Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. L. Fedorov, On the line contour Riemann–Stieltjes integral, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, Issue 3, 117–126

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.196.121.252

April 26, 2023, 15:46:34

УДК 517.518.117, 517.518.124

© Д. Л. Федоров

О КРИВОЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ РИМАНА–СТИЛТЬЕСА

Вводится понятие криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса, доказываются некоторые его свойства. Показано, что такой интеграл определяет знакопеременную меру на плоскости, указаны условия, при которых эта мера будет счётно-аддитивной.

Ключевые слова: криволинейный интеграл, интеграл Римана–Стилтьеса, счётно-аддитивная мера.

§ 1. Определение и простейшие свойства

Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены в области $D \subset \mathbb{R}^2$, Γ — ориентируемая спрямляемая кривая, целиком лежащая в D . Считаем, что концы кривой, точки A и B , принадлежат ей, так что Γ представляет собой замкнутое множество на плоскости. Назовём разбиением такой кривой множество точек $T = \{P_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ такое, что $P_0 = A$, $P_n = B$, а точка P_i лежит на кривой между P_{i-1} и P_{i+1} при $0 < i < n$. Таким образом, дуга $P_{i-1}P_i$ является частью кривой Γ и не содержит других точек разбиения T . Выберем на каждой частичной дуге $P_{i-1}P_i$ произвольным образом точку M_i и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sigma(f, g, T, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^n f(M_i)(g(P_i) - g(P_{i-1})).$$

Обозначим длину дуги $P_{i-1}P_i$ через $\ell(P_{i-1}P_i)$. Диаметром разбиения T назовём величину

$$d = d(T) = \max_i \ell(P_{i-1}P_i).$$

Определение 1. Криволинейным интегралом Римана–Стилтьеса по кривой Γ функции f по g называется выражение

$$\int_{\Gamma} f dg = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma(f, g, T, \{M_i\}),$$

при условии, что этот предел не зависит ни от выбора разбиений T , ни от выбора точек $\{M_i\}$.

В частном случае, когда Γ состоит из одной точки A , полагаем $\int_A f dg = 0$. Заметим, что если Γ — отрезок $[a, b]$ оси OX , то криволинейный интеграл Римана–Стилтьеса совпадает с классическим интегралом Римана–Стилтьеса (RS) $\int_a^b f dg$, хорошо изученным в анализе.

Исследование введённого интеграла начнём с рассмотрения простейших свойств, которые следуют непосредственно из определения.

1. Обозначим через Γ^- кривую, полученную из Γ сменой ориентации. Если интеграл

$\int_{\Gamma} f dg$ существует, то

$$\int_{\Gamma^-} f dg = - \int_{\Gamma} f dg.$$

2. Если интеграл $\int_{\Gamma} f dg$ существует, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то

$$\int_{\Gamma} (\lambda f) d(\mu g) = \lambda \mu \int_{\Gamma} f dg.$$

3. Если существуют интегралы $\int_{\Gamma} f_1 dg$ и $\int_{\Gamma} f_2 dg$, то

$$\int_{\Gamma} (f_1 + f_2) dg = \int_{\Gamma} f_1 dg + \int_{\Gamma} f_2 dg.$$

4. Если существуют интегралы $\int_{\Gamma} f dg_1$ и $\int_{\Gamma} f dg_2$, то

$$\int_{\Gamma} f d(g_1 + g_2) = \int_{\Gamma} f dg_1 + \int_{\Gamma} f dg_2.$$

5. Если $f(x, y) \equiv C = \text{const}$, то интеграл $\int_{\Gamma} f dg$ существует для любой функции $g(x, y)$, любой спрямляемой кривой Γ и

$$\int_{\Gamma} f dg = C(g(B) - g(A)).$$

В частности, если $A = B$, то есть кривая замкнутая, то $\int_{\Gamma} C dg = 0$.

6. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причём начало Γ_2 совпадает с концом кривой Γ_1 . При этом существуют интегралы $\int_{\Gamma_1} f dg$ и $\int_{\Gamma_2} f dg$. Тогда

$$\int_{\Gamma} f dg = \int_{\Gamma_1} f dg + \int_{\Gamma_2} f dg.$$

Известно, что для интеграла Римана–Стилтьеса по отрезку обратное утверждение неверно (см., например, [3]). Следовательно, и для криволинейного интеграла обратное утверждение не имеет места.

