Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. I. Rodionov, On a family of analogs of the Perron–Stieltjes integral, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, Issue 3, 95–106

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.80.73.141

April 26, 2023, 16:28:41

УДК 517.5

© В. И. Родионов

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ АНАЛОГОВ ИНТЕГРАЛА ПЕРРОНА–СТИЛТЬЕСА

Для двух прерывистых функций, заданных на отрезке, и специального параметра, названного дефектом, определяется понятие квазиинтеграла. Если существует интеграл Римана–Стилтьеса, то для любого дефекта существует квазиинтеграл, и все они равны между собой. Интеграл Перрона–Стилтьеса, если он существует, совпадает с одним из квазиинтегралов, где дефект определен специальным образом. Приведены необходимые и достаточные условия существования квазиинтегралов, доказаны их основные свойства, в частности, аналог формулы интегрирования по частям.

Ключевые слова: прерывистая функция, интеграл Римана–Стилтьеса, интеграл Перрона–Стилтьеса.

§ 1. Основные обозначения и терминология

Зафиксируем отрезок $K \doteq [a, b]$ и через $G \doteq G(K) \doteq G[a, b]$ обозначим пространство *прерывистых* (см. [1, 2]) функций, то есть функций $x : K \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих конечными пределами $x(t-0) \doteq \lim_{\tau \rightarrow t-0} x(\tau)$ при всех $t \in (a, b]$ и $x(t+0) \doteq \lim_{\tau \rightarrow t+0} x(\tau)$ при всех $t \in [a, b)$.

Пространство G банахово по норме $\|x\| \doteq \sup_{t \in K} |x(t)|$ (более того, G является банаховой алгеброй) и является замыканием пространства ступенчатых функций по $\sup$ -норме.

В соответствии с [2] конечное или счетное множество $T \doteq \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ попарно различных точек $\tau_k \in K$ называем *разбиением* отрезка K , а совокупность всех разбиений K обозначаем через $\mathbb{T}(K)$. Пустое множество мы также включаем в $\mathbb{T}(K)$, — оно является наименьшим элементом частичного порядка на $\mathbb{T}(K)$, заданного естественным образом: полагаем, что разбиение T предшествует разбиению S , если $T \subseteq S$.

Разбиения T и S называем *эквивалентными* ($T \sim S$), если их симметрическая разность конечна, то есть $\text{card}(T \Delta S) < \infty$. Все конечные разбиения эквивалентны между собой.

Согласно [1] множество $T(x)$, состоящее из всех точек разрыва произвольной прерывистой функции $x \in G(K)$, не более чем счетно. Другими словами, $T(x) \in \mathbb{T}(K)$ для всех $x \in G(K)$.

Для фиксированных $x \in G$ и $T \in \mathbb{T}(K)$ используем обозначения:

$$x_k^- \doteq x(\tau_k), \quad x_k^- \doteq x(\tau_k - 0) - x(\tau_k), \quad x_k^+ \doteq x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) \quad \forall \tau_k \in T.$$

(Пологаем $x_k^- = 0$, если $a = \tau_k$ для некоторого k , и $x_k^+ = 0$, если $b = \tau_k$ для некоторого k .) В соответствии с [2] через $[x]_T$ обозначаем ряд $[x]_T \doteq \sum_{\tau_k \in T} (|x_k^-| + |x_k^+|)$ (и его сумму, если

ряд сходится), а через $G^T \doteq G^T[a, b]$ обозначаем совокупность всех тех $x \in G$, для которых ряд $[x]_T$ сходится. Поскольку T — не более чем счетное множество, то ряд $[x]_T$ трактуется естественным образом: $|x_1^-| + |x_1^+| + |x_2^-| + |x_2^+| + \dots$. Относительно естественных операций сложения и умножения совокупность G^T является алгеброй над полем $\mathbb{R}$.

Пространство $\Gamma \doteq \Gamma[a, b]$ состоит из таких функций $x \in G$, что ряд $[x]_{T(x)}$ сходится [2]. Имеет место равенство $\Gamma = \bigcap_{T \in \mathbb{T}(K)} G^T$.

Функция Хевисайда $\theta(t) \doteq \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, и произвольная точка $\tau \in K$ порождают ступенчатые функции $\xi_\tau(t) \doteq -\theta(\tau - t)$ и $\eta_\tau(t) \doteq \theta(t - \tau)$. В работе используются следующие обозначения: если $\tau = \tau_k \in T$, то $\xi_k(\cdot) \doteq \xi_{\tau_k}(\cdot)$ и $\eta_k(\cdot) \doteq \eta_{\tau_k}(\cdot)$. Другими словами,

$$\xi_k(t) = \begin{cases} -1, & t < \tau_k \\ 0, & t \geq \tau_k \end{cases}, \quad \eta_k(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau_k \\ 1, & t > \tau_k \end{cases}, \quad t \in K, \quad \forall \tau_k \in T.$$

Для любых $x \in G^T$ и $\alpha \in K$ функциональный ряд

$$x_T(t) \doteq x_T(t, \alpha) \doteq - \sum_{\tau_k \in T} x_k^- \int_{\alpha}^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x_k^+ \int_{\alpha}^t d\eta_k \quad (1.1)$$

абсолютно и равномерно на K сходится (см. [2]). Сумму ряда обозначаем так же, как и сам ряд, — через $x_T(t)$. В случае $T = \emptyset$ полагаем $x_T(t) \equiv 0$. В соответствии с [3, с. 336] функции вида (1.1) называем *функциями скачков*. Там же отмечается, что $x_T \in BV$ — функция ограниченной вариации и $\text{Var } x_T = [x]_T$. Здесь и в дальнейшем через $\text{Var } y$ обозначаем полную вариацию функции y на отрезке K . Наряду с (1.1) определена функция $x^T(t) \doteq x^T(t, \alpha) \doteq x(t) - x_T(t)$.

В работе [2] определены пространства: G_L — подпространство в G , состоящее из тех функций, что $x(t-0) = x(t)$ при $t \in (a, b]$ и $x(a+0) = x(a)$; симметричное подпространство G_R состоит из тех функций, что $x(t+0) = x(t)$ при $t \in [a, b)$ и $x(b-0) = x(b)$.

§ 2. Квазиинтеграл Римана–Стилтьеса в пространстве прерывистых функций

Через Ω обозначим пространство функций $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(0) = 0$. Пару функций $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$ будем называть *дефектом*, а Ω^2 — *пространством дефектов*.

Для $\varphi \in \Omega$ через φ^* обозначим функцию $\varphi^*(h) \doteq h - \varphi(h)$. Очевидно, $\varphi^*(0) = 0$, $\varphi^* \in \Omega$ и $\varphi^{**} = \varphi$. Дефект $\Delta^* \doteq (\varphi^*, \psi^*)$ будем называть *двойственным* к дефекту $\Delta \doteq (\varphi, \psi)$.

