Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin, Quasi-levels of the discrete Schrödinger equation with a decreasing potential on a graph, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2009, Issue 3, 104–113

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.237.206.68

April 26, 2023, 11:59:58

УДК 517.958 : 530.145.6

© Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин

КВАЗИУРОВНИ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ГРАФЕ

Для дискретного оператора Шредингера на графе с вершинами на пересечении двух прямых, возмущенного убывающим потенциалом вида εV , доказано, что в окрестности нуля для малых ε нет ненулевых квазиуровней.

Ключевые слова: дискретное уравнение Шредингера, собственное значение, резонанс.

Введение

Во многих физических работах (см., напр., [1–6]) изучаются дискретные модели на графах. При этом цепочки узлов графа моделируют квантовую проволоку или квантовую точку, а разностный оператор, область определения которого состоит из функций, заданных на узлах графа, представляет собой оператор Шредингера (то есть оператор энергии, или гамильтониан электрона, находящегося в данной структуре) в приближении сильной связи. Кроме того, подобные операторы возникают в теории спиновых волн при решении уравнения Гейзенберга с помощью анзаца Бете для одномагнитных состояний (состояний с одним перевернутым спином) в цепочках атомов (см. [7]).

Несмотря на физическую актуальность упомянутых задач, математических работ, исследующих данные модели, почти нет; имеющиеся работы относятся, как правило, к решеткам $\mathbb{Z}^d$ (см., напр., [8–11]). Положим $\Gamma = (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Z})$ (вершины графа располагаем в $\mathbb{R}^2$ лишь для удобства обозначений). Обозначим через $l^2(\Gamma)$ гильбертово пространство функций $\psi(n, m)$, где $(n, m) \in \Gamma$, со скалярным произведением

$$(\psi, \varphi) = \sum_{(n,m) \in \Gamma} \psi(n, m) \overline{\varphi(n, m)}.$$

Определим ограниченный самосопряженный оператор H в $l^2(\Gamma)$ следующими формулами

$$\begin{aligned} (H\psi)(0, 0) &= \psi(1, 0) + \psi(-1, 0) + \psi(0, 1) + \psi(0, -1), \\ (H\psi)(n, 0) &= \psi(n+1, 0) + \psi(n-1, 0), \quad n \neq 0, \\ (H\psi)(0, m) &= \psi(0, m+1) + \psi(0, m-1), \quad m \neq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В соответствии со сказанным выше, данный оператор, а также оператор более общего вида $H + V$, где $V = V(n, m)$, является, во-первых, гамильтонианом электрона вблизи пересечения двух квантовых проволок, при этом потенциал V описывает влияние примесей (см. [5]). Во-вторых, $H + V$ представляет собой гамильтониан одномагнитных состояний для пересекающихся цепочек атомов; в таком подходе V также описывает воздействие примесей (см. [12]), а также, при рассмотрении бесконечных цепочек, как в данной статье, заменяет наложение граничных условий.

Спектр и существенный спектр оператора A обозначим $\sigma(A)$ и $\sigma_{ess}(A)$ соответственно.

§ 1. Спектр и резольвента невозмущенного оператора

Теорема 1. *Существенный спектр оператора H совпадает с $[-2, 2]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем оператор $F : l^2(\Gamma) \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ (преобразование Фурье) следующей формулой:

$$(F\psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\psi(0,0) + \psi(1,0)e^{2ix} + \psi(-1,0)e^{-2ix} + \psi(2,0)e^{4ix} + \\ + \psi(-2,0)e^{-4ix} + \psi(3,0)e^{6ix} + \psi(-3,0)e^{-6ix} + \dots + \psi(0,1)e^{ix} + \psi(0,-1)e^{-ix} + \\ + \psi(0,2)e^{3ix} + \psi(0,-2)e^{-3ix} + \psi(0,3)e^{5ix} + \psi(0,-3)e^{-5ix} + \dots].$$

Из равенства Парсеваля следует, что оператор F унитарен. Положим $\hat{H} = FHF^{-1}$. Для $\hat{\psi} \in L^2[-\pi, \pi]$ имеем