Теорема 1. Пусть кривая Γ допускает взаимно однозначное и взаимно непрерывное представление: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, а ориентация Γ соответствует возрастанию параметра t . Обозначим $F(t) = f(x(t), y(t))$, $G(t) = g(x(t), y(t))$. Тогда интеграл $\int_{\Gamma} f dg$ существует тогда и только тогда, когда существует интеграл (RS) $\int_a^b F(t) dG(t)$ и в этом случае интегралы равны.

Доказательство. Любому разбиению $T = \{P_i\}$ кривой Γ соответствует некоторое разбиение $\tau = \{t_i\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что $P_i = (x(t_i), y(t_i))$, $i = 0, 1, \dots, n$. Заметим, что такое соответствие между разбиениями взаимно однозначно и уменьшение диаметра разбиения T влечёт уменьшение диаметра разбиения τ . Также набору точек $\{M_i\}$, где $M_i \in P_{i-1}P_i$, $i = 1, \dots, n$ соответствует набор точек $\{\xi_i\}$ такой, что $M_i = (x(\xi_i), y(\xi_i))$, $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$, $i = 1, \dots, n$. Отсюда получаем равенство между интегральными суммами

$$\sum_{i=1}^n f(M_i)(g(P_i) - g(P_{i-1})) = \sum_{i=1}^n F(\xi_i)(G(t_i) - G(t_{i-1})).$$

Поэтому при измельчении разбиения T (или τ) и существовании предела одной из интегральных сумм следует сходимость и другой интегральной суммы, а также равенство обоих пределов.

□

Определение 2. Вариацией функции $g(x, y)$ на кривой Γ назовём выражение

$$\bigvee_{\Gamma}(g) = \sup_T \sum_{i=1}^n |g(P_i) - g(P_{i-1})|, \quad (1.1)$$

где точная верхняя грань берётся по всем разбиениям $T = \{P_i\}$ кривой Γ . Если величина (1.1) конечна, то функцию g будем называть функцией ограниченной вариации на кривой Γ .

Лемма 1. Если функция $g(x, y)$ имеет ограниченную вариацию на кривой Γ , заданной равенствами $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, то функция $G(t) = g(x(t), y(t))$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем снова взаимно-однозначное соответствие между разбиениями T кривой Γ и разбиениями τ отрезка $[a, b]$, о которой шла речь при доказательстве теоремы 1. Имеем

$$\sum_{i=1}^n |G(t_i) - G(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |g(P_i) - g(P_{i-1})|,$$

откуда находим $\bigvee_a^b(G) = \bigvee_{\Gamma}(g)$. □

Следствие 1. Интеграл $\int_{\Gamma} f dg$ существует, если функция $f(x, y)$ непрерывна на Γ , а $g(x, y)$ имеет ограниченную вариацию на Γ .

Действительно, в силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ на $[a, b]$ будет непрерывна и функция $F(t) = f(x(t), y(t))$. Тогда по известному из анализа признаку существует интеграл (RS) $\int_a^b F dG$, а по теореме 1 вместе с ним и интеграл $\int_{\Gamma} f dg$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной области D вплоть до её границы, а функция $g(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области D , кривая Γ целиком лежит в D . Тогда интеграл $\int_{\Gamma} f dg$ сводится к классическому криволинейному интегралу второго рода:

$$\int_{\Gamma} f dg = \int_{\Gamma} f g'_x dx + f g'_y dy. \quad (1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точки $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ составляют разбиение Γ . Составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(M_i)(g(P_i) - g(P_{i-1})), \quad (1.3)$$

где $\{M_i\}$ — произвольный набор точек, лежащих на дугах $P_{i-1}P_i$. По формуле Тейлора для функции двух переменных имеем

$$g(P_i) - g(P_{i-1}) = g'_x(N_i)\Delta x_i + g'_y(N_i)\Delta y_i, \quad (1.4)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, а точка N_i лежит на отрезке прямой $P_{i-1}P_i$. По условиям теоремы криволинейный интеграл в правой части (1.2) существует. Составим для него интегральную сумму

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n f(M_i)(g'_x(M_i)\Delta x_i + g'_y(M_i)\Delta y_i).$$

