Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. Yu. Timofeev, Dirichlet problem for holomorphic functions in spaces with determined modulus of continuity, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, Issue 3, 107–116

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.147.182.235

April 26, 2023, 13:59:17

УДК 517.53

© А. Ю. Тимофеев

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ЗАДАНЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Решается задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах с заданным модулем непрерывности: доказывается существование голоморфной в круге функции по предельным значениям ее действительной части на границе круга.

Ключевые слова: задача Дирихле, голоморфные функции, модуль непрерывности.

Введение

Данная работа продолжает исследования, проведённые в [1].

При исследовании краевых задач, связанных с аналитическими функциями, используется следующий результат ([2], [3, с. 131]):

Теорема 1. *Если функция g задана на ∂G и непрерывна по Гельдеру с показателем λ ($0 < \lambda < 1$) и с постоянной H , то существует единственная голоморфная в $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция f , удовлетворяющая условиям*

$$\operatorname{Re} f = g(z), \quad z \in \partial G, \quad \operatorname{Im} f|_{z=z_0} = c,$$

где $z_0 \in \partial G$ — фиксированная точка, причем f является непрерывной по Гельдеру в $\overline{G}$ с тем же самым показателем λ .

Интерес представляет вопрос о справедливости этой теоремы для более общих, чем гильбертовские пространства классов функций.

При решении этой задачи возникает вопрос: если функция u находится в определенном классе функций, то в каком классе функций будет находиться функция v , сопряженная к u ? Известно (см., напр., [4, с. 64–71]), что предельные поведения вещественной и мнимой частей голоморфной функции выражаются с помощью формул преобразования Гильберта

$$\begin{cases} v(e^{i\gamma_0}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\gamma}) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_0}{2} d\gamma + v_0, & v_0 = v(0, 0), \\ u(e^{i\gamma_0}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{i\gamma}) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_0}{2} d\gamma + u_0, & u_0 = u(0, 0). \end{cases} \quad (1)$$

Сингулярный интеграл Гильберта, стоящий в правой части (1), тесно связан с несобственным интегралом Коши вдоль окружности радиуса единица с центром в начале координат (см., напр., [5, с. 163]). Таким образом, указанная задача связана с описанием пространств, инвариантных относительно интегральных операторов Гильберта и Коши. Отметим также, что в [5] приведены примеры пространств, инвариантных относительно интегрального оператора Коши. В частности, пространства Гельдера для показателей $\lambda : 0 < \lambda < 1$, $L_p(\Gamma)$ ($1 < p < \infty$) инвариантны относительно указанных операторов.

Как показано ещё И. И. Приваловым ([6, с. 199]), для интеграла Коши это не так для случая $\lambda = 1$: если плотность f удовлетворяет в точках границы ∂G условию Липшица, то граничные значения интеграла типа Коши $F(z)$ удовлетворяют соотношению

$$|F(z_1) - F(z_2)| \leq A \cdot |z_1 - z_2| \cdot \ln \frac{1}{|z_1 - z_2|}, \quad |z_1 - z_2| \leq \delta.$$

В работе [7] получен следующий результат: если D_α — класс функций, модули которых удовлетворяют неравенству

$$\omega(u, t) \leq A \left(\ln \frac{a}{t} \right)^{-\alpha},$$

то оператор Коши переводит функцию класса D_α в функцию класса $D_{\alpha-1}$. Как и в случае пространства Липшица, здесь имеет место «логарифмический эффект».

Необходимо отметить еще работу П. М. Тамразова [8]. Пусть G — открытое множество комплексной плоскости, $\bar{G}$ — его замыкание, а $f(z)$ — функция, голоморфная в G и непрерывная в замыкании $\bar{G}$. В [8] получены условия на множество G и мажоранту $\varphi(\tau)$ типа модуля непрерывности, которые обеспечили бы истинность следующего суждения: если модуль непрерывности функции $f(z)$ на границе ∂G удовлетворяет условию $\omega(f, t) = O(\varphi(t))$, то модуль непрерывности функции $f(z)$ на замыкании $\bar{G}$ также удовлетворяет этому условию.

В работе [9] (см. также [10]) в связи с изучением нелинейных сингулярных интегральных уравнений в пространстве функций с ограничениями на модуль непрерывности рассмотрен класс функций Φ (определение и свойства приведены в п. 1.1). По-видимому, этот класс впервые был введен в работе [11].