Подпространство $\Omega_c \doteq \{\varphi \in \Omega \mid \varphi(h) = O(h) \text{ при } h \rightarrow 0\}$ состоит из тех функций $\varphi \in \Omega$, для которых существуют $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что $|\varphi(h)| \leq C|h|$ при $|h| \leq \delta$. Очевидно, включение $\varphi \in \Omega_c$ влечет включение $\varphi^* \in \Omega_c$, и следовательно, пара двойственных дефектов $\Delta \doteq (\varphi, \psi)$ и $\Delta^* \doteq (\varphi^*, \psi^*)$ принадлежит или не принадлежит Ω_c^2 одновременно.

Подпространство $\Omega_\ell \doteq \{\varphi \in \Omega \mid \varphi(h) = \mu h\}$ состоит из линейных функций. Очевидно, если $\varphi \in \Omega_\ell$, то $\varphi^* \in \Omega_\ell$, и следовательно, двойственная пара $\Delta \doteq (\varphi, \psi)$ и $\Delta^* \doteq (\varphi^*, \psi^*)$ принадлежит или не принадлежит Ω_ℓ^2 одновременно.

Зафиксируем $x, y \in G$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$. Через $\mathbb{T}(x\Delta y)$ обозначим множество всех таких разбиений $T \in \mathbb{T}(K)$, что

- 1) $y \in G^T$;
- 2) существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$;
- 3) абсолютно сходится ряд $\sigma^T(x\Delta y) \doteq - \sum_{\tau_k \in T} \Phi_k + \sum_{\tau_k \in T} \Psi_k$, где

$$\Phi_k \doteq \begin{vmatrix} x_k & -\varphi(y_k^-) \\ x_k^- & y_k^- \end{vmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k \quad \text{и} \quad \Psi_k \doteq \begin{vmatrix} x_k & -\psi(y_k^+) \\ x_k^+ & y_k^+ \end{vmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k.$$

Ряд $\sigma^T(x\Delta y)$ и его сумму (если она существует) мы обозначаем одним и тем же символом. В тех случаях, когда есть необходимость указания зависимости введенных объектов от α и β , будем писать: $\Phi_k^{\alpha, \beta}$, $\Psi_k^{\alpha, \beta}$, $\sigma_{\alpha, \beta}^T(x\Delta y)$ и $\mathbb{T}_{\alpha, \beta}(x\Delta y)$. Из свойств определителя справедливо

$$\Phi_k = \begin{vmatrix} x(\tau_k) & -\varphi(y_k^-) \\ x(\tau_k-) & \varphi^*(y_k^-) \end{vmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k \quad \text{и} \quad \Psi_k = \begin{vmatrix} x(\tau_k) & -\psi(y_k^+) \\ x(\tau_k+) & \psi^*(y_k^+) \end{vmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k.$$

Теорема 1. Пусть $x, y \in G$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$. Множество $\mathbb{T}(x\Delta y)$ не пусто тогда и только тогда, когда оно содержит разбиение $T(x) \cap T(y)$.

Доказательство. Если $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \emptyset$, то для некоторого разбиения T выполнены три условия: $y \in G^T$, существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$ и абсолютно сходится ряд $\sigma^T(x\Delta y)$.

1. Обозначим $S \doteq T(x) \cap T(y)$ и покажем, что $S \subseteq T$. Предположим, что это не так, то есть существует $\tau_m \in S$ такое, что $\tau_m \notin T$. Обе функции x и y разрывны в точке τ_m , следовательно, поскольку существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$, то y^T непрерывна в точке τ_m . Это означает, что

правая часть формулы $y(t) = y^T(t) - \sum_{\tau_k \in T} y_k^- \int_{\alpha}^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} y_k^+ \int_{\alpha}^t d\eta_k$ также непрерывна в точке $\tau_m \notin T$, что противоречит разрывности функции y в этой точке.

2. Итак, $S \subseteq T$ и, следовательно, $y \in G^S$ (см. [2], лемма 5). Таким образом, определена функция y^S и справедливо равенство

$$y^S(t) = y^T(t) - \sum_{\tau_k \in R} y_k^- \int_{\alpha}^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in R} y_k^+ \int_{\alpha}^t d\eta_k, \quad (2.1)$$

где $R \doteq T \setminus S$. В каждой точке $\tau_k \in R$ одна из функций x или y непрерывна, следовательно, x непрерывна во всех точках $\tau_k \in Q$, где через Q обозначено множество тех $\tau_k \in R$, в которых y разрывна. Очевидно, $y_k^- = y_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in R \setminus Q$, поэтому

$$y^S(t) = y^T(t) - \sum_{\tau_k \in Q} y_k^- \int_{\alpha}^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in Q} y_k^+ \int_{\alpha}^t d\eta_k. \quad (2.2)$$

В соответствии с леммой 7 [2] существует интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(s) d \left[- \sum_{\tau_k \in Q} y_k^- \int_{\alpha}^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in Q} y_k^+ \int_{\alpha}^t d\eta_k \right], \quad (2.3)$$

а поскольку существует $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$, то существует $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^S$. Наконец, абсолютная сходимость ряда $\sigma^S(x\Delta y)$ следует из оценки $\sum_{\tau_k \in S} (|\Phi_k| + |\Psi_k|) \leq \sum_{\tau_k \in T} (|\Phi_k| + |\Psi_k|) < \infty$. Таким образом, $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. Обратное утверждение тривиально.

Замечание 1. На первом этапе доказательства теоремы 1 мы доказали, что в том случае, когда $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \emptyset$, для любого $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ справедливо включение $T(x) \cap T(y) \subseteq T$. Дословно повторив выкладки второго этапа, легко убедиться в истинности следующего утверждения: если $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \emptyset$, $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и $T(x) \cap T(y) \subseteq S \subseteq T$, то $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Лемма 1. Пусть $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \emptyset$ и $Q, R \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. Для разбиений $U \doteq Q \cup R$ и $V \doteq Q \cap R$ имеют место включения $U, V \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Доказательство. Включение $V \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ следует из замечания 1. В силу леммы 5 [2] справедливо $G^U = G^Q \cap G^R$, поэтому $y \in G^U$. Очевидное равенство $y^Q + y^R = y^U + y^V$ и существование интегралов $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^Q$, $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^R$ и $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^V$ влекут существование $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^U$. Наконец, равенство $\sigma^Q(x\Delta y) + \sigma^R(x\Delta y) = \sigma^U(x\Delta y) + \sigma^V(x\Delta y)$ и абсолютная сходимость рядов $\sigma^Q(x\Delta y)$, $\sigma^R(x\Delta y)$ и $\sigma^V(x\Delta y)$ влекут абсолютную сходимость ряда $\sigma^U(x\Delta y)$. $\square$

Итак, если множество $\mathbb{T}(x\Delta y)$ не пусто, то оно является подрешеткой решетки $\mathbb{T}(K)$, причем наименьшим элементом решетки $\mathbb{T}(x\Delta y)$ является разбиение $T(x) \cap T(y)$. Следует иметь в виду следующее обстоятельство: если $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и $S \subset T$, то T может оказаться вне множества $\mathbb{T}(x\Delta y)$. Покажем это на примере.