$$\begin{aligned} \hat{H}\hat{\psi}(x) = FHF^{-1}\hat{\psi}(x) = FH\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \left[\psi(1,0) + \psi(-1,0) + \psi(0,1) + \psi(0,-1) + \right. \\ & + (\psi(0,0) + \psi(2,0))e^{2ix} + (\psi(-2,0) + \psi(0,0))e^{-2ix} + \\ & + (\psi(1,0) + \psi(3,0))e^{4ix} + (\psi(-3,0) + \psi(-1,0))e^{-4ix} + (\psi(2,0) + \psi(4,0))e^{6ix} + \\ & + (\psi(-4,0) + \psi(-2,0))e^{-6ix} + \dots + (\psi(0,0) + \psi(0,2))e^{ix} + (\psi(0,-2) + \psi(0,0))e^{-ix} + \\ & + (\psi(0,1) + \psi(0,3))e^{3ix} + (\psi(0,-3) + \psi(0,-1))e^{-3ix} + (\psi(0,2) + \psi(0,4))e^{5ix} + \\ & \left. + (\psi(0,-4) + \psi(0,-2))e^{-5ix} + \dots \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{2ix} \left(\psi(0,0) + \psi(1,0)e^{2ix} + \psi(-1,0)e^{-2ix} + \right. \right. \\ & \left. + \psi(2,0)e^{4ix} + \psi(-2,0)e^{-4ix} + \psi(3,0)e^{6ix} + \psi(-3,0)e^{-6ix} + \dots \right) + \\ & + e^{-2ix} \left(\psi(0,0) + \psi(1,0)e^{2ix} + \psi(-1,0)e^{-2ix} + \psi(2,0)e^{4ix} + \psi(-2,0)e^{-4ix} + \right. \\ & \left. + \psi(3,0)e^{6ix} + \psi(-3,0)e^{-6ix} + \dots \right) + e^{2ix} \left(\psi(0,1)e^{ix} + \psi(0,-1)e^{-ix} + \right. \\ & \left. + \psi(0,2)e^{3ix} + \psi(0,-2)e^{-3ix} + \psi(0,3)e^{5ix} + \psi(0,-3)e^{-5ix} + \dots \right) + \\ & + e^{-2ix} \left(\psi(0,1)e^{ix} + \psi(0,-1)e^{-ix} + \psi(0,2)e^{3ix} + \psi(0,-2)e^{-3ix} + \psi(0,3)e^{5ix} + \right. \\ & \left. + \psi(0,-3)e^{-5ix} + \dots \right) + \psi(0,1) + \psi(0,-1) + \psi(0,0)e^{ix} + \psi(0,0)e^{-ix} - \\ & \left. - \psi(0,-1)e^{ix} - \psi(0,1)e^{-ix} \right] = 2 \cos 2x \cdot \hat{\psi}(x) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\psi(0,1) + \psi(0,-1) + \psi(0,0)e^{ix} + \psi(0,0)e^{-ix} - \psi(0,-1)e^{ix} - \psi(0,1)e^{-ix} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, $\hat{H} = A + B$, где $A\hat{\psi}(x) = 2 \cos 2x \hat{\psi}(x)$ и

$$\begin{aligned} B\hat{\psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\psi(0,1) + \psi(0,-1) + \psi(0,0)e^{ix} + \psi(0,0)e^{-ix} - \psi(0,-1)e^{ix} - \psi(0,1)e^{-ix} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \hat{\psi}(t) (e^{-it} + e^{it} + e^{-ix} + e^{ix} - e^{it}e^{ix} - e^{-it}e^{-ix}) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \hat{\psi}(t) (\cos t + \cos x - \cos(t+x)) dt. \end{aligned}$$

Оператор B является конечномерным и, следовательно, компактным. В силу унитарной эквивалентности операторов H и $\hat{H}$ и теоремы об относительно компактных возмущениях (см. [13]) имеем

$$\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(\hat{H}) = \sigma_{ess}(A) = \sigma(A) = [-2, 2].$$

□

Для вычисления резольвенты оператора H понадобится обратная функция к функции Жуковского

$$g(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}.$$

Она определена на двулистной римановой поверхности, листы которой склеиваются по отрезку $[-1, 1]$, при этом ± 1 — это точки ветвления. Для функции $g(\lambda)$ на первом листе при $z > 1$ берем, по определению, аналитическое продолжение арифметического корня.

Введем в рассмотрение оператор H_0 , действующий в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$(H_0\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Известно [16], что $\sigma(H_0) = [-2, 2]$. Ядро $G_0(n, m, \lambda)$ резольвенты $R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda)^{-1}$ оператора H_0 имеет вид (см. [14])

$$G_0(n, m, \lambda) = G_0(n-m, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|n-m|} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left(g\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right)^{|n-m|}. \quad (2)$$

Функция G_0 аналитически продолжается по λ на двулистную риманову поверхность $\mathcal{M}$, определяемую функцией $g(\lambda/2)$, листы которой склеиваются вдоль $[-2, 2]$; при этом на первом листе G_0 экспоненциально убывает при $|n-m| \rightarrow \infty$ и является на нем ядром резольвенты.