Определим теперь для замкнутого ограниченного подмножества $K \subseteq \mathbb{C}$ и $\mu \in \Phi$ класс непрерывных функций $C_\mu(K)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_\mu := \max \left\{ \sup_{\bar{G}} |f(t)|, \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{\mu(|z_1 - z_2|)} \right\} < \infty.$$

Показывается, что величина, стоящая в правой части последней формулы удовлетворяет всем аксиомам нормы, более того, пространство $(C_\mu(K), \|\cdot\|_\mu)$ является банаховым. В [9] это пространство еще называют обобщенным пространством Гельдера.

В [1] приводится решение задачи Дирихле для голоморфных функций в обобщенных пространствах Гельдера, а именно, доказана следующая

Теорема 2. Пусть функция g задана на ∂G и удовлетворяет условию

$$|g(e^{i\theta_1}) - g(e^{i\theta_2})| \leq C\mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|), \quad \mu \in \Phi.$$

Тогда существует единственная голоморфная в G функция f , непрерывная в замкнутом круге и удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{Re} f = g(z), \quad z \in \partial G, \quad \operatorname{Im} f|_{z=z_0} = c,$$

где $z_0 \in \partial G$ — фиксированное число, причем f удовлетворяет во всех точках $\bar{G}$ условию

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq A\mu(|z_1 - z_2|).$$

В данной работе приведено решение задачи Дирихле для голоморфных функций при более слабых ограничениях на функцию $\mu(t)$ (см. параграф 3, теорема 9). Основные результаты работы анонсированы в [12].

§ 1. Некоторые пространства функций с заданным поведением модуля непрерывности

1.1. Функции класса Φ . В [9] рассмотрен следующий класс функций (см. также [10]).

Будем говорить, что функция $\mu : (0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу Φ , если

$$1^\circ. \lim_{t \rightarrow +0} \mu(t) = 0;$$

$$2^\circ. \mu(t) \text{ почти возрастает, то есть существует постоянная } c = c_\mu, \text{ что для всех } t_1, t_2 \in (0, l_0] : t_1 \leq t_2 \text{ выполнено } \mu(t_1) \leq c\mu(t_2);$$

$$3^\circ. \sup_{t>0} \frac{1}{\mu(t)} \int_0^t \frac{\mu(t)}{t} dt = A_\mu < \infty;$$

$$4^\circ. \sup_{t>0} \frac{t}{\mu(t)} \int_t^{l_0} \frac{\mu(t)}{t^2} dt = B_\mu < \infty.$$

Приведем некоторые полезные свойства функций из класса Φ (см., напр., [9, 13]):

$$1. \mu(t) \geq 0 \quad \forall t \in (0, l_0].$$

$$2. \frac{\mu(t)}{t} \text{ почти убывает.}$$

$$3. \int_0^x \frac{\mu(t)}{t} dt \leq A_\mu \mu(x).$$

$$4. \int_x^{l_0} \frac{\mu(t)}{t^2} dt \leq B_\mu \frac{\mu(x)}{x}.$$

$$5. \exists \alpha, \beta \in (0, 1), \text{ что для всех } t \in (0, l_0) \text{ выполнено } c_{\mu,1} t^\alpha \leq \mu(t) \leq c_{\mu,2} t^\beta.$$

Лемма 1 (см. [9, с. 57]). Если неотрицательная функция $\varphi(t)$ почти возрастает в $(0, l_0)$ и сходится интеграл

$$\int_0^{l_0} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (\text{условие Дини}), \quad (2)$$

то функция $\psi(t) = \int_0^t \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(t) \cdot \ln \frac{l_0}{t}$ почти возрастает в $(0, l_0)$.

Следствие 1. Предположим, что функция $\varphi(t)$ вместо условия (2) удовлетворяет более сильному условию 3° , тогда функция $\varphi(t) \cdot \ln \frac{l_0}{t}$ тоже почти возрастает.

Действительно, по лемме 1 существует $C > 0$, что $\forall t_1, t_2 : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq l_0/2$ со свойством

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) \cdot \ln \frac{l_0}{t} &\leq \int_0^{t_1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(t_1) \cdot \ln \frac{l_0}{t_1} \leq C \left[\int_0^{t_2} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(t_2) \cdot \ln \frac{l_0}{t_2} \right] \leq \\ &\leq C_1 \cdot \varphi(t_2) + C \cdot \varphi(t_2) \cdot \ln \frac{l_0}{t_2} \leq C_2 \cdot \varphi(t_2) \cdot \ln \frac{l_0}{t_2}. \end{aligned}$$

Отметим, что функция $\varphi(t) = 1/(\ln \frac{1}{t})^{1/2}$ не удовлетворяет условию Дини (2) и функция $\varphi(t) \cdot \ln \frac{1}{t}$ не является почти возрастающей на $(0, \frac{1}{2}]$.