Пример 1. Пусть $K \doteq [0, 1]$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $x(t) = 0$ при $t \leq \frac{1}{2}$ и $x(t) = 1$ при $t > \frac{1}{2}$, $y(t) = t \{\frac{1}{t}\}$ при $t \neq 0$ и $y(0) = 0$ (функция y здесь такая же, как функция x в примере 1 [2]). Поскольку множество $S \doteq T(x) \cap T(y) = \{\frac{1}{2}\}$ конечно, то $y \in G^S (= G)$ и $y^S(t) = y(t)$ при $t \leq \frac{1}{2}$ и $y^S(t) = \frac{1}{2} - t$ при $t \geq \frac{1}{2}$. Функция y^S , как и должно быть, непрерывна в точке $\frac{1}{2}$, следовательно, существует интеграл $\int_0^1 x dy^S = \int_{1/2}^1 d(\frac{1}{2} - t) = -\frac{1}{2}$. Ряд $\sigma^S(x\Delta y)$ вырождается в одно слагаемое, поэтому $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. Если $T \doteq \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, то $S \subset T$, однако, $y \notin G^T$ (см. пример 1 [2]), следовательно, $T \notin \mathbb{T}(x\Delta y)$. Ситуацию проясняет следующая

Лемма 2. Пусть $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \emptyset$, $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$, $T \in \mathbb{T}(K)$, $S \subseteq T$. Включение $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ имеет место тогда и только тогда, когда $y \in G^T$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть $y \in G^T$. Поскольку $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$, то $T(x) \cap T(y) \subseteq S$ и $y \in G^S$, поэтому справедливо равенство (2.1) и остальные выкладки второго этапа доказательства теоремы 1, в силу которых существование интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^S$ влечет существование интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$. Осталось показать абсолютную сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$. Пусть $R \doteq T \setminus S$, а Q состоит из тех точек $\tau_k \in R$, в которых y разрывна. Поскольку $y_k^- = y_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in R \setminus Q$, то $\varphi(y_k^-) = \psi(y_k^+) = 0$ и $\Phi_k = \Psi_k = 0$, поэтому $\sigma^R(x\Delta y) \doteq - \sum_{\tau_k \in R} \Phi_k + \sum_{\tau_k \in R} \Psi_k = - \sum_{\tau_k \in Q} \Phi_k + \sum_{\tau_k \in Q} \Psi_k$, а поскольку x непрерывна во всех точках $\tau_k \in Q$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$, $\Phi_k = x_k y_k^- \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k$ и $\Psi_k = x_k y_k^+ \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k$, поэтому

$$\sum_{\tau_k \in R} (|\Phi_k| + |\Psi_k|) \leq \|x\| \sum_{\tau_k \in Q} (|y_k^-| + |y_k^+|) \leq \|x\| \sum_{\tau_k \in T} (|y_k^-| + |y_k^+|) < \infty.$$

В силу равенства $\sigma^T(x\Delta y) = \sigma^S(x\Delta y) + \sigma^R(x\Delta y)$ абсолютная сходимость рядов $\sigma^S(x\Delta y)$ и $\sigma^R(x\Delta y)$ влечет абсолютную сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$. Таким образом, $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Следствие 1. Пусть $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \emptyset$. Эквивалентные разбиения S и T , содержащие разбиение $T(x) \cap T(y)$, принадлежат или не принадлежат множеству $\mathbb{T}(x\Delta y)$ одновременно.

Если $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и $R \doteq S \cap T$, то в соответствии с замечанием 1 имеем $R \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. Поскольку $T \sim S$, то $G^T = G^S$ (см. [2], лемма 5) и $y \in G^T$, а поскольку $R \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и $R \subseteq T$, то в силу леммы 2 справедливо включение $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Теорема 2. Пусть $x, y \in G$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$. Если $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \emptyset$, то при всех $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ справедливо тождество $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T + \sigma^T(x\Delta y) \equiv \text{const}$.

Доказательство. Пусть $S \doteq T(x) \cap T(y)$. В соответствии с формулами (2.2) и (2.3) справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} x dy^S - \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T &= \int_{\alpha}^{\beta} x(s) d \left[- \sum_{\tau_k \in Q} y_k^- \int_{\alpha}^s d\xi_k + \sum_{\tau_k \in Q} y_k^+ \int_{\alpha}^s d\eta_k \right] = \\ &= - \sum_{\tau_k \in Q} x(\tau_k) y_k^- \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in Q} x(\tau_k) y_k^+ \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k, \end{aligned} \quad (2.4)$$

заканчивающаяся ссылкой на лемму 7 [2]. В частности, правая часть цепочки (2.4) есть абсолютно сходящийся ряд. Напомним (см. второй пункт доказательства теоремы 1), что через Q обозначено множество тех $\tau_k \in R \doteq T \setminus S$, в которых y разрывна. Поскольку $y_k^- = y_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in R \setminus Q$, то $\varphi(y_k^-) = \psi(y_k^+) = 0$ и $\Phi_k = \Psi_k = 0$, поэтому $\sigma^R(x\Delta y) \doteq - \sum_{\tau_k \in R} \Phi_k + \sum_{\tau_k \in R} \Psi_k = - \sum_{\tau_k \in Q} \Phi_k + \sum_{\tau_k \in Q} \Psi_k$, а поскольку x непрерывна во всех точках $\tau_k \in Q$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$ и

$$\sigma^R(x\Delta y) = - \sum_{\tau_k \in Q} x_k y_k^- \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in Q} x_k y_k^+ \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k.$$

В силу (2.4) имеет место равенство $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^S - \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T = \sigma^R(x\Delta y)$, а поскольку $\sigma^T(x\Delta y) = \sigma^S(x\Delta y) + \sigma^R(x\Delta y)$, то $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T + \sigma^T(x\Delta y) = \int_{\alpha}^{\beta} x dy^S + \sigma^S(x\Delta y)$.

Определение 1. Будем говорить, что число $J \in \mathbb{R}$ есть *квазиинтеграл* функции $x \in G$ по функции $y \in G$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ относительно дефекта $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$ и обозначать

$$J \doteq \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y \quad \text{или} \quad J \doteq \int_{\alpha}^{\beta} x(s) \Delta y(s),$$

если $\mathbb{T}(x \Delta y) \neq \emptyset$ и существует разбиение $T \in \mathbb{T}(x \Delta y)$ такое, что $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T + \sigma^T(x \Delta y) = J$.

