Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. G. Chentsov, Some properties of the operator of the measure extension, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2009, Issue 3, 114–127

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.174.16.151

April 26, 2023, 13:41:29

УДК 517.987.1

© А. Г. Ченцов

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕРЫ¹

Рассматривается оператор, сопоставляющий мере, определенной на алгебре множеств, ее продолжение на σ -алгебру, порожденную данной алгеброй. На основе представления продолженной меры в терминах минимакса устанавливается, что упомянутый оператор является изометрическим изоморфизмом при использовании традиционных способов нормирования пространств, элементами которых являются меры. Устанавливаются некоторые свойства, связанные с сохранением порядковых соотношений при действии оператора продолжения.

Ключевые слова: алгебра множеств, мера, продолжение меры, изометрический изоморфизм.

Введение

Операция лебеговского продолжения является одной из важнейших конструкций современной теории меры. Она подробно излагается в целом ряде монографий (см., например, [1; 2; 3]). В связи с этим отметим сейчас особо схему [2, § I.5], применяемую (в [2]) для целей продолжения вероятности, но допускающую очевидный перенос на случай продолжения любой счетно-аддитивной (с.-а.) неотрицательной меры. Эта схема существенно используется в дальнейшем.

Возможны, однако, и продолжения мер на более обширные (в сравнении с традиционным случаем лебеговского продолжения) σ -алгебры множеств; см., например, [3, с. 85]. Если меру нельзя продолжить на σ -алгебру всех подмножеств (п/м) «единицы» (исходного пространства), то у меры нет максимального с.-а. продолжения (см. [3, с. 85]). К этому можно добавить свойства, отмеченные в [4, с. 94–102] и касающиеся, в частности, продолжения бэровских мер. В связи с этим возникает естественный вопрос о том, чем же выделяется процедура лебеговского продолжения среди других возможных процедур такого рода. В настоящей работе, являющейся продолжением [5; 6; 7], делается попытка в какой-то мере ответить на этот вопрос. Она связана с рассмотрением оператора, переводящего исходные меры на алгебре множеств в их с.-а. продолжения на σ -алгебру, порожденную исходной алгеброй. Оказывается, что с точки зрения многих естественных свойств две вышеупомянутые меры оказываются отождествимыми, а сам оператор продолжения является изометрическим изоморфизмом. В основе данного подхода находится модификация процедуры [2, § I.5], связанная с представлением значений продолженной меры в виде некоторого «минимакса» (экстремумы в операциях минимума и максимума могут не достигаться). Это представление было использовано в [5; 6] (автору неизвестны более ранние публикации, его содержащие) для описания продолжений знакопеременных ограниченных мер на алгебре множеств. С этой точки зрения процедура лебеговского продолжения выделяется особенностью: здесь продолженная мера оказывается расширенной «копией» исходной, ее дубликатом. Это позволяет получать некоторые свойства продолженных мер на основе соответствующих свойств исходных мер (в [5] приведено, в частности, представление лебеговского продолжения суммы ряда мер, определенных на исходной алгебре множеств).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 06-01-00414, 08-08-00981а).

§ 1. Основные обозначения и определения

В дальнейшем используем кванторы и пропозициональные связки; def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению, $\emptyset$ — пустое множество. Принимаем аксиому выбора. Для всякого объекта x через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее x . Если же x и y — произвольные объекты, то $\{x; y\} \triangleq \{x\} \cup \{y\}$ есть неупорядоченная пара (двоеточие), соответствующая упомянутым объектам. Семейством называем множество, все элементы которого — множества; если $\mathcal{U}$ — семейство, а V — множество, то $[\mathcal{U}](V) \triangleq \{U \in \mathcal{U} \mid V \subset U\}$ (семейство всех множеств из $\mathcal{U}$, содержащих V). Через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества H ; $\text{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех функций, действующих из A в B . Если же A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то:

1) $(f|C) \in B^C$ есть определяемое обычным образом сужение f на C , для которого $(f|C)(x) = f(x) \quad \forall x \in C$;

2) $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ (образ C при действии f).

Для произвольных множеств X и Y $(\text{bi})[X; Y]$ есть def множество всех биекций X на Y .

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ (натуральный ряд); если $k \in \mathbb{N}$, то $\overline{1, k} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq k\}$ и $\overline{k, \infty} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid k \leq i\}$. Полагаем далее, что элементы $\mathbb{R}$ (вещественные и, в частности, натуральные числа) не являются множествами; тогда для всяких множества A и числа $k \in \mathbb{N}$ $A^k \triangleq A^{\overline{1, k}}$ есть множество всех кортежей $(a_i)_{i \in \overline{1, k}} : \overline{1, k} \longrightarrow A$ (здесь и ниже используем индексную форму записи функций). Линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных (в/з) функций определяем поточечно; используем $\leq$ для обозначения поточечного порядка в пространстве в/з функций с общей областью определения. Напомним, что $\mathbb{R}^A$, где A — множество, есть множество всех в/з функций на A . Последовательности (функции на $\mathbb{N}$) обычно записываются в индексной форме, как и кортежи конечной длины.

Если (X, τ) — топологическое пространство (ТП) и $A \in \mathcal{P}(X)$, то через $\text{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание A в (X, τ) ; через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем обычную топологию $\mathbb{R}$, порожденную метрикой-модулем.

Если S — непустое множество, то через $\mathbb{B}(S)$ обозначаем множество всех ограниченных в/з функций на S (то есть множество всех ограниченных функций из $\mathbb{R}^S$); $\mathcal{O}_S \in \mathbb{B}(S)$ есть def в/з функция на S , для которой

$$\mathcal{O}_S(x) \triangleq 0 \quad \forall x \in S.$$

Кроме того, через $\|\cdot\|_S$ обозначаем обычную sup -норму $\mathbb{B}(S)$ (см. [1, с. 261]); при этом $\|f\|_S \triangleq \text{sup}(\{|f(x)| : x \in S\}) \quad \forall f \in \mathbb{B}(S)$. Сходимость в $(\mathbb{B}(S), \|\cdot\|_S)$ тождественна равномерной.