Из свойства 3° , в частности, следует, что $\mu \in \Phi$ удовлетворяет условию Дини. Заметим, что сингулярный оператор Коши изучался также в [14] для пространств функций, описываемых поведением модуля непрерывности с условием Дини.

Примерами функций $\mu(t)$ из класса Φ являются следующие функции:

- $\mu(t) = t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$
- $\mu(t) = t^\alpha |\ln t|^p, \quad \mu(0) = 0, \quad \text{где } 0 < \alpha < 1, \quad 0 < p, \quad t \in [0, \frac{1}{2}].$

Как показывает следующий пример, функция $\mu(t)$ может быть разрывной:

$$\bullet \mu(t) = \begin{cases} t^\alpha, & 0 \leq t \leq \frac{l_0}{2}, \\ t^\alpha + 1, & \frac{l_0}{2} \leq t \leq l_0. \end{cases}$$

Выше было отмечено, что в [1] решена задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах, описываемых поведением функции $\mu \in \Phi$ (см. теорему 2 во введении).

В данной работе решается задача Дирихле при более слабых ограничениях на функцию $\mu(t)$.

1.2. Функции класса Φ_1 и их свойства. Обозначим через Φ_1 класс функций $\mu : (0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $1^\circ, 2^\circ$, а также условиям

3* $\frac{\mu(t)}{t}$ почти убывает;

4* при некотором $\delta > 0$ $\int_0^\delta \frac{\mu(t)}{t} dt < +\infty$ (условие Дини).

Заметим, что модуль непрерывности $\omega(f, \delta)$ функции f , определяемый равенством

$$\omega(\delta) = \omega(f, \delta) := \sup_{|t_1 - t_2| < \delta} |f(t_1) - f(t_2)|,$$

является неубывающей функцией, причем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0, \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2).$$

Последнее условие заведомо будет выполнено, если потребовать, что $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ является невозрастающей функцией.

Очевидно, что справедливо включение $\Phi \subset \Phi_1$. Следующий пример показывает, что это включение строгое: $\mu(t) = t \cdot \ln \frac{1}{t}$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, принадлежит Φ_1 , но не принадлежит Φ , поскольку не выполнено условие 4°.

При доказательстве основного утверждения у нас будут возникать дополнительные условия на функцию $\mu \in \Phi_1$.

Лемма 2. *Предположим, что $\mu \in \Phi_1$.*

(2.1) *Если выполнено условие, что $\mu(t) \cdot \ln^2 \frac{1}{t}$ почти возрастает на $(0, l_0]$ ($0 < l_0 < 1$), то $\mu(t)$ почти возрастает, причем $\lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t) \cdot \ln \frac{1}{t} = 0$.*

(2.2) *Если $\mu(t) \cdot \ln^3 \frac{1}{t}$ почти возрастает на $(0, l_0]$ ($0 < l_0 < 1$), тогда $\mu(t) \cdot \ln^2 \frac{1}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$, причем $\int_0^{l_0} \frac{\mu(t) \cdot \ln^2 \frac{1}{t}}{t} dt$ сходится.*

Доказательство.

(2.1) Из условия следует, что $\forall t_1 \leq t_2 \leq l_0 < 1$

$$\frac{\mu(t_1)}{\mu(t_2)} \leq C \left(\frac{\ln t_2}{\ln t_1} \right)^2 \leq C.$$

Кроме того,

$$\mu(t) \cdot \ln \frac{1}{t} \leq C \cdot \frac{\mu(l_0) \cdot \ln^2 \frac{1}{l_0}}{\ln \frac{1}{t}}.$$

(2.2)

$$\int_0^{l_0} \frac{\mu(t) \ln \frac{1}{t}}{t} dt = \int_0^{l_0} \frac{\mu(t) \cdot \ln^3 \frac{1}{t}}{t \cdot \ln^2 \frac{1}{t}} dt \leq C \cdot \mu(l_0) \ln^3 \frac{1}{l_0} \cdot \int_0^{l_0} \frac{dt}{t \ln^2 \frac{1}{t}} < \infty.$$