Введем обозначение

$$f(\varphi) = f(\lambda, \varphi) = (R_0(\lambda)\varphi)(1) + (R_0(\lambda)\varphi)(-1). \quad (3)$$

Далее, определим функцию $\delta(n) = \delta_{0n}$, где δ_{nm} — символ Кронекера. Наконец, для произвольной функции $\varphi(n, m)$, определенной на Γ , будем пользоваться обозначениями

$$\varphi_1(n) = \varphi(n, 0), \quad \varphi_2(m) = \varphi(0, m), \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

при этом $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Лемма 1. Резольвента $R(\lambda)$ оператора H имеет вид

$$R(\lambda)\varphi(n, m) = \begin{cases} (R_0(\lambda)\varphi_1)(n) - \frac{f(\varphi_2) - f(\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} (R_0(\lambda)\delta)(n), & n \in \mathbb{Z}, m = 0, \\ (R_0(\lambda)\varphi_2)(m) - \frac{f(\varphi_1) - f(\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} (R_0(\lambda)\delta)(m), & m \in \mathbb{Z}, n = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Резольвенту $R(\lambda)$ ищем, решая уравнение

$$(H - \lambda)\psi = \varphi, \quad \varphi \in l^2(\Gamma) \quad (4)$$

относительно ψ для $\lambda \notin [-2, 2] = \sigma_{ess}(H)$ (см. теорему 1). С учетом (1) уравнение (4) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} \psi(n+1, 0) + \psi(n-1, 0) - \lambda\psi(n, 0) = \varphi(n, 0), & n \neq 0, \\ \psi(0, m+1) + \psi(0, m-1) - \lambda\psi(0, m) = \varphi(0, m), & m \neq 0, \\ \psi(1, 0) + \psi(-1, 0) + \psi(0, 1) + \psi(0, -1) - \lambda\psi(0, 0) = \varphi(0, 0). \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) эквивалентна системе

$$\begin{cases} ((H_0 - \lambda)\psi_1)(n) = \varphi_1(n) - (\psi_2(1) + \psi_2(-1))\delta(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ ((H_0 - \lambda)\psi_2)(m) = \varphi_2(m) - (\psi_1(1) + \psi_1(-1))\delta(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (6)$$

с наложенным условием $\psi_1(0) = \psi_2(0)$. Докажем, что если $\varphi \in l^2(\Gamma)$ (откуда $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$), то данное условие выполняется автоматически. Действительно, при $n = m = 0$ из (6) получаем

$$\begin{cases} \psi_1(1) + \psi_1(-1) - \lambda\psi_1(0) = \varphi_1(0) - (\psi_2(1) + \psi_2(-1)), \\ \psi_2(1) + \psi_2(-1) - \lambda\psi_2(0) = \varphi_2(0) - (\psi_1(1) + \psi_1(-1)). \end{cases}$$

Отсюда в силу равенства $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ имеем $\lambda(\psi_1(0) - \psi_2(0)) = 0$ и $\psi_1(0) = \psi_2(0)$.

Поддействовав на обе части каждого из уравнений системы (6) оператором $R_0(\lambda)$, получим систему

$$\begin{cases} \psi_1(n) = (R_0(\lambda)\varphi_1)(n) - (\psi_2(1) + \psi_2(-1))(R_0(\lambda)\delta)(n), & n \in \mathbb{Z} \\ \psi_2(m) = (R_0(\lambda)\varphi_2)(m) - (\psi_1(1) + \psi_1(-1))(R_0(\lambda)\delta)(m), & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (7)$$

Из (7) находим линейную систему относительно $\psi_1(1) + \psi_1(-1)$ и $\psi_2(1) + \psi_2(-1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & f(\delta) \\ f(\delta) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(1) + \psi_1(-1) \\ \psi_2(1) + \psi_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\varphi_1) \\ f(\varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Если $d(\lambda) = 1 - f^2(\lambda, \delta) \neq 0$, то по формулам Крамера

$$\psi_1(1) + \psi_1(-1) = \frac{f(\varphi_1) - f(\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}, \quad (8)$$

$$\psi_2(1) + \psi_2(-1) = \frac{f(\varphi_2) - f(\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}. \quad (9)$$

(Если $d(\lambda) = 0$, то $\psi_j(1) + \psi_j(-1)$, $j = 1, 2$ не определяются однозначно по φ_1, φ_2 и, следовательно, резольвента $R(\lambda)$ не существует). Из (7)–(9) следует, что $R(\lambda)$ имеет вид, указанный в формулировке теоремы. $\square$

Замечание 1. Дискретный спектр оператора H состоит из двух собственных значений $\pm 4/\sqrt{3}$ кратности единица. Действительно, резольвента оператора H , как видно из доказательства леммы 1, вне существенного спектра имеет полюса в таких точках λ , в которых

$$1 - f^2(\lambda, \delta) = 0. \quad (10)$$

В силу (2), (3)

$$\begin{aligned} f(\lambda, \delta) &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|1-m|} \delta(m) - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|-1-m|} \delta(m) = \\ &= 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10), (11) получаем уравнения

$$-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} = 0, \quad -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} = 0.$$

Первое из них имеет корень $\lambda = 0$. Непосредственно проверяется, что для данного λ не существует собственных функций оператора H в классе $l^2(\Gamma)$. Второе уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 4/\sqrt{3}$. Нетрудно проверить, что $\lambda_{1,2}$ являются собственными значениями кратности единица.