§ 2. Простейшие свойства мер

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E . Пусть

$$\pi[E] \triangleq \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid (\emptyset \in \mathcal{L}) \& (E \in \mathcal{L}) \& (A \cap B \in \mathcal{L} \quad \forall A \in \mathcal{L} \quad \forall B \in \mathcal{L})\}. \quad (2.1)$$

Через $(\text{alg})[E]$ (через $(\sigma - \text{alg})[E]$) обозначаем множество всех алгебр (всех σ -алгебр) п/м множества E ; $(\sigma - \text{alg})[E] \subset (\text{alg})[E]$,

$$(\text{alg})[E] = \{\mathcal{L} \in \pi[E] \mid E \setminus L \in \mathcal{L} \quad \forall L \in \mathcal{L}\}.$$

Если $\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то через $\sigma_E^0(\mathcal{S})$ обозначаем σ -алгебру п/м E , порожденную семейством $\mathcal{S}$ (см. [2, с. 31]): при

$$(\sigma - \text{alg})[E|\mathcal{S}] \triangleq \{\mathcal{H} \in (\sigma - \text{alg})[E] \mid \mathcal{S} \subset \mathcal{H}\}$$

$\sigma_E^0(\mathcal{S})$ есть пересечение всех σ -алгебр $\mathcal{F} \in (\sigma - \text{alg})[E|\mathcal{S}]$; $(\sigma - \text{alg})[E|\mathcal{S}] \neq \emptyset$. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{E}) \triangleq \left\{ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i : (E_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}^\mathbb{N} \right\}$$

(семейство всех счетных объединений множеств из $\mathcal{E}$). Если $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $H \in \mathcal{P}(E)$, то полагаем, что:

$$1) \Delta_m(H, \mathcal{H}) \triangleq \{ (H_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \mathcal{H}^m \mid (H = \bigcup_{i=1}^m H_i) \& \\ \& (H_p \cap H_q = \emptyset \ \forall p \in \overline{1, m} \ \forall q \in \overline{1, m} \setminus \{p\}) \} \ \forall m \in \mathbb{N},$$

$$2) \Delta_\infty[H; \mathcal{H}] \triangleq \{ (H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^\mathbb{N} \mid (H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i) \& \\ \& (H_p \cap H_q = \emptyset \ \forall p \in \mathbb{N} \ \forall q \in \mathbb{N} \setminus \{p\}) \};$$

введены множества конечных и счетных разбиений H множествами из $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то

$$(\text{add})[\mathcal{L}] \triangleq \{ \mu \in \mathbb{R}^\mathcal{L} \mid \mu(L) = \sum_{i=1}^k \mu(L_i) \ \forall L \in \mathcal{L} \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall (L_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \Delta_k(L, \mathcal{L}) \},$$

$$(\text{add})_+[\mathcal{L}] \triangleq \{ \mu \in (\text{add})[\mathcal{L}] \mid \mathcal{O}_\mathcal{L} \leq \mu \};$$

через $(\sigma - \text{add})[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех $\mu \in \mathbb{R}^\mathcal{L}$ таких, что

$$\left(\sum_{i=1}^m \mu(L_i) \right)_{m \in \mathbb{N}} \longrightarrow \mu(L) \ \forall L \in \mathcal{L} \ \forall (L_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Delta_\infty[L; \mathcal{L}]$$

(множество знакопеременных с.-а. мер на $\mathcal{L}$);

$$(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}] \triangleq \{ \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \mid \mathcal{O}_\mathcal{L} \leq \mu \} \subset (\text{add})_+[\mathcal{L}],$$

$$\mathbb{P}_\sigma(\mathcal{L}) \triangleq \{ \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) = 1 \},$$

$$\mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \triangleq \{ \mu \in \mathbb{P}_\sigma(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \ (\mu(L) = 0) \vee (\mu(L) = 1) \}.$$

Если $x \in E$, то, как обычно, $\delta_x \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{P}(E))$ определяем условием: при $S \in \mathcal{P}(E)$ $\delta_x(S) \triangleq 1$, если $x \in S$, и $\delta_x(S) \triangleq 0$ в противном случае. Введены меры Дирака; потребуются также их сужения. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то совокупность сужений

$$\mathbb{D}(\mathcal{L}) \triangleq \{ (\delta_x|_\mathcal{L}) : x \in E \} \tag{2.2}$$

назовем $\mathcal{L}$ -множеством Дирака. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то $(\text{add})[\mathcal{L}]$ есть множество всех $\mu \in \mathbb{R}^\mathcal{L}$ таких, что $\forall A \in \mathcal{L} \ \forall B \in \mathcal{L}$

$$(A \cap B = \emptyset) \implies (\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)).$$

Если $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^\mathbb{N}$ и $A \in \mathcal{P}(E)$, то $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow A$ означает, что

$$(A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \& (A_j \subset A_{j+1} \ \forall j \in \mathbb{N}).$$

Отметим известное свойство с.-а. мер (см. [2, гл. I]): $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \ \forall (L_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^\mathbb{N} \ \forall L \in \mathcal{L}$

$$((L_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow L) \implies ((\mu(L_i))_{i \in \mathbb{N}} \uparrow \mu(L) \ \forall \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]) \tag{2.3}$$

(здесь и ниже условие в правой части (2.3) означает монотонную сходимость в/з последовательности; имеется в виду, что данная последовательность сходится и является неубывающей). Пусть

$$\Pi[E] \triangleq \{\mathcal{L} \in \pi[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} \exists n \in \mathbb{N} : \Delta_n(E \setminus L, \mathcal{L}) \neq \emptyset\}$$

(множество всех полуалгебр п/м E). Разумеется,

$$(\sigma - \text{alg})[E] \subset (\text{alg})[E] \subset \Pi[E] \subset \pi[E] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)).$$

Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, то $\mathfrak{N}_\mu \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \mu(L) = 0\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$; кроме того, $\mathfrak{N}_\mu^* \triangleq \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists L \in \mathfrak{N}_\mu : H \subset L\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$.