В силу теоремы 2 квазиинтеграл не зависит от выбора T , важно только, чтобы такое разбиение нашлось, — тем самым определение 1 корректно. Следует также отметить, что в обозначении квазиинтеграла $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$ вместо привычного знака дифференциала d стоит дефект Δ , выполняющий не только роль разделителя функций x и y , но и явно подчеркивающий зависимость квазиинтеграла от дефекта. Итак, величина

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y &\doteq \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T + \sigma^T(x \Delta y) = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T - \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} x_k & -\varphi(y_k^-) \\ x_k^- & y_k^- \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} x_k & -\psi(y_k^+) \\ x_k^+ & y_k^+ \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k \end{aligned} \quad (2.5)$$

называется *квазиинтегралом Римана–Стилтьеса дефекта Δ* или просто *квазиинтегралом*.

Ряд $\sigma^T(x \Delta y)$ иногда бывает удобно писать в более симметричном виде

$$- \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} x(\tau_k) & -\varphi(y_k^-) \\ x(\tau_k-) & \varphi^*(y_k^-) \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} x(\tau_k) & -\psi(y_k^+) \\ x(\tau_k+) & \psi^*(y_k^+) \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k.$$

§ 3. Необходимые и достаточные условия существования квазиинтегралов

Теорема 3. Пусть $x, y \in G$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$, $T \doteq T(x) \cap T(y)$.

1. Если $\text{card } T < \infty$, то квазиинтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$ и интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$ существуют или нет одновременно.

2. Если $\Delta \in \Omega_c^2$ и $y \in G^T$ (или $y \in \Gamma$), то квазиинтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$ и интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$ существуют или нет одновременно.

3. Если $\Delta \in \Omega_c^2$ и $y \in BV$, то квазиинтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$ существует.

4. Если $x \in G_L$, $y \in G_R$ (или $x \in G_R$, $y \in G_L$), то квазиинтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$ существует тогда и только тогда, когда $y \in G^T$ и существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$. При этом значение квазиинтеграла не зависит от Δ .

5. Если существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy$, то существует квазиинтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$ и выполнено равенство $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y = \int_{\alpha}^{\beta} x dy$.

Доказательство. Необходимость утверждений 1, 2, 4 очевидна, поэтому следует доказывать только достаточность.

1. Поскольку T конечно, то $y \in G = G^T$, а ряд $\sigma^T(x \Delta y)$ вырождается в конечную сумму, поэтому $T \in \mathbb{T}(x \Delta y)$ и существует квазиинтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$.

2. Поскольку $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega_c^2$, то существуют $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что $|\varphi(h)| \leq C|h|$, $|\psi(h)| \leq C|h|$ при $|h| \leq \delta$. Множество $S \doteq \{\tau_k \in T : |y_k^-| > \delta \text{ или } |y_k^+| > \delta\}$ состоит из конечного числа точек (см. [2], лемма 1), следовательно, абсолютная сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$ равносильна абсолютной сходимости ряда $\sigma^R(x\Delta y)$, где $R \doteq T \setminus S$. Поскольку $|y_k^-| \leq \delta$ и $|y_k^+| \leq \delta$ для всех $\tau_k \in R$, то $|\varphi(y_k^-)| \leq C|y_k^-|$ и $|\psi(y_k^+)| \leq C|y_k^+|$, поэтому

$$|\Phi_k| \leq |x_k y_k^- + x_k^- \varphi(y_k^-)| \leq (|x_k| + C|x_k^-|) \cdot |y_k^-| \leq (1+2C) \cdot \|x\| \cdot |y_k^-|,$$

и аналогично $|\Psi_k| \leq (1+2C) \cdot \|x\| \cdot |y_k^+|$. Таким образом,

$$\sum_{\tau_k \in R} (|\Phi_k| + |\Psi_k|) \leq (1+2C) \cdot \|x\| \cdot \sum_{\tau_k \in R} (|y_k^-| + |y_k^+|) < \infty,$$

поэтому ряды $\sigma^R(x\Delta y)$ и $\sigma^T(x\Delta y)$ абсолютно сходятся и, следовательно, $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Пусть $y \in \Gamma$. Так как $\Gamma \subset G^T$, то и в этом частном случае утверждение верно.

3. Справедливы включения $y \in BV \subset G^S$, где $S \doteq T(y)$. Поскольку $y^S \in CBV$, то есть y^S — непрерывная функция ограниченной вариации, то согласно теореме 3 [2] существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^S$. Абсолютная сходимость ряда $\sigma^S(x\Delta y)$ доказывается так же, как доказывалась абсолютная сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$ в предыдущем пункте. Таким образом, $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

4. Поскольку $x \in G_L$ и $y \in G_R$, то $x_k^- = 0$ и $y_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in T$, поэтому $\psi(y_k^+) = 0$, $\Phi_k = x_k y_k^- \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k$ и $\Psi_k = 0$. Так как $y \in G^T$, то

$$\sum_{\tau_k \in T} (|\Phi_k| + |\Psi_k|) \leq \|x\| \cdot \sum_{\tau_k \in T} |y_k^-| = \|x\| \cdot \sum_{\tau_k \in T} (|y_k^-| + |y_k^+|) < \infty,$$

следовательно, $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$, а правая часть цепочки

$$\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y \doteq \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T + \sigma^T(x\Delta y) = \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T - \sum_{\tau_k \in T} x_k y_k^- \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k$$

не зависит от дефекта Δ . Случай $x \in G_R$, $y \in G_L$ симметричен.

5. Существование интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} x dy$ влечет равенство $T = \emptyset$, следовательно, $y \in G = G^T$ и $y^T = y$, поэтому существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$, а поскольку $\sigma^T(x\Delta y) = 0$, то $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Замечание 2. В доказательстве последнего утверждения мы делаем вывод о существовании квазиинтеграла на основании импликации: $\emptyset \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ влечет $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \emptyset$. Чтобы не возникало ощущение парадокса, приведем другое доказательство. Поскольку множество точек разрыва функции y не более чем счетно, то существует точка $\tau \in K$, в которой y непрерывна. Пусть $S \doteq \{\tau\}$ — одноточечное множество, тогда $y \in G = G^S$ и $y^S = y$, поэтому существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^S$. Поскольку ряд $\sigma^S(x\Delta y)$ состоит из одного слагаемого, то $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

§ 4. Основные свойства квазиинтегралов

1. Квазиинтеграл линеен по первому аргументу, то есть если существуют $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta z$ и $\int_{\alpha}^{\beta} y \Delta z$, то для любых $p, q \in \mathbb{R}$ существует $\int_{\alpha}^{\beta} (px + qy) \Delta z$ и $\int_{\alpha}^{\beta} (px + qy) \Delta z = p \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta z + q \int_{\alpha}^{\beta} y \Delta z$.