Подставим равенство (1.4) в (1.3) и оценим разность

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma| &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(M_i)(g'_x(M_i) - g'_x(N_i))\Delta x_i + f(M_i)(g'_y(M_i) - g'_y(N_i))\Delta y_i \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta x_i \right| \cdot |g'_x(M_i) - g'_x(N_i)| + \left| \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta y_i \right| \cdot |g'_y(M_i) - g'_y(N_i)| \quad (1.5) \end{aligned}$$

Так как $f(x, y)$ непрерывна, то

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta x_i = \int_{\Gamma} f(x, y) dx \quad \text{и} \quad \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta y_i = \int_{\Gamma} f(x, y) dy.$$

Поэтому для некоторого $C > 0$, не зависящего ни от разбиения T , ни от точек $\{M_i\}$, имеют место оценки

$$\left| \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta x_i \right| \leq C \quad \text{и} \quad \left| \sum_{i=1}^n f(M_i)\Delta y_i \right| \leq C.$$

Функции g'_x и g'_y равномерно непрерывны в $\bar{D}$, поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых двух точек M и N , отстоящих друг от друга на расстоянии меньше δ , будут выполняться неравенства

$$|g'_x(M) - g'_x(N)| < \frac{\varepsilon}{2C}, \quad |g'_y(M) - g'_y(N)| < \frac{\varepsilon}{2C}. \quad (1.6)$$

Пусть $d(T) < \delta$, тогда дуга $P_{i-1}P_i$ лежит в δ -окрестности точки M_i . Точка N_i также лежит в этой окрестности вместе со всем отрезком прямой $P_{i-1}P_i$. Следовательно, для точек M_i и N_i выполнены неравенства (1.6) и в силу (1.5) имеем

$$|\sigma_1 - \sigma| < \varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma_1 = \int_{\Gamma} f g'_x dx + f g'_y dy.$$

□

Следствие 2. Пусть Γ — замкнутая кривая, ограничивающая область $\Omega \subset D$, функция f непрерывно дифференцируема в D и существуют смешанные производные g''_{xy} и g''_{yx} , которые также непрерывны в D . Тогда

$$\int_{\Gamma} f dg = \iint_{\Omega} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} dx dy. \quad (1.7)$$

Действительно, используя формулу Грина для криволинейного интеграла в правой части (1.2), получим

$$\int_{\Gamma} f dg = \iint_{\Omega} ((f g'_y)'_x - (f g'_x)'_y) dx dy = \iint_{\Omega} (f'_x g'_y + f g''_{yx} - f'_y g'_x - f g''_{xy}) dx dy,$$

откуда следует (1.7).

Теорема 3. Пусть AB — спрямляемая кривая и существует интеграл $\int_{AB} f dg$. Тогда интеграл $\int_{AB} g df$ также существует и

$$\int_{AB} g df = f(B)g(B) - f(A)g(A) - \int_{AB} f dg. \quad (1.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T = \{P_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ — произвольное разбиение AB , $M_i \in P_{i-1}P_i$, $i = 1, \dots, n$ — набор точек на AB . Составим интегральную сумму для интеграла в левой части (1.8) и преобразуем её:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^n g(M_i)(f(P_i) - f(P_{i-1})) = \sum_{i=1}^n g(M_i)f(P_i) - \sum_{i=1}^n g(M_i)f(P_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n g(M_i)f(P_i) - \sum_{i=0}^{n-1} g(M_{i+1})f(P_i) = \\ &= g(M_n)f(P_n) - g(M_1)f(P_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(P_i)(g(M_i) - g(M_{i+1})). \quad (1.9)\end{aligned}$$

Примем во внимание, что $P_0 = A$, $P_n = B$ и к правой части (1.9) добавим и вычтем выражение $g(B)f(B) - g(A)f(A)$:

$$\begin{aligned}\sigma &= g(B)f(B) - g(A)f(A) + f(B)(g(M_n) - g(B)) - \\ &\quad - f(A)(g(M_1) - g(A)) - \sum_{i=1}^{n-1} f(P_i)(g(M_{i+1}) - g(M_i)) = \\ &= f(B)g(B) - g(A)f(A) - \sum_{i=0}^n f(P_i)(g(M_{i+1}) - g(M_i)). \quad (1.10)\end{aligned}$$