§ 3. Продолжение мер: сводка понятий и элементы конструкций

Сначала напомним совсем кратко схему продолжения [2, § I.5] с некоторыми дополнениями, ориентированными на получение «минимаксного» представления продолжения меры; это представление используется ниже при исследовании оператора продолжения. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то

$$\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) = \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists (L_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^\mathbb{N} : (L_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow H\}, \quad (3.1)$$

$\mathcal{L} \subset \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})$; если, кроме того, $S \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(S) = \{L \in \mathcal{L} \mid L \subset S\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$$

и при $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ множество-образ $\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(S))$ непусто и ограничено,

$$\sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(S)} \mu(L) = \sup(\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(S))) \in [0, \mu(E)].$$

Это свойство позволяет ввести следующую функцию множеств (ФМ): если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, то $\mu_\uparrow$ определяем как отображение

$$H \longmapsto \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) : \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0, \mu(E)]. \quad (3.2)$$

Из (3.2) вытекает при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$, что

$$((\mu_\uparrow|_{\mathcal{L}}) = \mu) \ \& \ (\forall A \in \mathcal{P}(E) \ \forall B \in \mathcal{P}(E) \ ((A \subset B) \implies (\mu_\uparrow(A) \leq \mu_\uparrow(B)))); \quad (3.3)$$

полагаем $\mu^\uparrow \triangleq (\mu_\uparrow|_{\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})})$, получая сужение ФМ (3.2) на непустое семейство $\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})$, для которого

$$\mathcal{L} \subset \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{P}(E).$$

Имеем, в частности, что (см. (2.3)) $\forall H \in \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \ \forall (L_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}^\mathbb{N}$

$$((L_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow H) \implies ((\mu(L_i))_{i \in \mathbb{N}} \uparrow \mu^\uparrow(H) \ \forall \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]). \quad (3.4)$$

В (3.4) имеем представление, подобное [2, с. 39] и опирающееся на построение нужной ФМ посредством монотонных пределов. Введем множество $(\sigma \uparrow a)[E]$ всех семейств $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ таких, что

$$\begin{aligned} &(\emptyset \in \mathcal{H}) \ \& \ (E \in \mathcal{H}) \ \& \ (A \cap B \in \mathcal{H} \ \forall A \in \mathcal{H} \ \forall B \in \mathcal{H}) \ \& \\ &\& \ (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i \in \mathcal{H} \ \forall (H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^\mathbb{N}); \end{aligned}$$

тогда, в частности, $\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \in (\sigma \uparrow a)[E] \quad \forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$. Этот случай наиболее важен для нашего построения; однако рассмотрение $(\sigma \uparrow a)[E]$ с общих позиций также полезно. Ясно, что $A \cup B \in \mathcal{H} \quad \forall \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E] \quad \forall A \in \mathcal{H} \quad \forall B \in \mathcal{H}$. Полагая, что

$$(\sigma \uparrow a)[E|\mathcal{E}] \triangleq \{\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{H}\} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)),$$

имеем, в частности, следующее свойство. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то

$$\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \in (\sigma \uparrow a)[E \mid \mathcal{L}] : \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \subset \mathcal{H} \quad \forall \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E \mid \mathcal{L}]; \quad (3.5)$$

с учетом (3.5) при $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$ определена ФМ $(\mu^\uparrow \mid \mathcal{L})$ и при этом $(\mu^\uparrow \mid \mathcal{L}) = \mu$. Кроме того (см. [2, § I.5]), $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall A \in \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L}) \quad \forall B \in \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})$

$$\mu^\uparrow(A \cap B) + \mu^\uparrow(A \cup B) = \mu^\uparrow(A) + \mu^\uparrow(B) \quad (3.6)$$

(свойство, наследуемое от сильной аддитивности [2, с. 27] исходной меры μ). Еще одно естественное свойство, отмеченное в [2, § I.5], состоит в следующем: $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall (H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})^\mathbb{N} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E)$

$$((H_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow H) \implies ((\mu^\uparrow(H_i))_{i \in \mathbb{N}} \uparrow \mu^\uparrow(H) \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]). \quad (3.7)$$

В связи с (3.6), (3.7) см. предложение 1.5.1 в [2]. Возвращаясь к общей конструкции, напомним, что $\forall \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E] \quad \forall A \in \mathcal{H} \quad \forall B \in \mathcal{H}$

$$(A \cap B \in \mathcal{H}) \& (A \cup B \in \mathcal{H}). \quad (3.8)$$

Из определений следует вложение $(\sigma \uparrow a)[E] \subset \pi[E]$, что позволяет рассматривать $(\text{add})_+[\mathcal{H}]$ и $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{H}]$ при $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$; такие семейства $\mathcal{H}$ замкнуты, разумеется (см. (3.8)), относительно конечных объединений и пересечений (а также счетных объединений). Следуя идее [2, § I.5], определяем при $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$ множество $(* - \text{meas})[\mathcal{H}]$ всех неотрицательных в/з функций μ на $\mathcal{H}$, для каждой из которых

$$\begin{aligned} &(\mu(\emptyset) = 0) \& (\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A \in \mathcal{H} \quad \forall B \in \mathcal{H}) \& \\ &\& (\forall A \in \mathcal{H} \quad \forall B \in \mathcal{H} \quad ((A \subset B) \implies (\mu(A) \leq \mu(B)))) \& \\ &\& (\forall (H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}^\mathbb{N} \quad \forall H \in \mathcal{H} \quad ((H_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow H) \implies ((\mu(H_i))_{i \in \mathbb{N}} \uparrow \mu(H))). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Легко видеть, что $\mu^\uparrow \in (* - \text{meas})[\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})] \quad \forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$. В общем случае семейств из $(\sigma \uparrow a)[E]$ имеем важное положение:

$$(* - \text{meas})[\mathcal{H}] \subset (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{H}] \quad \forall \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]. \quad (3.10)$$