Действительно, поскольку $\mathbb{T}(x\Delta z) \neq \emptyset$ и $\mathbb{T}(y\Delta z) \neq \emptyset$, то для любых $Q \in \mathbb{T}(x\Delta z)$ и $R \in \mathbb{T}(y\Delta z)$ определено разбиение $U \doteq Q \cup R$, и в соответствии с леммой 5 [2] справедливо равенство $G^U = G^Q \cap G^R$. Это означает, в частности, что $z \in G^U$, поэтому в силу леммы 2 имеем включения $U \in \mathbb{T}(x\Delta z)$ и $U \in \mathbb{T}(y\Delta z)$. Таким образом, существуют интегралы $\int_{\alpha}^{\beta} x dz^U$ и $\int_{\alpha}^{\beta} y dz^U$, абсолютно сходятся ряды $\sigma^U(x\Delta z)$ и $\sigma^U(y\Delta z)$ и справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} p \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta z + q \int_{\alpha}^{\beta} y \Delta z &= p \int_{\alpha}^{\beta} x dz^U + p \sigma^U(x\Delta z) + q \int_{\alpha}^{\beta} y dz^U + q \sigma^U(y\Delta z) = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (px + qy) dz^U + \sigma^U((px + qy)\Delta z) = \int_{\alpha}^{\beta} (px + qy) \Delta z. \end{aligned}$$

2. Свойством линейности по второму аргументу квазиинтеграл в общем случае не обладает. Пусть, например, $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $x = \eta$, $y = g\eta$, $z = h\eta$, где $g, h \in \mathbb{R}$ и $\eta(t) \doteq \theta(t)$ — функция Хевисайда. Если $T \doteq \{0\}$, то $y^T = z^T = 0$, $y(0-) - y(0) = z(0-) - z(0) = 0$, $y(0+) - y(0) = g$ и $z(0+) - z(0) = h$. Поскольку $x(0) = 0$ и $x(0+) = 1$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y = \begin{vmatrix} x(0) & -\psi(g) \\ x(0+) & \psi^*(g) \end{vmatrix} = \psi(g) \quad \text{и} \quad \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta z = \begin{vmatrix} x(0) & -\psi(h) \\ x(0+) & \psi^*(h) \end{vmatrix} = \psi(h).$$

Если $w \doteq py + qz$ ($p, q \in \mathbb{R}$), то $w^T = 0$, $w(0-) - w(0) = 0$, $w(0+) - w(0) = pg + qh$, поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta (py + qz) = \begin{vmatrix} x(0) & -\psi(pg + qh) \\ x(0+) & \psi^*(pg + qh) \end{vmatrix} = \psi(pg + qh).$$

Равенство $\psi(pg + qh) = p\psi(g) + q\psi(h)$ справедливо при всех p и q тогда и только тогда, когда ψ — линейная функция.

Этот пример показывает, что и в общей ситуации линейность квазиинтеграла по второму аргументу имеет место тогда и только тогда, когда $\Delta \in \Omega_{\ell}^2$.

3. При $\alpha < \gamma < \beta$ существование квазиинтеграла $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$ равносильно существованию обоих квазиинтегралов $\int_{\alpha}^{\gamma} x \Delta y$ и $\int_{\gamma}^{\beta} x \Delta y$. При этом справедливо равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y = \int_{\alpha}^{\gamma} x \Delta y + \int_{\gamma}^{\beta} x \Delta y. \quad (4.1)$$

Если существует квазиинтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$, то $\mathbb{T}_{\alpha, \beta}(x\Delta y) \neq \emptyset$ и для любого $T \in \mathbb{T}_{\alpha, \beta}(x\Delta y)$ существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$ и абсолютно сходится ряд $\sigma_{\alpha, \beta}^T(x\Delta y)$. Согласно [4, с. 95] существуют интегралы $\int_{\alpha}^{\gamma} x dy^T$ и $\int_{\gamma}^{\beta} x dy^T$ и выполнено равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T = \int_{\alpha}^{\gamma} x dy^T + \int_{\gamma}^{\beta} x dy^T. \quad (4.2)$$

Поскольку $\int_{\alpha}^t d\xi_k \geq 0$ и $\int_{\alpha}^t d\eta_k \geq 0$ при всех $t \geq \alpha$, то $|\Phi_k^{\alpha, t}| = |x_k y_k^- + x_k^- \varphi(y_k^-)| \int_{\alpha}^t d\xi_k$ и $|\Psi_k^{\alpha, t}| = |x_k y_k^+ + x_k^+ \psi(y_k^+)| \int_{\alpha}^t d\eta_k$, а так как $\int_{\alpha}^{\gamma} d\xi_k \leq \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k$ и $\int_{\alpha}^{\gamma} d\eta_k \leq \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k$, то

$$\sum_{\tau_k \in T} (|\Phi_k^{\alpha, \gamma}| + |\Psi_k^{\alpha, \gamma}|) \leq \sum_{\tau_k \in T} (|\Phi_k^{\alpha, \beta}| + |\Psi_k^{\alpha, \beta}|) < \infty.$$

Таким образом, ряд $\sigma_{\alpha,\gamma}^T(x\Delta y)$ абсолютно сходится. Аналогично доказывается абсолютная сходимость ряда $\sigma_{\gamma,\beta}^T(x\Delta y)$. Следовательно, существуют квазиинтегралы $\int_{\alpha}^{\gamma} x\Delta y$ и $\int_{\gamma}^{\beta} x\Delta y$, а равенства (4.2) и

$$\sigma_{\alpha,\beta}^T(x\Delta y) = \sigma_{\alpha,\gamma}^T(x\Delta y) + \sigma_{\gamma,\beta}^T(x\Delta y) \quad (4.3)$$

приводят к формуле (4.1).

Обратно. Если существуют $\int_{\alpha}^{\gamma} x\Delta y$ и $\int_{\gamma}^{\beta} x\Delta y$, то $\mathbb{T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y) \neq \emptyset$, $\mathbb{T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y) \neq \emptyset$ и для любых $Q \in \mathbb{T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ и $R \in \mathbb{T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$ определены эквивалентные разбиения $U \doteq Q \cup R$ и $T \doteq U \cup \{\gamma\}$. Поскольку $T \sim U$, то $G^T = G^U = G^Q \cap G^R$, следовательно, $y \in G^T$. В соответствии с леммой 2 справедливы включения $T \in \mathbb{T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ и $T \in \mathbb{T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$, поэтому существуют интегралы $\int_{\alpha}^{\gamma} x dy^T$ и $\int_{\gamma}^{\beta} x dy^T$ и абсолютно сходятся ряды $\sigma_{\alpha,\gamma}^T(x\Delta y)$ и $\sigma_{\gamma,\beta}^T(x\Delta y)$. Функция y^T непрерывна в точке γ , а функция x ограничена, следовательно, согласно [4, с. 116] существование интегралов $\int_{\alpha}^{\gamma} x dy^T$ и $\int_{\gamma}^{\beta} x dy^T$ влечет существование интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$ и равенство (4.2). Таким образом, равенство (4.3) влечет абсолютную сходимость ряда $\sigma_{\alpha,\beta}^T(x\Delta y)$, существование квазиинтеграла $\int_{\alpha}^{\beta} x\Delta y$ и равенство (4.1).

