(0, H(t, x, h(t, x)) + \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right) = \max(0, \varepsilon |\sin 5t| \sin x_1 \sin x_2).$$

Введя обозначения $\gamma(t, x) = \varepsilon |\sin 5t| \sin x_1 \sin x_2$ и $\gamma(t) = \max_{(t, x) \in \Lambda(t)} \gamma(t, x)$, где $\Lambda(t) = \{(t, x): \varphi(t, x) = 0\}$, $t \in [0, 10]$, получаем

$$\varepsilon(t) = \max(0, \gamma(t)), \quad t \in [0, 10]$$

и функцию

$$\varkappa(t) = \int_0^t e^{L(\tau)(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 10]. \quad (3.10)$$

Этот интеграл мы вычисляем приближенно. На рисунках 6 и 7 представлены графики функций $\varepsilon(t)$ и $\varkappa(t)$ на $[0, 10]$.

Согласно теории имеем $Z(t) \subset W(t) + B(0; \varkappa(t))$, $t \in [0, 10]$, то есть $h(Z(t), W(t)) \leq \varkappa(t)$ на $[0, 10]$.

Рис. 6.

Рис. 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the set-valued calculus in problems of viability and control for dynamic processes: the evolution equation // Les Annales de l'Institut Henry Poincaré. Analyse non-lineaire. — 1989. — P. 339–363.
2. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. Perturbation techniques for viability and control // Lect. Notes in Control, Inform. Sci. — 1992. — Vol. 180. — P. 394–403.
3. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the Theory of Trajectory Tubes — A Mathematical Formalism for Uncertain Dynamics, Viability and Control // The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences. — June 15, 1993. — P. 1–67.
4. Filippova T.F. A Note on the Evolution Property of the Assembly of Viable Solutions to a Differential Inclusion // Computers Math. Applic. — 1993. — Vol. 25. — P. 115–121.
5. Aubin J-P., Frankowska H. The Viability Kernel Algorithm for Computing Value Functions of Infinite Horizon Optimal Control Problems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 15 July 1996. — Vol. 201, № 8. — P. 555–576.
6. Тонков Е. Л., Панасенко Е. А. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 859–860.
7. Тонков Е. Л., Панасенко Е. А. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова — 2008. — Т. 262. — С. 202–221.

8. Quincampoix M., Buckdahn R., Rainer C. and Teichman J. Another proof for the equivalence between invariance of closed sets with respect to stochastic and deterministic systems // Bulletin des Sciences Mathematiques. — 2010. — Vol. 134. — P. 207–214.
9. Subbotina N. N., Ushakov V. N. On characteristic differential inclusions to unified differential games // Proceedings of the IX-th International Symposium on Dynamic Games and Applications (December, 18–21, 2000) Australia, Adelaide, University of South Australia. — P. 464–467.
10. Ушаков В. Н., Заварин А. Б. О выделении ядра выживаемости для дифференциального включения // Прикл. математика и механика. — 2001. — Т. 65. Вып. 5. — С. 831–842.
11. Ушаков В. Н., Незнахин А. А. Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Журн. выч. мат. и мат. физики. — 2001. — Т. 41. Вып. 6. — С. 895–908.
12. Ушаков В. Н., Латушкин Я. А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 2. — С. 178–194.
13. Ushakov V. N., Brykalov S. A., Latushkin Y. A. Stable and unstable sets in problems of conflict control // Functional Differential Equations. — 2008. — Vol. 15, № 3–4. — P. 309–338.
14. Ушаков В. Н., Матвийчук А. Р., Лебедев П. Д. Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные Науки. — 2010. — Вып. 3. — С. 87–103.
15. Ушаков В. Н., Малёв А. Г. К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 1. — С. 199–222.

Поступила в редакцию 24.05.11

V. N. Ushakov, A. A. Zimovets

Invariance defect of sets with respect to differential inclusion

A differential inclusion generated by a control system on a finite time interval is considered. The invariance of sets with respect to differential inclusion is investigated. The invariance defect of non-invariant sets with respect to differential inclusion is introduced. An example is presented.

Keywords: control system, differential inclusion, Hamiltonian, invariance, invariance defect.

Mathematical Subject Classifications: 37C99

Ушаков Владимир Николаевич, чл-корр. РАН, д.ф.-м.н., зав. отделом динамических систем, ИММ УрО РАН. 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

E-mail: ushak@imm.uran.ru,

Зимовец Артем Анатольевич, аспирант кафедры автоматизации и информационных технологий УрФУ. 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.

E-mail: aazimovets@gmail.com