□

Как и выше, определим теперь для замкнутого ограниченного множества $K \subset \mathbb{C}$ и $\mu \in \Phi_1$ класс непрерывных функций $C_\mu(K)$ (см. введение). Так же, как в [1], доказывается

Лемма 3. *Пусть $\mu \in \Phi_1$, тогда пространство $C_\mu(K)$ является банаховым.*

§ 2. Некоторые свойства голоморфных в круге функций из класса $C_\mu(\overline{G})$

В работе [15, с. 451–457] доказываются свойства голоморфных в круге G функций, удовлетворяющих в замкнутом круге условию Гельдера с показателем $\lambda \in (0, 1)$. В работе [1] эти свойства перенесены на более общий случай, а именно, когда голоморфная функция принадлежит $C_\mu(\overline{G})$, где $\mu \in \Phi$. В данном разделе получены аналоги соответствующих утверждений для случая $\mu \in \Phi_1$.

Теорема 3. Пусть голоморфная в круге G функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f \in C(\overline{G})$, причем

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leq C_1 \cdot \mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|), \quad (3)$$

тогда справедлива оценка

$$|f'(\xi)| \leq C_2 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln \frac{\pi}{1-r}, \quad |\xi| = r < 1. \quad (4)$$

Поскольку, для $|\theta_1 - \theta_2| \leq \frac{\pi}{2}$ справедливо

$$\frac{2}{\pi} \cdot |\theta_1 - \theta_2| \leq |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| \leq |\theta_1 - \theta_2|, \quad (5)$$

то правую часть (3) можно оценить сверху выражением $\mu(|\theta_1 - \theta_2|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу Коши для производной голоморфной функции, получаем для $\xi = re^{i\theta} \in G, \xi_1 = e^{i\theta}$

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) - f(\xi_1)}{(z - \xi)^2} dz.$$

Отсюда, повторяя доказательство необходимости леммы 2 [1], получаем

$$|f'(\xi)| \leq \frac{A}{\pi} \cdot \int_0^\pi \frac{\mu(t)}{(1-r)^2 + \frac{4r}{\pi^2} t^2} dt = \frac{A}{\pi} \left[\int_0^{1-r} (\dots) dt + \int_{1-r}^\pi (\dots) dt \right] = J_1(r) + J_2(r).$$

Предположим сначала, что $r \geq \frac{1}{2}$. Так же как в [1] получаем, используя свойство 2° функции $\mu(t)$

$$J_1(r) \leq A_1 \frac{\mu(1-r)}{1-r}. \quad (6)$$

Для второго интеграла получаем оценку

$$J_2(r) \leq \frac{\pi A}{4r} \cdot \int_{1-r}^\pi \frac{\mu(t)}{t^2} dt \leq A_2 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \int_{1-r}^\pi \frac{dt}{t} = A_2 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln \frac{\pi}{1-r}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаем для $|\xi| = r \geq \frac{1}{2}$

$$|f'(\xi)| \leq B \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln \frac{\pi}{1-r}. \quad (8)$$

Если теперь в качестве B возьмем величину, большую, чем верхняя грань $\frac{|f'(\xi)|(1-r)}{\mu(1-r) \cdot \ln \frac{\pi}{1-r}}$ для $|\xi| \leq \frac{1}{2}$, то получаем, что неравенство (8) справедливо для всех $\xi : |\xi| < 1$. $\square$

Замечания

1. В оценке (8) можно убрать π , увеличив постоянную B , считая $r \geq r_0$.

2. В оценке (7) логарифм нельзя убрать, как показывает пример функции $\mu(t) = t \cdot \ln \frac{1}{t}$.

С использованием леммы 2 аналогично доказывается

Теорема 4. Предположим дополнительно, что $\mu(t) \cdot \ln^2 \frac{1}{t}$ почти возрастает. Пусть далее голоморфная в круге G функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f \in C(\overline{G})$, причем

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leq C_1 \cdot \mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|) \cdot \ln \frac{1}{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|}, \quad |\theta_1 - \theta_2| < 1.$$

Тогда

$$|f'(\xi)| \leq C_2 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln^2 \frac{\pi}{1-r}, \quad |\xi| = r < 1.$$