§ 2. Квазиуровни слабо возмущенного оператора

В этом параграфе будет рассматриваться оператор $H_\varepsilon = H + \varepsilon V$ с малым параметром $\varepsilon > 0$, где на вещественную функцию $V \neq 0$ наложены условия

$$|V(n, 0)| \leq C e^{-\alpha|n|}, \quad |V(0, m)| \leq C e^{-\alpha|m|}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad C = \text{const.} \quad (12)$$

Уравнение Шредингера $(H + \varepsilon V)\psi = \lambda\psi$, рассматриваемое в классе $l^2(\Gamma)$, перепишем для $\lambda \notin \sigma(H)$ в виде

$$\psi = -\varepsilon R(\lambda) V \psi. \quad (13)$$

Введем обозначение $\sqrt{V} = \sqrt{|V|} \text{sign } V$ (только для $\sqrt{V}$), тогда $V = \sqrt{V} \sqrt{|V|}$. Сделаем в (13) замену, полагая $\varphi = \sqrt{|V|} \psi$, тогда (13) примет вид

$$\varphi = -\varepsilon \sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|} \varphi. \quad (14)$$

Операторнозначная функция $\sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|}$ аналитически продолжается в достаточно малую окрестность отрезка $[-2, 2]$ на каждом из листов римановой поверхности $\mathcal{M}$ своей функцией Грина (кроме точек полюса), причем принимает значения в множестве операторов Гильберта–Шмидта. Это следует из вида резольвенты оператора H (см. лемму 1) и аналогичного результата для $\sqrt{|V_j|} R_0(\lambda) \sqrt{|V_j|}$, $j = 1, 2$ (см. [14]).

Уравнение (14) будем решать в классе $l^2(\Gamma)$. Сделанная замена позволяет находить не только собственные значения (в этом случае $\psi \in l^2(\Gamma)$ и тем более $\varphi \in l^2(\Gamma)$), но и резонансы (см. ниже), когда ψ , вообще говоря, экспоненциально возрастает. При этом λ не должно совпадать с полюсами $\sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|}$, то есть с точками 0 и $\pm 4/\sqrt{3}$ (см. замечание 1). Особенности в точках $\lambda = \pm 2$ формально присутствуют в выражении для $\sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|}$, поскольку являются особенностями ядра $R_0(\lambda)$ (см. теорему 2), но, как нетрудно убедиться, являются устранимыми.

Определение 1 (ср. [15]). Число λ , принадлежащее второму (так называемому «нефизическому») листу римановой поверхности $\mathcal{M}$, будем называть *резонансом* оператора H_ε , если существует ненулевое решение $\varphi \in l^2(\Gamma)$ уравнения (14).

Если решение существует на первом листе, причем $\lambda \notin [-2, 2]$, то λ является собственным значением.

Определение резонанса можно сформулировать по-другому. Обозначим через $R_\varepsilon(\lambda)$ резольвенту оператора H_ε . В силу резольвентного тождества имеем

$$\left(1 + \varepsilon \sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|}\right)^{-1} \left(\sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|}\right) = \sqrt{|V|} R_\varepsilon(\lambda) \sqrt{|V|}, \quad (15)$$

откуда

$$\left(1 + \varepsilon \sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|}\right)^{-1} = 1 - \varepsilon \sqrt{|V|} R_\varepsilon(\lambda) \sqrt{|V|}. \quad (16)$$

Вследствие компактности оператора $\varepsilon \sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|}$ и аналитической теоремы Фредгольма (см. [16]) операторнозначная функция $\left(\varepsilon \sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|}\right)^{-1}$ мероморфна по λ и имеет полюс в точке λ_0 тогда и только тогда, когда $\dim \ker \left(1 + \varepsilon \sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{|V|}\right) > 0$. Отсюда в силу (16) следует, что $\lambda \notin \{0, \pm 4/\sqrt{3}\}$ является резонансом тогда и только тогда, когда операторнозначная функция $\varepsilon \sqrt{|V|} R_\varepsilon(\lambda) \sqrt{|V|}$ или, что то же, функция Грина оператора H_ε , имеет полюс на втором листе $\mathcal{M}$.

Определение 2. Число $\lambda \in \mathcal{M}$ называется *квазиуровнем* оператора H_ε , если λ является резонансом или собственным значением оператора H_ε .

В частности, $\lambda = 0$ является резонансом оператора H (если считать, что точки отрезка $[-2, 2]$ принадлежат обоим листам) — см. замечание 1.