Здесь добавлены точки $M_{n+1} = B$, $M_0 = A$. Заметим теперь, что $P_i \in M_iM_{i+1}$, а сумма в правой части (1.10) стремится к интегралу $\int_{AB} f dg$ при измельчении разбиения. Отсюда получаем равенство (1.8). $\square$

Следствие 3. Если $\Gamma = AB$ — замкнутая кривая, то $A = B$ и

$$\int_{AB} f dg = - \int_{AB} g df.$$

В частности, если $f = g$, то $\int_{\Gamma} f df = 0$.

Теорема 4. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на Γ , а $g(x, y)$ имеет ограниченную вариацию на Γ . Тогда справедлива оценка

$$\left| \int_{\Gamma} f dg \right| \leq \max_{\Gamma} |f(x, y)| \bigvee_{\Gamma}(g). \quad (1.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим интегральную сумму

$$\begin{aligned}|\sigma| &= \left| \sum_{i=1}^n f(M_i)(g(P_i) - g(P_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(M_i)| |g(P_i) - g(P_{i-1})| \leq \\ &\leq \max_i |f(M_i)| \sum_{i=1}^n |g(P_i) - g(P_{i-1})| \leq \max_{\Gamma} |f(x, y)| \bigvee_{\Gamma}(g).\end{aligned}$$

При измельчении разбиения неравенство сохранится и в пределе получится неравенство (1.11). $\square$

Следствие 4. Пусть функции $f_n(x, y)$ непрерывны на кривой Γ и последовательность $f_n(x, y)$ сходится на Γ равномерно к функции $f(x, y)$, функция $g(x, y)$ имеет ограниченную вариацию на Γ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f_n dg = \int_{\Gamma} f dg.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $V = \bigvee_{\Gamma}(g)$. При достаточно больших n справедлива оценка $\max_{\Gamma} |f_n(x, y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{V}$ для произвольного заданного наперёд $\varepsilon > 0$. В силу (1.11) тогда

$$\left| \int_{\Gamma} f_n dg - \int_{\Gamma} f dg \right| < \varepsilon,$$

что и означает требуемое. $\square$

§ 2. Криволинейный интеграл как знакопеременная мера

Покажем теперь, что с помощью криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса можно определить знакопеременную меру на плоскости. Будем предполагать, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на всей плоскости, $g(x, y)$ имеет ограниченную вариацию на любом ограниченном отрезке, параллельном оси OX или OY .

Пусть $\mathfrak{S}$ — полукольцо прямоугольников вида $\Pi = [a, b) \times [c, d)$. Определим на $\mathfrak{S}$ функцию

$$m(\Pi) = m(f, g; \Pi) = \int_{\partial\Pi^+} f dg, \quad (2.1)$$

где $\partial\Pi^+$ — граница прямоугольника Π , ориентированная в положительном направлении, то есть против часовой стрелки. Докажем аддитивность функции m . Если $a < a_1 < b$, то

$$\Pi = [a, b) \times [c, d) = ([a, a_1) \times [c, d)) \cup ([a_1, b) \times [c, d)) = \Pi_1 \cup \Pi_2,$$

при этом прямоугольники Π_1 и Π_2 не пересекаются. Обозначим через $\gamma = \partial\Pi_1 \cap \partial\Pi_2 = \{x = a_1, c \leq y < d\}$. Тогда

$$m(\Pi) = \int_{\partial\Pi^+} f dg + \int_{\gamma^+} f dg + \int_{\gamma^-} f dg = \int_{\partial\Pi_1^+} f dg + \int_{\partial\Pi_2^+} f dg = m(\Pi_1) + m(\Pi_2),$$

потому что общий участок границы γ между Π_1 и Π_2 при интегрировании проходится дважды, причём в разных направлениях.

Перечислим некоторые свойства меры m , вытекающие из свойств криволинейного интеграла Римана–Стилтьеса.