Теорема 5. *Предположим, что $\mu \in \Phi_1$ удовлетворяет условию, что $\mu(t) \cdot \ln^2 \frac{1}{t}$ почти возрастает. Предположим, что для $f \in H(G)$ выполнено условие*

$$|f'(\xi)| \leq C_1 \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r}, \quad |\xi| = r < 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leq C_2 \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|}, \quad |\theta_1 - \theta_2| < 1. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве достаточности леммы 2 из [1] получим, что для всех θ существует $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, что f ограничена в G и представима в виде интеграла Пуассона через свои предельные значения $f(e^{i\theta})$ (см. [15, с. 381]). Покажем, что верна оценка (9), откуда будет следовать, что $f \in C(\overline{G})$ ([15, с. 369]). Имеем

$$f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2}) = \int_l f'(\xi) d\xi,$$

где кривая l состоит из отрезков $\overline{e^{i\theta_1}, he^{i\theta_1}}, \overline{e^{i\theta_2}, he^{i\theta_2}}$ и дуги окружности $(he^{i\theta_1}, he^{i\theta_2})$, причем $h = 1 - |\theta_1 - \theta_2|$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| &\leq \int_h^1 |f'(re^{i\theta_1})| dr + \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} h |f'(he^{it})| dt \right| + \int_h^1 |f'(re^{i\theta_2})| dr \leq \\ &\leq 2A_1 \int_h^1 \frac{\mu(1-r)}{1-r} dr + A_2 \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} h \frac{\mu(1-h)}{1-h} dt \right| = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$I_2 \leq A_2 \cdot h \cdot |\theta_1 - \theta_2| \cdot \frac{\mu(|\theta_1 - \theta_2|)}{|\theta_1 - \theta_2|} < A_2 \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= 2A_1 \cdot \int_0^{|\theta_1 - \theta_2|} \frac{\mu(t)}{t} dt = 2A_1 \cdot \int_0^{|\theta_1 - \theta_2|} \frac{\mu(t) \cdot \ln^2 \frac{1}{t}}{t \cdot \ln^2 \frac{1}{t}} dt \leq \\ &\leq C \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|} \cdot \int_0^{|\theta_1 - \theta_2|} \frac{dt}{t \cdot \ln^2 \frac{1}{t}} = C \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует (9). $\square$

Теорема 6. *Предположим дополнительно, что $\mu(t) \in \Phi_1$ удовлетворяет условию, что $\mu(t) \cdot \ln^3 \frac{1}{t}$ почти возрастает. Предположим, что для функции $f \in H(G)$ выполнено условие (4). Тогда справедлива оценка*

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leq C \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\theta_1 - \theta_2|}, \quad |\theta_1 - \theta_2| < 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя схему доказательства теоремы 5 (см. также доказательство леммы 2 [1]) с использованием леммы 2, получим вначале, что интеграл $\int_0^1 f'(e^{i\theta}) dr$ сходится для всех θ , а значит, для всех θ существует $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$. Далее, получаем, что

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leq 2 \cdot C \cdot \int_h^1 \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln \frac{\pi}{1-r} dr + C_1 \cdot \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} h \cdot \frac{\mu(1-h)}{1-h} dt \right| = I_1 + I_2.$$

Далее, используя лемму 2, получим

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C_1 \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln \frac{\pi}{|\theta_1 - \theta_2|}, \\ I_1 &\leq 2 \cdot C \cdot \int_0^{|\theta_1 - \theta_2|} \frac{\mu(t)}{t} \cdot \ln \frac{\pi}{t} dt \leq C_2 \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln^2 \frac{\pi}{|\theta_1 - \theta_2|}. \end{aligned}$$

Из этих оценок следует утверждение теоремы 6. $\square$

Теорема 7. *Предположим, что $\mu(t) \cdot \ln^3 \frac{1}{t}$ почти возрастает и для функции $f \in H(G) \cap C(\overline{G})$ выполнено условие (3), тогда справедлива оценка*

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq C \cdot \mu(|\xi_1 - \xi_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\xi_1 - \xi_2|}, \quad \xi_1, \xi_2 \in \overline{G}, \quad |\xi_1 - \xi_2| < 1. \quad (12)$$

Доказательство. Заметим, что из (3) следует оценка

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leq C \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|).$$

Результат немедленно получится, если докажем, что для всех точек $\xi_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $\xi' = r_1 e^{i\theta_2}$, $\xi_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ из $\overline{G}$ выполняются следующие неравенства:

$$|f(r_1 e^{i\theta_1}) - f(r_1 e^{i\theta_2})| \leq \hat{C} \cdot \mu(|r_1 e^{i\theta_1} - r_1 e^{i\theta_2}|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|r_1 e^{i\theta_1} - r_1 e^{i\theta_2}|}, \quad (13)$$

$$|f(r_1 e^{i\theta_2}) - f(r_2 e^{i\theta_2})| \leq \hat{C} \cdot \mu(|r_1 e^{i\theta_2} - r_2 e^{i\theta_2}|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|r_1 e^{i\theta_2} - r_2 e^{i\theta_2}|}. \quad (14)$$