Заметим, что функция ψ из равенства $\sqrt{|V|}\psi = \varphi$ восстанавливается по известной функции φ , в том числе и для n, m таких, что $V(n, m) = 0$, по формуле $\psi = -\varepsilon R(\lambda)\sqrt{V}\varphi$. Из равенства $\psi = -\varepsilon R(\lambda)V\psi$, которое имеет смысл и для элемента $\psi \notin l^2(\Gamma)$ такого, что $\sqrt{|V|}\psi \in l^2(\Gamma)$, следует равенство $(H + \varepsilon V)\psi = \lambda\psi$. Предположим, что резонанс λ находится на втором листе в достаточно малой окрестности отрезка $[-2, 2]$. При помощи леммы 1 и оценок функции Грина G_0 , подобных [14], нетрудно доказать неравенство $|\psi(n, m)| \leq C e^{\delta(|n|+|m|)}$, где C и δ — положительные константы, причем при уменьшении окрестности $[-2, 2]$ число δ становится как угодно малым. Если λ — собственное значение, то оценка принимает вид $|\psi(n, m)| \leq C e^{-\delta(|n|+|m|)}$, где $C, \delta > 0$.

Пусть λ находится на втором листе. Для того чтобы выполнялось условие $\sqrt{|V|}\psi \in l^2(\Gamma)$, естественно потребовать выполнение неравенства $\delta < \alpha$, где α взято из (12). При этом λ должно находиться достаточно близко к отрезку $[-2, 2]$, в частности, $\text{Im } \lambda$ должно быть мало. Это соответствует физическим требованиям, так как время жизни резонансного состояния должно быть достаточно велико, а оно обратно пропорционально $|\text{Im } \lambda|$.

Положим $R_{\varepsilon V_j}(\lambda) = (H_0 + \varepsilon V_j - \lambda)^{-1}$, $j = 1, 2$.

Лемма 2. Точка $\lambda \in \mathcal{M}$ такая, что $\lambda \neq \varepsilon V_1(0)$ и $1 \neq f^2(\lambda, \delta)$, является квазиуровнем оператора H_ε для достаточно малых ε тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} & \left(1 - f^2(\lambda, \delta) + \varepsilon f(\lambda, \sqrt{V_1}\xi_1)f(\lambda, \delta)\right) \left(1 - f^2(\lambda, \delta) + \varepsilon f(\lambda, \sqrt{V_2}\xi_2)f(\lambda, \delta)\right) = \\ & = \varepsilon^2 f(\lambda, \sqrt{V_1}\xi_1)f(\lambda, \sqrt{V_2}\xi_2), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\xi_j = \xi_j(n, \lambda) = \sqrt{|V_j|}R_{\varepsilon V_j}(\lambda)\delta(n)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Уравнение (14) запишем с помощью леммы 1 в виде системы

$$\begin{cases} \varphi_1(n) = -\varepsilon\sqrt{|V_1|} \left(R_0(\lambda)\sqrt{V_1}\varphi_1 - \frac{f(\sqrt{V_2}\varphi_2) - f(\sqrt{V_1}\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} R_0(\lambda)\delta \right)(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \varphi_2(m) = -\varepsilon\sqrt{|V_2|} \left(R_0(\lambda)\sqrt{V_2}\varphi_2 - \frac{f(\sqrt{V_1}\varphi_1) - f(\sqrt{V_2}\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} R_0(\lambda)\delta \right)(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (18)$$

или для достаточно малых ε в эквивалентной форме

$$\begin{cases} \varphi_1(n) = \varepsilon \frac{f(\sqrt{V_2}\varphi_2) - f(\sqrt{V_1}\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \left((1 + \varepsilon\sqrt{|V_1|}R_0(\lambda)\sqrt{V_1})^{-1}(\sqrt{|V_1|}R_0(\lambda)\delta) \right)(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \varphi_2(m) = \varepsilon \frac{f(\sqrt{V_1}\varphi_1) - f(\sqrt{V_2}\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \left((1 + \varepsilon\sqrt{|V_2|}R_0(\lambda)\sqrt{V_2})^{-1}(\sqrt{|V_2|}R_0(\lambda)\delta) \right)(m), & m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (19)$$

При этом от решения φ_1, φ_2 системы (19) требуется выполнение равенства $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Докажем, что в условиях леммы оно должно выполняться автоматически. После перехода обратно к функциям ψ_1, ψ_2 из (18) получаем

$$\begin{cases} \psi_1(n) = -\varepsilon R_0(\lambda)V_1\psi_1(n) + \varepsilon \frac{f(V_2\psi_2) - f(V_1\psi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} R_0(\lambda)\delta(n), & n \in \mathbb{Z}, \\ \psi_2(m) = -\varepsilon R_0(\lambda)V_2\psi_2(m) + \varepsilon \frac{f(V_1\psi_1) - f(V_2\psi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} R_0(\lambda)\delta(m), & m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (20)$$