Особо следует отметить то обстоятельство, что классический интеграл Римана–Стилтьеса свойством 3, то есть свойством аддитивности, вообще говоря, не обладает [4, с. 96]. Тем самым квазиинтеграл исправляет этот существенный недостаток интеграла Римана–Стилтьеса.

4. Хорошо известно [3, с. 369] равенство $C^*[a, b] = \left\{ x \rightarrow \int_a^b x dQ \mid Q \in BV[a, b] \right\}$, означающее, что всякий линейный непрерывный функционал в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ есть интеграл Римана–Стилтьеса. В соответствии с теоремой 3 обнаруживаем, что квазиинтегралы дефекта $\Delta \in \Omega_c^2$ продолжают линейные непрерывные функционалы с пространства $C[a, b]$ на пространство $G[a, b]$. В рамках настоящей работы мы не ставим, однако, задачу описания пространства $G^*[a, b]$, а лишь отмечаем связь квазиинтегралов с известными интегралами, продолжающими интеграл Римана–Стилтьеса с $C[a, b]$ на $G[a, b]$.

5. Если $x \in G$ и $y \in BV$, то для любого $\Delta \in \Omega_c^2$ существует квазиинтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x\Delta y$, существует интеграл Перрона–Стилтьеса (PS) $\int_{\alpha}^{\beta} x dy$ и выполнено равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} x\Delta y = (\text{PS}) \int_{\alpha}^{\beta} x dy - \sum_{\tau_k \in S} x_k^- \varphi(y_k^-) \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in S} x_k^+ \psi(y_k^+) \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k, \quad (4.4)$$

где $S \doteq T(x) \cap T(y)$. В частности, $(\text{PS}) \int_{\alpha}^{\beta} x dy = \int_{\alpha}^{\beta} x\Delta_0 y$, где через Δ_0 обозначен дефект (φ_0, ψ_0) такой, что $\varphi_0(h) = \psi_0(h) \equiv 0$.

Существование квазиинтеграла $\int_{\alpha}^{\beta} x\Delta y$ справедливо в силу утверждения 3 теоремы 3. При $\Delta = \Delta_0$ и $T \doteq T(y)$ формула (2.5) принимает вид

$$\int_{\alpha}^{\beta} x\Delta_0 y = \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T - \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k) y_k^- \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k) y_k^+ \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k. \quad (4.5)$$

Существование интеграла (PS) $\int_{\alpha}^{\beta} x dy$ хорошо известно (см., например, [5]). Там же доказаны равенства

$$(\text{PS}) \int_{\alpha}^{\beta} x d\xi_k = x(\tau_k) \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k \quad \text{и} \quad (\text{PS}) \int_{\alpha}^{\beta} x d\eta_k = x(\tau_k) \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k,$$

а поскольку $y^T \in \text{CBV}$, то существует $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$, следовательно, существует (PS) $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$ и выполнено равенство (PS) $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T = \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$. Таким образом, правая часть формулы (4.5) равна (PS) $\int_{\alpha}^{\beta} x dy$. Формула (4.4) получается вычитанием формул (2.5) и (4.5):

$$\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y - \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta_0 y = - \sum_{\tau_k \in T} x_k^- \varphi(y_k^-) \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x_k^+ \psi(y_k^+) \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k$$

и замечанием, что $x_k^- = x_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in T \setminus S$.

Если $x \in G$, $y \in \text{BV}$ таковы, что x непрерывна слева, а y непрерывна справа (или наоборот), то в соответствии с утверждениями 3 и 4 теоремы 3 квазиинтеграл $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y$ существует и не зависит от дефекта Δ , поэтому справедливо равенство $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y = (\text{PS}) \int_{\alpha}^{\beta} x dy$.

Свойство 5 показывает исключительную роль дефекта Δ_0 . Другим, не менее важным, является дефект $\Delta_0^* \doteq (\varphi_0^*, \psi_0^*)$, где $\varphi_0^*(h) = \psi_0^*(h) = h$, — двойственный к дефекту Δ_0 . В этом случае справедлива формула

$$\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta_0^* y = \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T - \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k^-) y_k^- \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k^+) y_k^+ \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k, \quad (4.6)$$

правая часть которой отличается от правой части (4.5) лишь тем, что величины $x(\tau_k)$ заменены на $x(\tau_k^-)$ и $x(\tau_k^+)$. Таким образом, квазиинтеграл (4.6) обладает важным свойством: он не зависит от значений интегрируемой функции в точках разрыва интегрирующей функции. Можно показать равенство (DS) $\int_{\alpha}^{\beta} x dy = \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta_0^* y$, в котором слева стоит интеграл Душника–Стилтьеса [1], однако рамки работы ограничивают наши возможности.

6. Если $x \in G$, $y \in \text{BV}$, $\Delta \in \Omega_c^2$, то при фиксированном $\alpha \in K$ определена функция $z(t) \doteq \int_{\alpha}^t x \Delta y$ и справедливо включение $z \in \text{BV}$.

Первая часть утверждения следует из свойства 5. При $T \doteq T(y)$ справедливо включение $y^T \in \text{CBV}$ и определена функция $w(t) \doteq \int_{\alpha}^t x dy^T$. В силу следствия 4 [2] имеет место включение $w \in \text{CBV}$. Функция $h(t) \doteq \sigma_{\alpha, t}^T(x \Delta y)$ есть функция скачков, поэтому $h \in \text{BV}$, $z = w + h \in \text{BV}$.

7. Пусть $x, y \in G$, $\Delta_1 \doteq (\varphi_1, \psi_1) \in \Omega^2$, $\Delta_2 \doteq (\varphi_2, \psi_2) \in \Omega^2$. Если существуют квазиинтегралы $\int_{\alpha}^{\beta} y \Delta_1 x$ и $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta_2 y$, то справедлив аналог формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} y \Delta_1 x + \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta_2 y &= xy \Big|_{\alpha}^{\beta} - \\ &- \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} \varphi_1(x_k^-) & \varphi_2^*(y_k^-) \\ \varphi_1^*(x_k^-) & \varphi_2(y_k^-) \end{vmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} \psi_1(x_k^+) & \psi_2^*(y_k^+) \\ \psi_1^*(x_k^+) & \psi_2(y_k^+) \end{vmatrix} \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $T \doteq T(x) \cap T(y)$ — общие точки разрыва функций x и y .