Действительно, используя, что $|\xi_1 - \xi'| \leq |\xi_1 - \xi_2|$, $|\xi' - \xi_2| \leq |\xi_1 - \xi_2|$ и свойство почти возрастания функции $\mu(t) \cdot \ln \frac{1}{t}$, получаем

$$\begin{aligned} |f(\xi_1) - f(\xi_2)| &\leq |f(\xi_1) - f(\xi')| + |f(\xi') - f(\xi_2)| \leq \\ &\leq \hat{C}(\mu(|\xi_1 - \xi'|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\xi_1 - \xi'|} + \mu(|\xi' - \xi_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\xi' - \xi_2|}) \leq \\ &\leq C\mu(|\xi_1 - \xi_2|) \cdot \ln \frac{1}{|\xi_1 - \xi_2|}, \quad |\xi_1 - \xi_2| < 1. \end{aligned}$$

При этом можно предполагать, что $\xi_1 \neq \xi_2$ и $r_1 \neq 0$.

1. Доказательство (13). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi_{\theta_1, \theta_2}(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi e^{i\theta_1}) - f(\xi e^{i\theta_2})}{\xi}, & \xi \in \overline{G} \setminus \{0\}, \\ f'(0) \cdot (e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}), & \xi = 0. \end{cases}$$

Заметим, что в [1] во второй строчке пропущен второй множитель. Функция $\varphi_{\theta_1, \theta_2}(\xi) \in H(G) \cap C(\overline{G})$. Применяя принцип максимума модуля голоморфной функции и условие теоремы, получаем для $\xi : \xi = r_1 < 1$, что

$$\begin{aligned} \frac{|f(r_1 e^{i\theta_1}) - f(r_1 e^{i\theta_2})|}{r_1} &\leq \max_{|\xi| \leq r_1} |\varphi_{\theta_1, \theta_2}(\xi)| \leq \max_{|\xi| \leq 1} |\varphi_{\theta_1, \theta_2}(\xi)| = \max_{|\xi|=1} |\varphi_{\theta_1, \theta_2}(\xi)| = \\ &= \max_{0 \leq t \leq \pi} |f(e^{i(t+\theta_1)}) - f(e^{i(t+\theta_2)})| \leq C\mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|). \end{aligned}$$

Отсюда, используя условие 3*, получим

$$\begin{aligned} |f(r_1 e^{i\theta_1}) - f(r_1 e^{i\theta_2})| &\leq C \cdot \frac{\mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|) \cdot r_1}{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|} \cdot |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| \leq \\ &\leq C \cdot \mu(r_1 |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|). \end{aligned} \quad (15)$$

Для всех ξ_1, ξ_2 таких, что $|\xi_1 - \xi_2| < \frac{1}{2}$, следует, что $|\xi_1 - \xi'| < \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\ln^2 \frac{1}{r_1 |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|} > \ln^2 2,$$

а значит, из (15) следует (13).

2. Доказательство (14). Не уменьшая общности, можно считать, что $0 \leq r_1 < r_2 < 1$. Тогда по теореме 3

$$\begin{aligned} |f(r_1 e^{i\theta_2}) - f(r_2 e^{i\theta_2})| &\leq \int_{r_1}^{r_2} |f'(te^{i\theta_2})| dt \leq \\ &\leq A \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu(1-t)}{1-t} \cdot \ln \frac{\pi}{1-t} dt = A \int_{1-r_2}^{1-r_1} \frac{\mu(x)}{x} \cdot \ln \frac{\pi}{x} dx = A \cdot I(r_1, r_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая:

а) $r_2 < \frac{1+r_1}{2}$, что эквивалентно неравенству $r_2 - r_1 < 1 - r_2$. Из свойств функции $\frac{\mu(t)}{t} \cdot \ln \frac{\pi}{t}$ следует, что

$$I(r_1, r_2) \leq \frac{C\mu(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{\pi}{r_2 - r_1} \cdot \int_{r_1}^{r_2} dx = C \cdot \mu(r_2 - r_1) \cdot \ln \frac{\pi}{r_2 - r_1}. \quad (16)$$