Данное свойство счетной аддитивности (см. (3.10)) легко следует из (3.9). Отметим одно полезное следствие (3.10): если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$\mu^\uparrow \in (\sigma - \text{add})_+[\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})] : (\mu^\uparrow \mid \mathcal{L}) = \mu.$$

При $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$ и $S \in \mathcal{P}(E)$ $[\mathcal{H}](S) \in \mathcal{P}'(\mathcal{H})$ и

$$\nu^1([\mathcal{H}](S)) \in \mathcal{P}'([0, \infty[) \quad \forall \nu \in (* - \text{meas})[\mathcal{H}].$$

С учетом этого корректно следующее определение: если $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$ и $\nu \in (* - \text{meas})[\mathcal{H}]$, то полагаем, что в/з неотрицательная функция $\nu_\downarrow$ на $\mathcal{P}(E)$ есть def

$$S \longmapsto \inf(\nu^1([\mathcal{H}](S))) : \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0, \infty[, \quad (3.11)$$

для ее значений используем традиционное соглашение:

$$\nu_\downarrow(T) = \inf_{H \in [\mathcal{H}](T)} \nu(H) = \inf(\nu^1([\mathcal{H}](T))) \quad \forall T \in \mathcal{P}(E); \quad (3.12)$$

если при этом $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mathcal{H} = \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})$ и $\nu = \mu^\uparrow$, то ФМ (3.11) обозначаем через $\mu^\uparrow_\downarrow$ (итак, $\mu^\uparrow_\downarrow$ есть ФМ $\nu_\downarrow$ при условии $\nu = \mu^\uparrow$). В последнем случае значение ФМ $\mu^\uparrow_\downarrow$ определяется посредством (3.12) при вышеупомянутой конкретизации $\mathcal{H}$ и ν . Легко видеть, что при $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$ и $\nu \in (* - \text{meas})[\mathcal{H}]$ справедливо равенство $(\nu_\downarrow | \mathcal{H}) = \nu$; кроме того, имеем следующие свойства, проверяемые по аналогии с [2, § I.5]:

- 1) $\nu_\downarrow(A \cup B) + \nu_\downarrow(A \cap B) \leq \nu_\downarrow(A) + \nu_\downarrow(B) \quad \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad \forall B \in \mathcal{P}(E);$
- 2) $\forall (S_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(E)^\mathbb{N} \quad \forall S \in \mathcal{P}(E)$

$$((S_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow S) \implies ((\nu_\downarrow(S_i))_{i \in \mathbb{N}} \uparrow \nu_\downarrow(S));$$

$$3) \mathfrak{F}_\nu \triangleq \{T \in \mathcal{P}(E) \mid \nu_\downarrow(T) + \nu_\downarrow(E \setminus T) = \nu(E)\} \in (\sigma - \text{alg})[E].$$

Отметим, наконец, свойство: $\forall \mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E] \quad \forall \nu \in (* - \text{meas})[\mathcal{H}]$

$$\nu^\downarrow \triangleq (\nu_\downarrow | \mathfrak{F}_\nu) \in (\sigma - \text{add})_+[\mathfrak{F}_\nu]. \quad (3.13)$$

По аналогии с [2, § I.5] имеем свойство полноты пространства с мерой $(E, \mathfrak{F}_\nu, \nu^\downarrow)$ при $\nu \in (* - \text{meas})[\mathcal{H}]$, где $\mathcal{H} \in (\sigma \uparrow a)[E]$: при $\eta = \nu^\downarrow$ непременно $\mathfrak{N}_\eta^* \subset \mathfrak{F}_\nu$.

Из этих общих положений извлекаем свойства: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, то ФМ $\mu^\uparrow \in (* - \text{meas})[\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})]$ реализует σ -алгебру

$$\mathfrak{F}_\mu^* \triangleq \mathfrak{F}_{\mu^\uparrow} = \{T \in \mathcal{P}(E) \mid \mu^\uparrow_\downarrow(T) + \mu^\uparrow_\downarrow(E \setminus T) = \mu(E)\} \in (\sigma - \text{alg})[E], \quad (3.14)$$

для которой $\mu^\downarrow_\uparrow \triangleq (\mu^\uparrow_\downarrow | \mathfrak{F}_\mu^*) \in (\sigma - \text{add})_+[\mathfrak{F}_\mu^*]$; триплет

$$(E, \mathfrak{F}_\mu^*, \mu^\downarrow_\uparrow)$$

есть полное пространство с мерой, причем $\mu^\downarrow_\uparrow$ есть (см. (3.12)) отображение

$$F \longmapsto \inf_{H \in \{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})(F)} \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) : \mathfrak{F}_\mu^* \longrightarrow [0, \infty[. \quad (3.15)$$

В (3.15) имеем требуемое «минимаксное» представление, которое в [2] не рассматривалось. К этому следует добавить известные [2, § I.5] свойства: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, то $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_\mu^*)$ и при этом $(\mu^\downarrow_\uparrow | \mathcal{L}) = \mu$ ($\mu^\downarrow_\uparrow$ есть с.-а. продолжение μ на σ -алгебру (3.14)); при $\eta = \mu^\downarrow_\uparrow$ имеем вложение

$$\eta^1(\mathfrak{F}_\mu^*) \subset \text{cl}(\mu^1(\mathcal{L}), \tau_\mathbb{R}),$$