Из существования квазиинтегралов следуют включения $T \in \mathbb{T}(y \Delta_1 x)$ и $T \in \mathbb{T}(x \Delta_2 y)$, поэтому $x, y \in G^T$, существуют интегралы $\int_{\alpha}^{\beta} y dx^T$ и $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$ и абсолютно сходятся ряды $\sigma^T(y \Delta_1 x)$ и $\sigma^T(x \Delta_2 y)$. Следовательно, $\sigma \doteq \int_{\alpha}^{\beta} y \Delta_1 x + \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta_2 y = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$, где

$\sigma_0 \doteq \int_{\alpha}^{\beta} y dx^T + \int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$, а $\sigma_1 \doteq \sigma^T(y \Delta_1 x)$, $\sigma_2 \doteq \sigma^T(x \Delta_2 y)$, то есть

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= - \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} y_k & -\varphi_1(x_k^-) \\ y_k^- & x_k^- \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} y_k & -\psi_1(x_k^+) \\ y_k^+ & x_k^+ \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k, \\ \sigma_2 &= - \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} x_k & -\varphi_2(y_k^-) \\ x_k^- & y_k^- \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} x_k & -\psi_2(y_k^+) \\ x_k^+ & y_k^+ \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k.\end{aligned}$$

В силу формулы (2.16) [2] справедливы равенства $\sigma_0 = (xy)^T(\beta) - x(\alpha)y(\alpha) = xy|_{\alpha}^{\beta} - (xy)_T(\beta)$, следовательно, $\sigma = xy|_{\alpha}^{\beta} + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где

$$\begin{aligned}\sigma_3 &\doteq - (xy)_T(\beta) = \sum_{\tau_k \in T} (xy)_k^- \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k - \sum_{\tau_k \in T} (xy)_k^+ \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k = \\ &= \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} x_k + x_k^- & y_k \\ x_k & y_k + y_k^- \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k - \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} x_k + x_k^+ & y_k \\ x_k & y_k + y_k^+ \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k.\end{aligned}$$

Воспользовались равенствами $z(\tau_{k-}) = z_k + z_k^-$ и $z(\tau_{k+}) = z_k + z_k^+$, справедливыми для всех $z \in G$. Коэффициент перед $\int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k$ в сумме $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ равен

$$\begin{aligned}&-x_k^- y_k - \varphi_1(x_k^-) y_k^- - x_k y_k^- - x_k^- \varphi_2(y_k^-) + (x_k + x_k^-)(y_k + y_k^-) - x_k y_k = \\ &= (x_k^- - \varphi_1(x_k^-))(y_k^- - \varphi_2(y_k^-)) - \varphi_1(x_k^-) \varphi_2(y_k^-) = -\varphi_1(x_k^-) \varphi_2(y_k^-) + \varphi_1^*(x_k^-) \varphi_2^*(y_k^-).\end{aligned}$$

Аналогично коэффициент перед $\int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k$ равен $\psi_1(x_k^+) \psi_2(y_k^+) - \psi_1^*(x_k^+) \psi_2^*(y_k^+)$.

Следствие 2. Пусть $x, y \in G$, $T \doteq T(x) \cap T(y)$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega^2$. Если выполнено одно из условий: 1) $\text{card } T < \infty$ или 2) $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega_c^2$ и $x, y \in G^T$, то существование одного из квазиинтегралов $\int_{\alpha}^{\beta} y \Delta_1 x$ или $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta_2 y$ влечет существование другого и равенство (4.7).

Действительно, если, например, существует $\int_{\alpha}^{\beta} y \Delta_1 x$, то в соответствии с теоремой 3 в обоих случаях существует $\int_{\alpha}^{\beta} y dx^T$, а в силу следствия 6 [2] существует $\int_{\alpha}^{\beta} x dy^T$. Еще раз ссылаясь на теорему 3, получаем существование $\int_{\alpha}^{\beta} x \Delta_2 y$.

Следствие 3. Если в условиях свойства 7 или следствия 2 дефекты Δ_1 и Δ_2 двойственны, то есть $\Delta_1 = \Delta$ и $\Delta_2 = \Delta^*$, где $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$, то формула (4.7) принимает вид

$$\begin{aligned}&\int_{\alpha}^{\beta} y \Delta x + \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta^* y = xy|_{\alpha}^{\beta} - \\ &- \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} \varphi(x_k^-) & \varphi(y_k^-) \\ \varphi^*(x_k^-) & \varphi^*(y_k^-) \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} \left| \begin{array}{cc} \psi(x_k^+) & \psi(y_k^+) \\ \psi^*(x_k^+) & \psi^*(y_k^+) \end{array} \right| \int_{\alpha}^{\beta} d\eta_k,\end{aligned}\tag{4.8}$$

а если $\Delta \in \Omega_{\ell}^2$, то есть φ и ψ линейны, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} y \Delta x + \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta^* y = xy|_{\alpha}^{\beta}.\tag{4.9}$$

Замечание 3. Формула (4.9) справедлива еще в двух случаях: 1) когда $T(x) \cap T(y) = \emptyset$ и 2) когда функции x и y не имеют общих односторонних разрывов, например, когда $x \in G_L$, $y \in G_R$ (или наоборот).

Замечание 4. Если $\Delta^* = \Delta$, то есть $\varphi(h) = \psi(h) = \frac{h}{2}$, то формула (4.9) принимает классический вид

$$\int_{\alpha}^{\beta} y \Delta x + \int_{\alpha}^{\beta} x \Delta y = xy \Big|_{\alpha}^{\beta}. \quad (4.10)$$

§ 5. Примеры

Пример 2. Пусть $0 \in K$. Для дефекта $\varphi(h) = \psi(h) = \frac{h}{2}$ вычислим квазиинтеграл $\int_{-1}^t x \Delta y$, где функции $x(t) = 3^{1+\operatorname{sgn} t}$ и $y(t) = \operatorname{sgn} t$ имеют общую точку разрыва $t = 0$. Здесь $\tau_1 = 0$, $x_1 = 3$, $x_1^- = -2$, $x_1^+ = 6$, $y_1^- = -1$, $y_1^+ = 1$, поэтому

$$x(t) = 1 + 2 \int_{-1}^t d\xi + 6 \int_{-1}^t d\eta, \quad y(t) = -1 + \int_{-1}^t d\xi + \int_{-1}^t d\eta,$$

$$\int_{-1}^t x \Delta y = - \left| \begin{array}{cc} 3 & -\varphi(-1) \\ -2 & -1 \end{array} \right| \int_{-1}^t d\xi + \left| \begin{array}{cc} 3 & -\psi(1) \\ 6 & 1 \end{array} \right| \int_{-1}^t d\eta = 2 \int_{-1}^t d\xi + 6 \int_{-1}^t d\eta = x(t) - 1.$$