1. $m(f, g; \Pi) = -m(g, f; \Pi)$.
2. $m(f, f; \Pi) = 0$.
3. $m(C, g; \Pi) = 0$, где $C = \text{const}$.
4. Если $g(x, y)$ непрерывно дифференцируема, то

$$m(f, g; \Pi) = m(fg'_x, x; \Pi) + m(fg'_y, y; \Pi).$$

5. Линейность по f : $m(\lambda f_1 + \mu f_2, g; \Pi) = \lambda m(f_1, g; \Pi) + \mu m(f_2, g; \Pi)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Аналогично, линейность по g .
6. Если $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$, то мера m совпадает с обычной мерой Лебега на плоскости. Это следует из равенства (1.7).
7. Если $f(x, y) \equiv f(x)$, $g(x, y) \equiv g(y)$, то $m(f, g; \Pi) = (f(b) - f(a))(g(d) - g(c))$.

Следующее утверждение показывает, что мера m может быть представлена как двумерная мера Лебега–Стилтьеса. Напомним, что такая мера определяется на полукольце $\mathfrak{S}$ при помощи некоторой функции $h(x, y)$ равенством [1]

$$\mu([a, b) \times [c, d)) = h(b, d) - h(b, c) - h(a, d) + h(a, c). \quad (2.2)$$

Лемма 2. Пусть (x_0, y_0) — фиксированная точка на плоскости, $\Pi(x, y)$ — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и диагональю, соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y) . Обозначим

$$h(x, y) = \text{sign}((x - x_0)(y - y_0)) t(\Pi(x, y)). \quad (2.3)$$

Тогда для произвольного $\Pi \in \mathfrak{S}$ выполняется равенство $t(\Pi) = \mu(\Pi)$, где мера μ определена равенством (2.2).

Доказательство леммы проводится непосредственным вычислением правой части равенства (2.2) с разбором случаев, когда точка (x_0, y_0) лежит внутри прямоугольника Π и вне его.

Таким образом, для прямоугольного множества мера может вычисляться по формулам (2.1) или (2.2). Однако для не прямоугольного множества формула (2.1), по-видимому, удобнее, чем формула (2.2).

Дальнейшие утверждения связаны с исследованием непрерывности меры t и её счётной аддитивности.

Лемма 3. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной области D , последовательность областей $\Omega_n \subset D$ такова, что $\bigvee_{\partial\Omega_n} (g) \leq C$, причём $C > 0$ не зависит от n и $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Omega_n) = 0$, где $d(\Omega)$ — диаметр области Ω . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_n} f dg = 0.$$

Доказательство. Так как $f(x, y)$ равномерно непрерывна в $\bar{D}$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при $d(\Omega) < \delta$ и для любых двух точек $M_1, M_2 \in \bar{\Omega}$, будет $|f(M_1) - f(M_2)| < \frac{\varepsilon}{C}$. По условию теоремы существует N такое, что $d(\Omega_n) < \delta$ при $n > N$. Зафиксируем $n > N$ и пусть $M_0 \in \bar{\Omega}_n$ — произвольная точка, тогда по свойству 5 $\int_{\partial\Omega_n} f(M_0) dg(M) = 0$, так как $\partial\Omega_n$ — замкнутая кривая. Поэтому

$$\left| \int_{\partial\Omega_n} f dg \right| = \left| \int_{\partial\Omega_n} (f(M) - f(M_0)) dg(M) \right| \leq \max_{\partial\Omega_n} |f(M) - f(M_0)| \bigvee_{\partial\Omega_n} (g) < \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon.$$

Лемма доказана. $\square$

Доказательство следующего утверждения получается, по существу, небольшим изменением доказательства теоремы Хелли [2, 4].

Лемма 4. Предположим, что:

- 1) семейство функций $f_n(x)$ равностепенно непрерывно на $[a, b]$;
- 2) семейство функций $g_n(x)$ имеет равномерно ограниченную вариацию на $[a, b]$;
- 3) последовательности $f_n(x)$ и $g_n(x)$ сходятся поточечно на $[a, b]$ к функциям $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg_n = \int_a^b f dg.$$

Доказательство. По определению условие равностепенной непрерывности означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2, |x_1 - x_2| < \delta \quad \forall n: |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.4)$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