а при условии замкнутости $\mu^1(\mathcal{L})$ в $(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$ — равенство

$$\eta^1(\mathfrak{F}_\mu^*) = \mu^1(\mathcal{L}) \quad (3.16)$$

(разумеется, (3.16) справедливо при $\mu^1(\mathcal{L}) \in \text{Fin}(\mathbb{R})$, то есть в случае, когда $\mu^1(\mathcal{L})$ — конечное множество). Отметим, что при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$

$$\mu^\downarrow_\uparrow \in \mathbb{P}_\sigma(\mathfrak{F}_\mu^*) \quad \forall \mu \in \mathbb{P}_\sigma(\mathcal{L});$$

кроме того, с учетом (3.16) получаем очевидное следствие:

$$\mu^\downarrow_\uparrow \in \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{F}_\mu^*) \quad \forall \mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}). \quad (3.17)$$

Предложение 1. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_\sigma(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$, то $\mu^\downarrow_\uparrow$ есть недираковская с.-а. (0,1)-мера: $\mu^\downarrow_\uparrow \in \mathbb{T}_\sigma(\mathfrak{F}_\mu^*) \setminus \mathbb{D}(\mathfrak{F}_\mu^*)$.

Для доказательства достаточно (см. (3.17)) показать, что $\mu_{\dagger}^{\downarrow} \notin \mathbb{D}(\mathfrak{F}_{\mu}^*)$. Пусть $x \in E$. Поскольку $\mu \notin \mathbb{D}(\mathcal{L})$, имеем $\mu \neq (\delta_x|\mathcal{L})$, то есть для некоторого $\Lambda \in \mathcal{L}$ $\mu(\Lambda) \neq \delta_x(\Lambda)$. Поскольку $\mathcal{L} \subset \mathfrak{F}_{\mu}^*$, то $\Lambda \in \mathfrak{F}_{\mu}^*$. Поэтому $(\delta_x|\mathfrak{F}_{\mu}^*)(\Lambda) \neq \mu(\Lambda) = \mu_{\dagger}^{\downarrow}(\Lambda)$. Тогда

$$\mu_{\dagger}^{\downarrow} \neq (\delta_x|\mathfrak{F}_{\mu}^*).$$

Поскольку выбор x был произвольным, из (2.2) имеем, что $\mu_{\dagger}^{\downarrow} \notin \mathbb{D}(\mathfrak{F}_{\mu}^*)$. $\square$

Далее рассматриваются продолжения мер на естественное универсальное семейство п/м E ; в качестве такового используется σ -алгебра, порожденная алгеброй множеств. При этом

$$\sigma_E^0(\mathcal{L}) \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_{\mu}^*) \quad \forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]. \quad (3.18)$$

С учетом (3.18) каждая мера (3.15) сужается на σ -алгебру п/м E , порожденную исходной алгеброй множеств: $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$

$$\lambda^0[\mu] \triangleq (\mu_{\dagger}^{\downarrow}|\sigma_E^0(\mathcal{L})) \in (\sigma - \text{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})]. \quad (3.19)$$

Из (3.15), (3.18) и (3.19) следует свойство: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, то $\lambda^0[\mu]$ есть ФМ

$$\Lambda \longmapsto \inf_{H \in \{\cup_1^{\infty}\}(\mathcal{L})|(\Lambda)} \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) : \sigma_E^0(\mathcal{L}) \longrightarrow [0, \infty[. \quad (3.20)$$

Теперь при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ мы в виде правила

$$\mu \longmapsto \lambda^0[\mu] : (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}] \longrightarrow (\sigma - \text{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})] \quad (3.21)$$

имеем оператор продолжения меры, определенный в конусе неотрицательных мер на $\mathcal{L}$.

Замечание 1. Переходя к сужениям вида (3.19), мы получаем универсальное пространство продолжений исходных мер на $\mathcal{L}$. В качестве исходного выступает конус $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$. Мы ограничиваемся здесь рассмотрением продолжений на $\sigma_E^0(\mathcal{L})$, хотя можно было бы использовать в аналогичных целях (то есть вместо $\sigma_E^0(\mathcal{L})$) σ -алгебру абсолютно измеримых [2, с. 37] п/м E .

В связи с (3.19)–(3.21) напомним, что $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$

$$(\mu = (\lambda^0[\mu]|\mathcal{L})) \ \& \ (\forall \nu \in (\sigma - \text{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})] \ ((\mu = (\nu|\mathcal{L})) \implies (\nu = \lambda^0[\mu]))). \quad (3.22)$$

В (3.22) имеем хорошо известное (см. [1; 2; 3]) свойство существования и единственности (лебеговского) продолжения неотрицательной с.-а. меры; в (3.20) дано «минимаксное» представление продолженной меры. Отметим одно очевидное следствие предложения 1: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{T}_{\sigma}(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{D}(\mathcal{L})$, то

$$\lambda^0[\mu] \in \mathbb{T}_{\sigma}(\sigma_E^0(\mathcal{L})) \setminus \mathbb{D}(\sigma_E^0(\mathcal{L})). \quad (3.23)$$

Свойство (3.23) использовалось в [8, с. 245] и [9, с. 195] при исследовании структуры недираковских с.-а. (0,1)-мер.