откуда

$$\begin{cases} \psi_1(1) + \psi_1(-1) = -\varepsilon f(V_1\psi_1) - yf(\delta), \\ \psi_2(1) + \psi_2(-1) = -\varepsilon f(V_2\psi_2) - xf(\delta), \end{cases} \quad (21)$$

где

$$x = -\varepsilon \frac{f(V_1\psi_1) - f(V_2\psi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)}, \quad y = -\varepsilon \frac{f(V_2\psi_2) - f(V_1\psi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \quad (22)$$

удовлетворяют системе (см. доказательство леммы 1)

$$\begin{cases} x + f(\delta)y = -\varepsilon f(V_1\psi_1), \\ f(\delta)x + y = -\varepsilon f(V_2\psi_2). \end{cases} \quad (23)$$

Из (21) и (23) получаем равенства

$$x = \psi_1(1) + \psi_1(-1), \quad y = \psi_2(-1) + \psi_2(1). \quad (24)$$

Применяя теперь к уравнениям (20) оператор $H_0 - \lambda$ и пользуясь (22) и (24), приходим для $n = m = 0$ к системе

$$\begin{cases} \psi_1(1) + \psi_1(-1) + \varepsilon V_1(0)\psi_1(0) - \lambda\psi_1(0) = -\psi_2(1) - \psi_2(-1), \\ \psi_2(1) + \psi_2(-1) + \varepsilon V_2(0)\psi_2(0) - \lambda\psi_2(0) = -\psi_1(1) - \psi_1(-1). \end{cases}$$

Вследствие равенства $V_1(0) = V_2(0)$ получаем $(\varepsilon V_1(0) - \lambda)\psi_1(0) = (\varepsilon V_1(0) - \lambda)\psi_2(0)$. В силу условия леммы $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, откуда $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

Вследствие (15) систему (19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(n) &= \varepsilon \frac{f(\sqrt{V_2}\varphi_2) - f(\sqrt{V_1}\varphi_1)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \left(\sqrt{|V_1|} R_{\varepsilon V_1}(\lambda)\delta \right)(n), \quad n \in \mathbb{Z} \\ \varphi_2(m) &= \varepsilon \frac{f(\sqrt{V_1}\varphi_1) - f(\sqrt{V_2}\varphi_2)f(\delta)}{1 - f^2(\delta)} \left(\sqrt{|V_2|} R_{\varepsilon V_2}(\lambda)\delta \right)(m), \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (25)$$

Положим $\xi_j(n) = \sqrt{|V_j|} R_{\varepsilon V_j}(\lambda)\delta(n)$, $j = 1, 2$. Из (25) имеем

$$\varphi_j = C_j \xi_j, \quad j = 1, 2, \quad (26)$$

где C_j — константы. Заметим, что при малых ε векторы ξ_j близки к $\sqrt{|V_j|} R_0(\lambda)\delta$ и потому отличны от нуля. Из (25), (26) получаем следующую систему относительно C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\varepsilon}{1 - f^2(\delta)} (C_2 f(\sqrt{V_2}\xi_2) - C_1 f(\sqrt{V_1}\xi_1) f(\delta)), \\ C_2 = \frac{\varepsilon}{1 - f^2(\delta)} (C_1 f(\sqrt{V_1}\xi_1) - C_2 f(\sqrt{V_2}\xi_2) f(\delta)). \end{cases} \quad (27)$$

В условиях леммы ненулевое решение уравнения (14) существует тогда и только тогда, когда существует ненулевое решение (C_1, C_2) системы (27), то есть когда определитель системы (27) равен нулю, что и означает выполнение (14). $\square$

Определение 3. Назовем *геометрической кратностью* квазиуровня

$$\dim \ker(1 + \varepsilon \sqrt{|V|} R(\lambda) \sqrt{V}).$$

Замечание 2. В условиях леммы 2 геометрическая кратность квазиуровня совпадает с размерностью пространства решений системы (10) и равна единице.

Предположим, что $V_1 = V_2 = W$, тогда $\xi_1 = \xi_2 = \xi$.

Теорема 2. Оператор H_ε для всех достаточно малых ε не имеет (ненулевых) квазиуровней в окрестности нуля.