откуда следует, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Условие 2) теоремы означает, что при некотором $K > 0$

$$\sum_{k=1}^m |g_n(x_k) - g_n(x_{k-1})| \leq K, \quad (2.5)$$

причём для всех n и любого разбиения $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ отрезка $[a, b]$. В пределе при $n \rightarrow \infty$ из (2.5) получаем

$$\sum_{k=1}^m |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq K,$$

что означает ограниченность вариации функции $g(x)$. Таким образом, интеграл $\int_a^b f dg$ существует. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $|x_1 - x_2| < \delta$ для всех n выполнялось неравенство

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Выберем теперь разбиение $\{x_k\}_{k=0}^m$ отрезка $[a, b]$ с диаметром $d = \max_k (x_k - x_{k-1}) < \delta$. Пусть

σ_n — интегральная сумма для интеграла $\int_a^b f_n dg_n$, построенная по этому разбиению. Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \sigma_n - \int_a^b f_n dg_n \right| &= \left| \sum_{k=1}^m f_n(\xi_k) (g_n(x_k) - g_n(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n dg_n \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f_n(\xi_k) - f_n(x)) dg_n(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f_n(\xi_k) - f_n(x)| dV(g_n) < \frac{\varepsilon}{3K} \sum_{k=1}^m V_{x_{k-1}}^{x_k}(g_n) = \frac{\varepsilon}{3K} V_a^b(g_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Здесь $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ — произвольный набор точек. Для функции $f(x)$ при том же значении δ верно неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3K}$ как только $|x_1 - x_2| < \delta$. Используя прежнее

разбиение и обозначая через σ соответствующую интегральную сумму для интеграла $\int_a^b f dg$,

аналогично можно получить оценку $\left| \sigma - \int_a^b f dg \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Из условия поточечной сходимости последовательностей $f_n(x)$ и $g_n(x)$ следует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ для произвольного разбиения $[a, b]$.

Следовательно, при некотором N будет иметь место неравенство $|\sigma_n - \sigma| < \frac{\varepsilon}{3}$, если только $n > N$. Отсюда

$$\left| \int_a^b f_n dg_n - \int_a^b f dg \right| \leq \left| \int_a^b f_n dg_n - \sigma_n \right| + |\sigma_n - \sigma| + \left| \int_a^b f dg - \sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 5. Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Pi}^0 = [a, b] \times [c, d]$ и удовлетворяют условиям:

- 1) функция $f(x, y)$ непрерывна в $\bar{\Pi}^0$;

- 2) $\sup_{\Pi \subset \bar{\Pi}^0} \bigvee (g) < +\infty$, где точная верхняя грань берется по всем прямоугольникам $\Pi \in \mathfrak{S}$, лежащим в $\bar{\Pi}^0$;
- 3) для произвольного $y_0 \in (c, d]$ $g(x, y_0 - 0) = g(x, y_0)$ при всех $x \in [a, b]$, кроме, возможно, конечного набора точек $T(y_0) = \{x_1, \dots, x_p\} \subset [a, b]$;
- 4) для произвольного $x_0 \in (a, b]$ $g(x_0 - 0, y) = g(x_0, y)$ при всех $y \in [c, d]$, кроме, возможно, конечного набора точек $S(x_0) = \{y_1, \dots, y_q\} \subset [c, d]$.

Тогда для любых $y_0 \in (c, d]$, $x_0 \in (a, b]$ справедливы равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} m([a, b] \times [y_0 - \varepsilon, y_0]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} m([x_0 - \varepsilon, x_0] \times [c, d]) = 0. \quad (2.6)$$

Доказательство. Докажем равенство нулю первого из пределов в (2.6), второе равенство доказывается аналогично. Обозначим $\Pi_\varepsilon = [a, b] \times [y_0 - \varepsilon, y_0]$. Пусть сначала на $[a, b]$ нет точек из множества $T(y_0)$. Криволинейный интеграл по границе Π_ε разбивается на интегралы по сторонам прямоугольника с учётом ориентации, то есть

$$\begin{aligned} m(\Pi_\varepsilon) = \int_{\partial \Pi_\varepsilon^+} f dg &= \int_a^b f(x, y_0 - \varepsilon) dg(x, y_0 - \varepsilon) + \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0} f(b, y) dg(b, y) - \\ &- \int_a^b f(x, y_0) dg(x, y_0) - \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0} f(a, y) dg(a, y). \end{aligned}$$