Заметим, что при $\mathcal{L} \in (\sigma - \text{alg})[E]$, $\mu_1 \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\mu_2 \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$

$$(\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{B}(\mathcal{L})) \ \& \ (\lambda^0[\mu_1] - \lambda^0[\mu_2] \in \mathbb{B}(\sigma_E^0(\mathcal{L}))),$$

а потому (см. § 1) определены следующие два значения sup-норм:

$$(\|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathcal{L}} \in [0, \infty[) \ \& \ (\|\lambda^0[\mu_1] - \lambda^0[\mu_2]\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})} \in [0, \infty[).$$

Предложение 2. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu_1 \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\mu_2 \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathcal{L}} = \|\lambda^0[\mu_1] - \lambda^0[\mu_2]\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}.$$

Доказательство легко извлекается из представления (3.20). Из предложения 2 видно, что оператор (3.21) изометричен в конусе $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$. Этот факт (см. также [5; 6]) играет важную роль: мы распространяем данное свойство на линейное пространство ограниченных с.-а. мер.

§ 4. Продолжение ограниченных знакопеременных мер

В настоящем разделе оператор (3.20), (3.21) распространяется на (линейное) пространство $(\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$. Однако сначала напомним некоторые известные свойства с.-а. мер (см., в частности, [1; 2; 3; 4]).

Возвращаясь к (2.1), условимся о соглашениях: если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, $\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ и $L \in \mathcal{L}$, то

$$(\text{VAR})_L[\mu] \triangleq \{t \in [0, \infty[\mid \exists m \in \mathcal{N} \exists (L_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \Delta_m(L, \mathcal{L}) : t = \sum_{i=1}^m |\mu(L_i)|\}; \quad (4.1)$$

получили непустое п/м $[0, \infty[$. В (4.1) можно, в частности, полагать $L = E$. Тогда

$$\mathbb{A}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in (\text{add})[\mathcal{L}] \mid \exists c \in [0, \infty[: (\text{VAR})_E[\mu] \subset [0, c]\} \quad \forall \mathcal{L} \in \pi[E].$$

Тем самым в общем случае ИП $(E, \mathcal{L})$, $\mathcal{L} \in \pi[E]$, введено (линейное) пространство в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L} \in \pi[E]$, $(\text{add})_+[\mathcal{L}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$; если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то

$$V_\mu \triangleq \sup((\text{VAR})_E[\mu]) \in [0, \infty[$$

есть полная вариация μ ($V_\mu = \mu(E)$ при $\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]$). Если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, то

$$\mu \longmapsto V_\mu : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow [0, \infty[$$

есть (сильная) норма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, обозначаемая в дальнейшем через $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})}$; итак, $\|\nu\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})} = V_\nu$ $\forall \nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Определяем вариацию как ФМ: если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то

$$\mathbf{v}_\mu : \mathcal{L} \longrightarrow [0, V_\mu]$$

определяем обычным правилом: $\mathbf{v}_\mu(L) \triangleq \sup((\text{VAR})_L[\mu]) \quad \forall L \in \mathcal{L}$. Если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, то $\mathbb{A}(\mathcal{L}) \subset (\text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$. Кроме того,

$$\mathbb{A}(\mathcal{L}) = (\text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E]. \quad (4.2)$$

Отметим простое свойство: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то (см. (4.2))

$$\|\mu\|_{\mathcal{L}} \leq \|\mu\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})} \leq 2\|\mu\|_{\mathcal{L}}.$$

Напомним, что $\mathbf{v}_\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Подобное свойство справедливо и в случае ИП с полуалгеброй множеств (см. [10, с.102]), но ограничимся вышеупомянутой версией. Как следствие, $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$(\mu^+ \triangleq \frac{1}{2}(\mathbf{v}_\mu + \mu) \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]) \& (\mu^- \triangleq \frac{1}{2}(\mathbf{v}_\mu - \mu) \in (\text{add})_+[\mathcal{L}]) \quad (4.3)$$

(из определений следует, что $|\mu(L)| \in (\text{VAR})_L[\mu]$ при $L \in \mathcal{L}$). При $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $L \in \mathcal{L}$ множество-образ $\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(L))$ обладает свойством

$$\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(L)) \in \mathcal{P}'([- \|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]),$$

что позволяет определить точную верхнюю грань $\sup(\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(L))) \in [0, \infty[$. При этом [1, с.113]

$$\mu^+(L) = \sup(\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(L))) \quad \forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \quad \forall L \in \mathcal{L}. \quad (4.4)$$

В связи с (4.3), (4.4) отметим важное порядковое свойство: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то к.-а. мера

$$\mu \vee \nu \triangleq \mu + (\nu - \mu)^+ \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \quad (4.5)$$

является точной верхней гранью двоеочия $\{\mu; \nu\}$:

$$(\mu \leq \mu \vee \nu) \& (\nu \leq \mu \vee \nu) \& (\forall \eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) ((\mu \leq \eta) \& (\nu \leq \eta)) \implies (\mu \vee \nu \leq \eta)). \quad (4.6)$$

Свойство (4.6) хорошо известно (см., например, [11, гл. XII]). Заметим, в частности, что при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ к.-а. мера μ^+ (4.3) является точной верхней гранью двоеочия $\{\mu; \mathcal{O}_{\mathcal{L}}\}$. Это следует из (4.6), поскольку $\{\mu; \nu\} = \{\nu; \mu\}$ и (как следствие) $\mu \vee \nu = \nu \vee \mu$. Отметим здесь же известное [1; 2; 3] свойство: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то

$$\mu \wedge \nu \triangleq \mu - (\mu - \nu)^+ \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$$

есть точная нижняя грань двоеочия $\{\mu; \nu\}$, то есть $\mu \wedge \nu \leq \mu$, $\mu \wedge \nu \leq \nu$ и, наконец, $\forall \xi \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$((\xi \leq \mu) \& (\xi \leq \nu)) \implies (\xi \leq \mu \wedge \nu);$$

если при этом $\eta = (-\mu) \vee (-\nu)$, то

$$\mu \wedge \nu = -\eta. \quad (4.7)$$

Свойство (4.7) позволяет ограничиться в последующих построениях рассмотрением точных верхних граней (4.5).