Пример 3. Пусть $K = [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$, $\varphi(h) = 3h$, ψ — любая функция из Ω . Вычислим квазиинтеграл $z(t) \doteq \int_1^t x \Delta y$, где $x(t) = 2^{[t]-1} e^{t-1}$, $y(t) = \{t\}$, $[t]$ — целая часть, а $\{t\}$ — дробная часть числа t . Здесь $\tau_1 = 1$, $x_1 = 1$, $x_1^- = -\frac{1}{2}$, $x_1^+ = 0$, $y_1^- = 1$, $y_1^+ = 0$; $\tau_2 = 2$, $x_2 = 2e$, $x_2^- = -e$, $x_2^+ = 0$, $y_2^- = 1$, $y_2^+ = 0$. Легко проверить равенство $y(t) = t - 1 - \int_1^t d\xi_1 - \int_1^t d\xi_2$, следовательно,

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_1^t x(s) d(s-1) - \left| \begin{array}{cc} 1 & -\varphi(1) \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right| \int_1^t d\xi_1 - \left| \begin{array}{cc} 2e & -\varphi(1) \\ -e & 1 \end{array} \right| \int_1^t d\xi_2 = \\ &= \int_1^t x(s) ds + \frac{1}{2} \int_1^t d\xi_1 + e \int_1^t d\xi_2. \end{aligned}$$

Если $t < 1$, то $z(t) = \frac{1}{2} e^{t-1} - 1$; если $t \in [1, 2)$, то $z(t) = e^{t-1} - 1$; если $2 \leq t$, то $z(t) = 2e^{t-1} - 1$. Это означает, что $\int_1^t x \Delta y = x(t) - 1$.

Пример 4. Пусть $0 \in K$, $\varphi(h) = \psi(h) = 1 - \frac{h}{e^h - 1}$ при $h \neq 0$ и $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. Зафиксируем $\alpha \in K$, $q \in \operatorname{CBV}$ и $g, h \in \mathbb{R}$ и составим функцию $Q(t) \doteq q(t) - g \int_{\alpha}^t d\xi + h \int_{\alpha}^t d\eta$, разрывную в нуле. Пусть $x(t) \doteq \exp(Q(t) - Q(\alpha))$ и $y(t) \doteq Q(t)$. Легко проверяемые равенства $x(t) = X(t) e^{-g\xi(t)} e^{h\eta(t)}$, где $X(t) \doteq \exp(q(t) - q(\alpha) + g\xi(\alpha) - h\eta(\alpha))$ (очевидно, $X \in \operatorname{CBV}$), $e^{-g\xi(t)} = 1 + (1 - e^g)\xi(t)$, $e^{h\eta(t)} = 1 + (e^h - 1)\eta(t)$, $\xi(t)\eta(t) \equiv 0$ дают представление для x :

$$x(t) = X(t) [1 + (1 - e^g)\xi(t) + (e^h - 1)\eta(t)]. \quad (5.1)$$

Справедливо равенство $\int_{\alpha}^t x \Delta y = \int_{\alpha}^t x \Delta Q = \int_{\alpha}^t x dq + \sigma$, где

$$\sigma \doteq - \left| \begin{array}{cc} x(0) & -\varphi(g) \\ x(0-) & \varphi^*(g) \end{array} \right| \int_{\alpha}^t d\xi + \left| \begin{array}{cc} x(0) & -\psi(h) \\ x(0+) & \psi^*(h) \end{array} \right| \int_{\alpha}^t d\eta.$$

Поскольку $\int_{\alpha}^t X(s)z(s) dq(s) = \int_{\alpha}^t z(s) dX(s)$ для любого $z \in G$, то

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^t x \Delta y &= \int_{\alpha}^t [1 + (1 - e^g) \xi(s) + (e^h - 1) \eta(s)] dX(s) + \sigma = \\ &= X(t) - X(\alpha) + (1 - e^g) \left(X(t) \xi(t) - X(\alpha) \xi(\alpha) - X(0) \int_{\alpha}^t d\xi \right) + \\ &\quad + (e^h - 1) \left(X(t) \eta(t) - X(\alpha) \eta(\alpha) - X(0) \int_{\alpha}^t d\eta \right) + \sigma = \\ &= x(t) - x(\alpha) - X(0) \left((1 - e^g) \int_{\alpha}^t d\xi + (e^h - 1) \int_{\alpha}^t d\eta \right) + \sigma. \end{aligned}$$

Здесь мы проинтегрировали по частям и дважды воспользовались представлением (5.1). Очевидно, $x(0) = X(0)$, $x(0-) = X(0)e^g$, $x(0+) = X(0)e^h$, а поскольку $\varphi^*(g) + e^g\varphi(g) = e^g - 1$, $\psi^*(h) + e^h\psi(h) = e^h - 1$ и $x(\alpha) = 1$, то $\int_{\alpha}^t x \Delta y = x(t) - 1$.

Приведенные примеры дают основание полагать, что уравнения вида $x(t) - \int_{\alpha}^t x \Delta Q = y(t)$ при различных дефектах Δ , ядрах Q и возмущениях y разрешимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hönig Ch. S. Volterra–Stieltjes integral equations. Mathematics Studies 16. Amsterdam: North-Holland, 1975. 152 p.
2. Родионов В. И. Об одном семействе подпространств пространства прерывистых функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 7–24.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа: учебник для вузов. 5-е изд. М.: Наука, 1981. 544 с.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3: учебник для вузов. 5-е изд. М.: Наука, 1969. 656 с.
5. Tvrdý M. Regulated functions and the Perron–Stieltjes integral // Časopis pěst. mat. 1989. № 114. P. 187–209.

Поступила в редакцию 14.01.11

V. I. Rodionov

On a family of analogs of the Perron–Stieltjes integral

We define the concept of a quasi-integral for two regulated functions defined on a segment and for a special parameter called a defect. In case there exists the Riemann–Stieltjes integral, there is a quasi-integral for any defect, and all quasi-integrals are equal. The Perron–Stieltjes integral, if it exists, coincides with one of quasi-integrals where the defect is defined in a special way. We give proofs of necessary and sufficient conditions for the existence of quasi-integrals and of their basic properties, in particular, of the analogue of the formula of integration by parts.

Keywords: regulated function, Riemann–Stieltjes integral, Perron–Stieltjes integral.

Mathematical Subject Classifications: 26A39, 26A42

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., декан факультета информационных технологий и вычислительной техники, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Rodionov Vitalii Ivanovich, candidate of physics and mathematics, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1 (build. 4), Izhevsk, 426034, Russia.