Доказательство. Пусть $f^2(\lambda, \delta) \neq 1$. Предположим вначале, что $W(0) \neq 0$. Из (26) получаем (см. доказательство леммы 2), что необходимое для наличия квазиуровня равенство $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ выполнено тогда и только тогда, когда $C_1 \xi(0) = C_2 \xi(0)$. Поскольку для λ близких к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\xi(0) = \sqrt{|W(0)|} (R_{\varepsilon W}(\lambda)\delta)(0) \longrightarrow -\frac{\sqrt{|W(0)|}}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \neq 0,$$

то $C_1 = C_2 = C$. При этом $C \neq 0$ (иначе $\varphi = 0$ и квазиуровней нет). Следовательно, согласно (27), $f(\sqrt{W}\xi) \neq 0$ и

$$1 = \frac{\varepsilon f(\sqrt{W}\xi)}{1 - f^2(\delta)}(1 - f(\delta)),$$

откуда получаем уравнение

$$1 + f(\delta) = \frac{2\sqrt{\lambda^2 - 4} - \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} = \varepsilon f(\sqrt{W}\xi),$$

которое при малых ε и λ , очевидно, не имеет решений.

Рассмотрим случай $W(0) = 0$. Тогда $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, и условие $\lambda \neq \varepsilon W(0)$ в формулировке леммы 2 накладывать не нужно. Из леммы 2 следует, что $\lambda \in \mathcal{M}$ является квазиуровнем H_ε , если λ удовлетворяет одному из уравнений

$$1 - f^2(\lambda, \delta) + \varepsilon f(\lambda, \sqrt{W}\xi)f(\lambda, \delta) = \pm \varepsilon f(\lambda, \sqrt{W}\xi).$$

В случае знака «+» уравнение не имеет решений при малых ε и λ (см. выше). В случае знака «-» получаем уравнение

$$F(\lambda, \varepsilon) = 0, \quad (28)$$

где

$$F(\lambda, \varepsilon) = 1 - f(\delta) + \varepsilon f(\sqrt{W}\xi) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} + \varepsilon f(\sqrt{W}\xi).$$

Функция $F(\lambda, \varepsilon)$ является аналитической в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ (для любого выбора знака корня $\sqrt{\lambda^2 - 4}$), причем

$$F(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F(0, 0)}{\partial \lambda} = \pm \frac{1}{2i} \neq 0.$$

В силу теоремы о неявной функции (см. [17]), для любого выбора знака корня для всех достаточно малых ε существует единственное решение $\lambda = \lambda_\pm(\varepsilon)$ уравнения (28), причем $\lambda_\pm(\varepsilon)$ аналитически зависит от ε .

Перепишем уравнение (28) в виде

$$\lambda = -\varepsilon \sqrt{\lambda^2 - 4} f(\sqrt{W}\xi) = \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(q^{|1+n|} + q^{|1-n|} \right) \left(\sqrt{W}\xi \right) (n), \quad (29)$$

где, как и выше,

$$q = q(\lambda) = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

Явно выписывая разные знаки у корня $\sqrt{\lambda^2 - 4}$, приведем необходимые в дальнейшем равенства:

$$\begin{aligned} q^\alpha(\lambda) &= \left(\frac{\lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^\alpha, \quad (q^\alpha(\lambda))' = \mp \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} q^\alpha(\lambda), \\ (q^\alpha(\lambda))'' &= \alpha \left(\pm \frac{\lambda q^\alpha(\lambda)}{(\lambda^2 - 4)\sqrt{\lambda^2 - 4}} + \frac{\alpha q^\alpha(\lambda)}{\lambda^2 - 4} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$(q^\alpha)(0) = (\mp i)^\alpha, \quad (q^\alpha)'(0) = \mp \frac{\alpha}{2i} (\mp i)^\alpha, \quad (q^\alpha)''(0) = -\frac{\alpha^2}{4} (\mp i)^\alpha,$$

$$q^{|1+n|} + q^{|1-n|} = \begin{cases} \mp 2i + \lambda \pm \frac{i\lambda^2}{4} + O(\lambda^4), & n = 0, \\ \lambda q^{|n|}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Далее, преобразуем для малых λ и ε выражение

$$\begin{aligned} (\sqrt{W}\xi)(n) &= \sqrt{W} \left(1 + \varepsilon \sqrt{|W|} R_0(\lambda) \sqrt{W}\right)^{-1} \left(\sqrt{|W|} R_0(\lambda) \delta\right)(n) = \\ &= (W R_0(\lambda) \delta)(n) - \varepsilon (W R_0(\lambda) W R_0(\lambda) \delta)(n) + \varepsilon^2 (W R_0(\lambda) W R_0(\lambda) W R_0(\lambda) \delta)(n) + O(\varepsilon^3) = \\ &= \mp \frac{W(n)}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} q^{|n|} - \frac{\varepsilon W(n)}{\lambda^2 - 4} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{|n-m|+|m|} W(m) \mp \\ &\mp \frac{\varepsilon^2 W(n)}{(\lambda^2 - 4) \sqrt{\lambda^2 - 4}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{|n-k|+|k-m|+|m|} W(k) W(m) + O(\varepsilon^3). \quad (31) \end{aligned}$$