Отметим, что в силу (4.2) при всяком выборе $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ $(\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ является линейным подпространством $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; поэтому, в частности, при $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ определены к.-а. меры $\mathbf{v}_{\mu}$, μ^+ и μ^- ; см. (4.3). Более того, хорошо известно [1, гл. III], что

$$\mathbf{v}_{\mu} \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}] \quad \forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}). \quad (4.8)$$

Из (4.8) получаем очевидные следствия, связанные с (4.3): если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$(\mu^+ \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]) \& (\mu^- \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]) \quad (4.9)$$

реализуют стандартное разложение Жордана:

$$(\mu = \mu^+ - \mu^-) \& (\mathbf{v}_{\mu} = \mu^+ + \mu^-). \quad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) следует, в свою очередь, что

$$\begin{aligned} \mu \vee \nu &\in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \\ \forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \quad \forall \nu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Кроме того, имеем свойство (см. (4.7)): если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ и $\nu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$\mu \wedge \nu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}). \quad (4.12)$$

Возвращаясь к (3.19), отметим с учетом (4.9), (4.10) важное свойство: $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$\lambda_0[\mu] \triangleq \lambda^0[\mu^+] - \lambda^0[\mu^-] \in (\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})] \quad (4.13)$$

(используем (3.19) и линейность пространства $(\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$). При этом согласно (3.22), (4.10) и (4.13) имеем $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$(\lambda_0[\mu]|\mathcal{L}) = (\lambda^0[\mu^+]|\mathcal{L}) - (\lambda^0[\mu^-]|\mathcal{L}) = \mu^+ - \mu^- = \mu. \quad (4.14)$$

Итак (см. (4.13), (4.14)), имеем (известную [1, гл. III]) процедуру продолжения ограниченной с.-а. меры. Условимся о следующем соглашении: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}} \triangleq (\lambda_0[\mu])_{\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})}; \quad (4.15)$$

итак, $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}} : (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \longrightarrow (\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$ определяется правилом:

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) = \lambda_0[\mu] = \lambda^0[\mu^+] - \lambda^0[\mu^-]. \quad (4.16)$$

С учетом (4.14) и (4.16) получаем свойство: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$(\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) | \mathcal{L}) = \mu;$$

итак, $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)$ есть с.-а. продолжение μ на σ -алгебру $\sigma_E^0(\mathcal{L})$. Отметим теперь известное свойство ограниченности в/з с.-а. меры на σ -алгебре множеств (данное свойство связано с разложением Хана; см. [3, с. 208]): если $\mathcal{F} \in (\sigma - \text{alg})[E]$, то $(\sigma - \text{add})[\mathcal{F}] \subset \mathbb{B}(\mathcal{F})$ и, как следствие,

$$(\sigma - \text{add})[\mathcal{F}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{F}); \quad (4.17)$$

в частности, (4.17) можно использовать при $\mathcal{F} = \sigma_E^0(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$. В связи с (4.17) отметим, что при $\mathcal{F} \in (\sigma - \text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{F}]$ определены значения

$$(\|\mu\|_{\mathcal{F}} \in [0, \infty]) \ \& \ (\|\mu\|_{\mathcal{F}}^{(\mathbf{v})} \in [0, \infty]).$$

Последние также потребуются при $\mathcal{F} = \sigma_E^0(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$; сейчас отметим только, что $(\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$ есть линейное подпространство $\mathbb{A}(\sigma_E^0(\mathcal{L}))$.

Напомним (см. [1, 11]) также, что $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \ \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$\mathbf{v}_{\mu} = \mathbf{v}_{-\mu} = \mu \vee (-\mu). \quad (4.18)$$

Из (4.18) имеем при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ равенство $\mu^- = (-\mu)^+$; см. (4.3). Эти свойства дополняются простыми следствиями определений: $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \ \forall \alpha \in [0, \infty[\ \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$(\mathbf{v}_{\alpha\mu} = \alpha\mathbf{v}_{\mu}) \ \& \ ((\alpha\mu)^+ = \alpha\mu^+) \ \& \ ((\alpha\mu)^- = \alpha\mu^-). \quad (4.19)$$

Кроме того, имеем $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \ \forall \alpha \in]-\infty, 0[\ \forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$

$$(\mathbf{v}_{\alpha\mu} = |\alpha|\mathbf{v}_{\mu}) \ \& \ ((\alpha\mu)^+ = |\alpha|\mu^+) \ \& \ ((\alpha\mu)^- = |\alpha|\mu^-). \quad (4.20)$$

Свойства (4.19), (4.20) полезно дополнить «игровыми» представлениями, подобными (3.20), но касающимися продолжений знакопеременных мер. Заметим сначала, что (см. (4.2)) при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $H \in \mathcal{P}(E)$

$$\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)) \in \mathcal{P}'([-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]), \quad (4.21)$$

поэтому определена (конечная) точная верхняя грань множества в левой части (4.21):

$$\sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) = \sup(\mu^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H))) \in [-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]. \quad (4.22)$$

Если же зафиксировать $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $S \in \sigma_E^0(\mathcal{L})$, то, согласно (4.22),

$$\left\{ \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) : H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S) \right\} \in \mathcal{P}'([-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}])$$

($[\mathcal{L}](S) \subset [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)$, причем $E \in [\mathcal{L}](S)$), что позволяет определить (конечную) точную нижнюю грань

$$\inf_{H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)} \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) \in [-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]. \quad (4.23)$$

Кроме того, в силу (4.21) определена при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $H \in \mathcal{P}(E)$ (конечная) точная нижняя грань множества в левой части (4.21):

$$\inf_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) \in [-\|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}].$$

Как следствие при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $S \in \mathcal{P}(E)$

$$\left\{ \inf_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) : H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S) \right\} \in \mathcal{P}'([- \|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]);$$