По теореме об оценке для интеграла Римана–Стилтьеса

$$\left| \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0} f(b, y) dg(b, y) \right| \leq \max_{y_0 - \varepsilon \leq y \leq y_0} |f(b, y)| \bigvee_{y_0 - \varepsilon}^{y_0} (g(b, \cdot)).$$

Из общего курса теории функций действительной переменной известно, что если функция $g(x)$ имеет ограниченную вариацию и непрерывна слева в некоторой точке x_0 , то функция $v(x) = \bigvee_a^x (g)$ также будет непрерывной слева в этой же точке [3]. Отсюда, на основании условия 3) теоремы получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0} f(b, y) dg(b, y) = 0.$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{y_0 - \varepsilon}^{y_0} f(a, y) dg(a, y) = 0.$$

Из условия 1) теоремы следует, что семейство функций $f(\cdot, y)$, $y \in [c, d]$ равномерно непрерывно на $[a, b]$. Поэтому, по лемме 4

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^b f(x, y_0 - \varepsilon) dg(x, y_0 - \varepsilon) = \int_a^b f(x, y_0) dg(x, y_0).$$

Отсюда $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} m(\Pi_\varepsilon) = 0$.

Пусть теперь $[a, b] \cap T(y_0) \neq \emptyset$. Так как множество $T(y_0)$ конечно, то можно указать такое $\sigma > 0$, что каждый из интервалов $(x_k - \sigma, x_k + \sigma)$, $k = 1, \dots, p$ не содержит других точек из множества $T(y_0)$, кроме x_k . Более того, значения $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно выбрать так, чтобы для заданного наперед $\delta > 0$ было $m([x_k - \sigma, x_k + \sigma] \times [y_0 - \varepsilon, y_0]) < \frac{\delta}{2p}$. Это следует из леммы 3. Очевидно,

$$[a, b] \setminus \left(\bigcup_{k=1}^p [x_k - \sigma, x_k + \sigma] \right) = \bigcup_{k=1}^r [\alpha_k, \beta_k],$$

причем каждый из промежутков $[\alpha_k, \beta_k), k = 1, \dots, r$ не содержит точек из множества $T(y_0)$. Поэтому по доказанному ранее

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} m([\alpha_k, \beta_k) \times [y_0 - \varepsilon, y_0)) = 0, \quad k = 1, \dots, r.$$

Значит, при достаточно малом ε будет $m([\alpha_k, \beta_k) \times [y_0 - \varepsilon, y_0)) < \frac{\delta}{2r}$. В итоге отсюда получаем

$$\begin{aligned} m(\Pi_\varepsilon) &\leq \sum_{k=1}^p m([x_k - \sigma, x_k + \sigma) \times [y_0 - \varepsilon, y_0)) + \sum_{k=1}^r m([\alpha_k, \beta_k) \times [y_0 - \varepsilon, y_0)) < \\ &< \frac{\delta}{2p} \cdot p + \frac{\delta}{2r} \cdot r = \delta. \end{aligned}$$

В силу произвольности δ получаем требуемое утверждение. $\square$

Следствие 5. При условиях теоремы 5 мера m счётно-аддитивна на полукольце $\mathfrak{S}$.

Доказательство. Известно, что мера Лебега–Стилтьеса счётно-аддитивна, если функция $h(x, y)$, с помощью которой она задаётся, непрерывна слева по каждой из двух переменных при фиксированном значении другой переменной [1, 3]. По доказанной теореме для функции, определяемой равенством (2.3) это свойство будет выполняться. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.
2. Дерр В. Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, 2008. 384 с.
3. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
4. Пугачёв В. С. Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во МАИ, 1996. 744 с.

Поступила в редакцию 24.03.11

D. L. Fedorov

On the line contour Riemann-Stieltjes integral

We introduce the notion of the line contour Riemann-Stieltjes integral and describe some of its properties. In particular, we show that this integral determines a signed measure on a plane, and specify the sufficient conditions for this measure to be countably additive.

Keywords: curve integral, Riemann-Stieltjes integral, countably additive measure.

Mathematical Subject Classifications: 26A42, 28A12

Федоров Дмитрий Леонидович, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: fdl@udsu.ru

Fedorov Dmitrii Leonidovich, candidate of physics and mathematics, associate professor, department of mathematical analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1 (build. 4), Izhevsk, 426034, Russia.