б) $r_2 \geq \frac{1+r_1}{2}$, тогда $r_2 - r_1 \geq 1 - r_2$. Представим интеграл $I(r_1, r_2)$ в следующем виде:

$$I(r_1, r_2) = \int_{1-r_2}^{r_2-r_1} (\dots) dx + \int_{r_2-r_1}^{1-r_1} (\dots) dx = I_1(r_1, r_2) + I_2(r_1, r_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_2(r_1, r_2) &= \int_{r_2-r_1}^{1-r_1} \frac{\mu(x)}{x} \cdot \ln \frac{\pi}{x} dx \leq \\ &\leq C \cdot \frac{\mu(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{\pi}{r_2 - r_1} \cdot (1 - r_2) < C \cdot \frac{\mu(r_2 - r_1)}{r_2 - r_1} \cdot \ln \frac{\pi}{r_2 - r_1}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} I_1(r_1, r_2) &= \int_{1-r_2}^{r_2-r_1} \frac{\mu(x)}{x} \cdot \ln \frac{\pi}{x} dx = \int_{1-r_2}^{r_2-r_1} \frac{\mu(x) \cdot \ln^3 \frac{\pi}{x}}{x \ln^2 \frac{\pi}{x}} dx \leq \\ &\leq C \cdot \mu(r_2 - r_1) \cdot \ln^3 \frac{\pi}{r_2 - r_1} \cdot \int_{1-r_2}^{r_2-r_1} \frac{dx}{x \ln^2 \frac{\pi}{x}} < C \cdot \mu(r_2 - r_1) \cdot \ln^2 \frac{\pi}{r_2 - r_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (16), (17), (18) следует (14) для $|\xi_1 - \xi_2| < \frac{1}{2}$. $\square$

§ 3. Решение задачи Дирихле для голоморфных функций

В данном разделе приводится решение задачи Дирихле для голоморфных функций в случае пространства $C_\mu(\overline{G})$, $\mu \in \Phi_1$ и удовлетворяет условию, что $\mu(t) \cdot \ln^3 \frac{1}{t}$ почти возрастает. При этом существенную роль играют свойства функций этого пространства.

Теорема 8. Пусть $f(z) = u(r, \theta) + i \cdot v(r, \theta) \in H(G)$, где область $G = \{z : |z| < 1\}$. Пусть далее $u(r, \theta) \in C(\overline{G})$ и на $\partial G = \{z : |z| = 1\}$ удовлетворяют условию

$$|u(e^{i\theta_1}) - u(e^{i\theta_2})| \leq A \cdot \mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|), \quad (19)$$

где $\mu \in \Phi_1$. Тогда для f выполняется условие

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq C \cdot \mu(|\xi_1 - \xi_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\xi_1 - \xi_2|}, \quad (20)$$

где $\xi_1, \xi_2 \in \overline{G}$, причем $|\xi_1 - \xi_2| < \frac{1}{2}$.

Доказательство. Известно, что в G функцию $f(z)$ можно представить по формуле Шварца следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt + ic.$$

Отсюда

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2u(e^{it})e^{it}}{(e^{it} - z)^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it}) - u(e^{i\theta})}{(e^{it} - z)^2} e^{it} dt.$$

Повторяя рассуждения теоремы 3, получаем, что

$$|f'(z)| \leq C \cdot \frac{\mu(1-r)}{1-r} \cdot \ln \frac{\pi}{1-r}, \quad |z| = r < 1.$$

Тогда по теореме 6

$$|f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})| \leq C \cdot \mu(|\theta_1 - \theta_2|) \cdot \ln^2 \frac{\pi}{|\theta_1 - \theta_2|}. \quad (21)$$

Так как $\frac{2}{\pi} \cdot |\theta_1 - \theta_2| \leq |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|$, то в силу свойства функции $\mu(t)$ правую часть (21) можно заменить на

$$\mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|) \cdot \ln^2 \frac{\pi}{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|}.$$

Отсюда, используя схему доказательства (13) в теореме 7, получим, что

$$|f(r_1 e^{i\theta_1}) - f(r_1 e^{i\theta_2})| \leq C_2 \cdot \mu(r_1 |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|) \cdot \ln^2 \frac{1}{r_1 |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|}. \quad (22)$$

Повторяя схему доказательства (14) в теореме 7, получаем, используя (5)

$$|f(r_1 e^{i\theta_1}) - f(r_2 e^{i\theta_1})| \leq C_3 \cdot \mu(r_2 - r_1) \cdot \ln^2 \frac{1}{r_2 - r_1}. \quad (23)$$