В силу (29) $\lambda = O(\varepsilon)$, тогда из (29)–(31), а также из равенства $W(0) = 0$, получаем следующее уравнение:

$$\lambda = \varepsilon \lambda \sum_{n \neq 0} q^{|n|} W(n) \left(\mp \frac{q^{|n|}}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} - \frac{\varepsilon}{\lambda^2 - 4} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{|n-m|+|m|} W(m) + O(\varepsilon^3) \right).$$

Очевидно, что оно не имеет решений, если $\lambda = \lambda(\varepsilon) \neq 0$. $\square$

Замечание 3. Обычно квазиуровни возмущенного оператора возникают как сдвиги полюсов резольвенты невозмущенного оператора под действием возмущения (см., напр., [15]). Квазиуровнями (понимаемыми как полюса функции Грина) оператора H являются изолированные собственные значения $\lambda = \pm 4/\sqrt{3}$, поведение которых описывается обычной теорией возмущений, а также резонанс $\lambda = 0$. Таким образом, рассматриваемый в теореме 2 оператор имеет весьма необычное свойство: полюс в нуле функции Грина, несмотря на введение возмущающего потенциала, остается неподвижным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Orellana P. A., Domingulz-Adame F., Gomes I., Ladron de Guevara M. L. Transport through a quantum wire a side quantum-dot array // Phys. Rev. B. — 2003. — Vol 67, 085321 (5p).
2. Shangguan W. Z., Au Yeung T. C., Yu Y. B., Kam C. H. Quantum transtort in one-dimensional quantum dot array // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 63, 235323 (9p).
3. Yan Chen, Shi-Yie Xiong, Evangelou S. N. Quantum oscillations in mesoscopic rings with many chains // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 56, № 8. — P. 4778–4784.
4. Miroshnichenko A. E., Kivshar Y. S. Engineering Fano resonances in discrete arrays // Phys. Rev. E. — 2005. — Vol. 72, 056611 (7p).
5. Chakrabarti A. Fano resonance in discrete lattice models: Controlling lineshapes with impurities // Phys. Letters A. — 2007. — Vol. 336, Issues 4–5. — P. 507–512.
6. Bulka. B. R., Stefanski P. Fano and Kondo resonance in electronic current throught nanodevices // Phys. Rev. Let. — 2001. — Vol. 86, № 22. — P. 5128–5131.
7. Изюмов Ю. А., Скрыбин Ю. Н. Статистическая механика магнито-упорядоченных систем. — М.: Наука. 1987. — 264 с.
8. Karachalios N. I. The number of bound states for a discrete Schrödinger operator on $\mathbb{Z}^N$, $N \geq 1$, lattices // Y. Phys. A.: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, 455201 (14p).
9. Pelinovsky D. E., Stefanov A. On the spectral theory and dispersive estimates for a discrete Shrödinger equation in one dimension // URL: arXiv: 0804.1963v1 — 2008.
10. Абдуллаев Ж. И., Лакаев С. Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Теор. матем. физика. — 2003. — Т. 136, № 2. — С. 321–245.
11. Dutkay D. E., Yorgensen P. E. T. Spectral theory for discrete laplacians // URL: arXiv: 0802.2347v5 — 2008.
12. Wolfram T., Callaway Y. Spin-wave impurity states in ferromagnets // Phys. Rev. — 1963. — Vol. 130, № 6. — P. 2207–2217.
13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 4. Анализ операторов — М.: Мир. 1982. — 432 с.

14. Baranova L. Y., Chuburin Y. P. Quasi-levels of the two-particle discrete Schrödinger operator with a perturbed periodic potential // J. Phys. A.: Math. Theor. — 2008. — Vol. 41, № 435205 (11 p).
15. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёгг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой физике. М.: Мир, 1991. — 568 с.
16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977. — 360 с.
17. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. — М.: Мир, 1969. — 396 с.

Поступила в редакцию 10.05.09

T. S. Tinyukova, Y. P. Chuburin

Quasi-levels of the discrete Schrödinger equation with a decreasing potential on a graph

We consider the discrete Schrödinger operator perturbed by a decreasing potential of the form εV defined on a graph the nodes of which lie on the union of two intersected straight lines. We prove that non-vanishing quasi-levels do not exist in the neighbourhood of zero for a small ε .

Keywords: discrete Schrödinger equation, eigenvalue, resonanse.

Mathematical Subject Classifications: 81Q10, 81Q15

Тинюкова Татьяна Сергеевна, аспирант кафедры математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4). E-mail: TAshih@mail.ru
Чубурин Юрий Павлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник отдела теоретической физики ФТИ УрО РАН, 426000, Россия, г. Ижевск, ул. Кирова, 132. E-mail: chuburin@otf.pti.udm.ru