Из (22) и (23) получаем, как и в теореме 7, что

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq C \cdot \mu(|\xi_1 - \xi_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|\xi_1 - \xi_2|}, \quad \xi_1, \xi_2 \in \overline{G}, \quad |\xi_1 - \xi_2| < \frac{1}{2}.$$

□

Теорема 9. Пусть функция g задана на ∂G и удовлетворяет условию

$$|g(e^{i\theta_1}) - g(e^{i\theta_2})| \leq C \cdot \mu(|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|),$$

где $\mu \in \Phi_1$, причем $\mu(t) \cdot \ln^3 \frac{1}{t}$ почти возрастает. Тогда существует единственная голоморфная в G функция f , непрерывная в замкнутом круге $\overline{G}$ и удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{Re} f = g(z), \quad z \in \partial G, \quad \operatorname{Im} f|_{z=z_0} = c_0,$$

где $z_0 \in \partial G$ — фиксированное число, причем f удовлетворяет во всех точках $\overline{G}$ условию

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq C \cdot \mu(|z_1 - z_2|) \cdot \ln^2 \frac{1}{|z_1 - z_2|}, \quad |z_1 - z_2| < \frac{1}{2}.$$

Доказательство. В качестве $f(z)$ возьмем следующую функцию:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt + ic_0.$$

Известно, что f является голоморфной в G функцией, причем $u = \operatorname{Re} f$ является непрерывной в $\overline{G}$. Построим теперь функцию $v(r, \theta)$, гармонически сопряженную с функцией $u(r, \theta)$ в круге G . Тогда по теореме 8 функция $f(z)$ удовлетворяет условию (20). □

В теореме 9 получена более точная оценка для функции $f(z)$, чем в [12]: удалось в правой части окончательной оценки добиться вместо дополнительного множителя $\ln^4 \frac{1}{|z_1 - z_2|}$ аналогичный множитель степени 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильчуков А. С., Тимофеев А. Ю. Задача Дирихле для голоморфных функций в пространствах, описываемых поведением модуля непрерывности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 1. С. 58–65.
2. Reissig M., Timofeev A. Dirichlet problems for generalized Cauchy–Riemann systems with singular coefficients // Complex variables. 2005. Vol. 73, № 1–2. P. 653–672.
3. Tutschke W. Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Klassische, funktionalanalytische und komplexe Methoden. Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik, 1978. 193 s.
4. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.
5. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
6. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950. 336 с.
7. Геронимус Я. Л. О некоторых интегральных уравнениях // ДАН СССР. 1954. Т. 98, № 1. С. 5–7.
8. Тамразов П. М. Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // Успехи математических наук. 1973. Т. 28. Вып. 1 (169). С. 131–161.
9. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 416 с.
10. Бабаев А. А., Салаев В. В. Об одном аналоге теоремы Племель–Привалова в случае негладких кривых и ее приложения // ДАН СССР. 1965. Т. 161, № 2. С. 267–269.
11. Бари Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Известия Академии наук СССР. Сер. Матем. 1955. Т. 19, № 5. С. 285–302.
12. Напалков В. В., Тимофеев А. Ю. Задача Дирихле для голоморфных функций в обобщенных пространствах Гельдера // Доклады Академии наук. 2010. Т. 432, № 3. С. 1–3.
13. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Московского матем. об-ва. 1956. № 5. С. 485–522.
14. Michlin S. G., Pröbldorf S. Singuläre Integraloperatoren. Berlin: Akademie-Verlag, 1980. 514 s.
15. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 630 с.

Поступила в редакцию 25.04.11

A. Yu. Timofeev

Dirichlet problem for holomorphic functions in spaces with determined modulus of continuity

We study and solve the Dirichlet problem for holomorphic functions in spaces with a determined modulus of continuity: the existence of the function which is holomorphic inside a disk is proved by the limit values of its real part on the disk's boundary.

Keywords: Dirichlet problem, holomorphic functions, modulus of continuity.

Mathematical Subject Classifications: 30E25

Тимофеев Алексей Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, Сыктывкарский государственный университет, 167001, Россия, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., 55.

E-mail: tim@syktsu.ru

Timofeev Aleksei Yur'evich, candidate of physics and mathematics, Syktyvkar State University, Oktyabr'skii pr., 55, Syktyvkar, 167001, Russia