это позволяет ввести точную верхнюю грань:

$$\sup_{H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)} \inf_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) \in [- \|\mu\|_{\mathcal{L}}, \|\mu\|_{\mathcal{L}}]. \quad (4.24)$$

Разумеется, значения (4.23) и (4.24) определены (см. (4.2)) при $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$. Более того, справедлива следующая

Теорема 1. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ и $S \in \sigma_E^0(\mathcal{L})$, то

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)(S) = \inf_{H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)} \sup_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L) + \sup_{H \in [\{\cup_1^\infty\}(\mathcal{L})](S)} \inf_{L \in \mathcal{L} \cap \mathcal{P}(H)} \mu(L). \quad (4.25)$$

Доказательство использует (3.20), (4.4), (4.16) и хорошо известные свойства операций $\inf$ и $\sup$ (см. [12, гл. 2]). В свою очередь, из теоремы 1 легко следует

Предложение 3. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$\|\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})} = \|\mu\|_{\mathcal{L}}.$$

Доказательство вытекает из (4.14), (4.16) и теоремы 1; учитываем при этом (в связи с (4.25)) очевидную оценку: если $a \in [0, \infty[$ и $b \in [0, \infty[$, то $|a - b| \leq \sup(\{a; b\})$.

С учетом теоремы 1 (см. (4.25)) получаем, что $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \alpha \in [0, \infty[\quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\alpha\mu) = \lambda_0[\alpha\mu] = \alpha\lambda_0[\mu] = \alpha\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu). \quad (4.26)$$

Кроме того, с учетом соотношений, связывающих операции $\sup$ и $\inf$ (см. [12, с. 38]), легко устанавливается свойство: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то $\lambda_0[-\mu] = -\lambda_0[\mu]$. С учетом (4.26) имеем теперь

Предложение 4. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то справедливо равенство $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\alpha\mu) = \alpha\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)$.

Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$(\mu + \nu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]) \ \& \ (\lambda^0[\mu] + \lambda^0[\nu] \in (\sigma - \text{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})]).$$

Предложение 5. Если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, то $\lambda^0[\mu + \nu] = \lambda^0[\mu] + \lambda^0[\nu]$.

Доказательство см. в [7, с. 294]. Как следствие получаем свойство: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, $\mu_1 \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\mu_2 \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, $\nu_1 \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu_2 \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$(\mu_1 - \mu_2 = \nu_1 - \nu_2) \implies (\lambda^0[\mu_1] - \lambda^0[\mu_2] = \lambda^0[\nu_1] - \lambda^0[\nu_2]).$$

Кроме того (см. (3.22)), при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mu \in (\sigma - \text{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$ для меры $(\mu|\mathcal{L}) \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$ имеем очевидное свойство:

$$\mu = \lambda^0[(\mu|\mathcal{L})].$$

С учетом этого имеем (см. [7, с. 295]) $\forall \mathcal{L} \in (\text{alg})[E] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \quad \forall \nu \in (\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$

$$(\mu = (\nu|\mathcal{L})) \implies (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) = \nu) \quad (4.27)$$

(знакопеременный аналог свойства (3.22)). Теперь вполне очевидно свойство [7, с. 296]: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}} \in (\text{bi})[(\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}); (\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]]$$

(свойство биективности). Из вышеупомянутых свойств оператора продолжения вытекает [7, с. 297] следующее положение: если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ (4.15) есть линейный оператор. С учетом предложения 3 имеем (см. теорему 4.11.1 монографии [7]) следующее важное

Свойство изометрической изоморфности в смысле sup-норм: *если $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, то $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ есть изометрический изоморфизм $(\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ на $(\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$ с нормами, определяемыми соответственно как*

$$(\|\cdot\|_{\mathcal{L}}|(\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})), \quad (\|\cdot\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}|(\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]);$$

иными словами, $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ — изометрический изоморфизм относительно sup-норм пространств $(\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ и $(\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$ (в этой связи см. также [5, 6]).

§ 5. Изометрическая изоморфность оператора продолжения в смысле сильных норм

В настоящем разделе рассматриваем свойства оператора (4.15), связанные с другим способом нормирования пространств мер. Именно фиксируя в настоящем разделе алгебру $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, рассматриваем

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})}), \quad (\mathbb{A}(\sigma_E^0(\mathcal{L})), \|\cdot\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}^{(\mathbf{v})});$$

соответственно рассматриваем

$$(\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}), \quad (\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})] \quad (5.1)$$

как подпространства упомянутых нормированных (на самом деле — банаховых) пространств. Упомянутые нормы именуем сильными, имея в виду положение [1, с. 280] (см. также [7, с. 152]). Нормы-сужения пространств (5.1), то есть

$$(\|\cdot\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})}|(\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})), \quad (\|\cdot\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}^{(\mathbf{v})}|(\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})])$$

условимся также называть сильными, говоря таким образом об оснащении пространств (5.1) сильными нормами. Используем положения [7, § 4.11] и учитываем свойство (4.17). Поскольку $\mathcal{O}_{\sigma_E^0(\mathcal{L})} = \lambda^0[\mathcal{O}_{\mathcal{L}}] = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_{\mathcal{L}})$ (см. (3.22), (4.27)), то

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) = \lambda_0[\mu] = \lambda^0[\mu] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]. \quad (5.2)$$

С учетом (5.2) и свойства линейности $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ имеем (см. [7, с. 299, 300]): $\forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ $\forall \nu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$(\mu \leq \nu) \implies (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) \leq \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu)). \quad (5.3)$$

Стало быть, $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ — линейная изотонная биекция пространств (5.1) (порядковый изоморфизм). Полезно иметь в виду следующее простое свойство

$$(\mu|\mathcal{L}) \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}) \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]. \quad (5.4)$$

С учетом (5.4) имеем [7, с. 301] практически очевидное положение: $\forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ $\forall \nu \in (\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$

$$(\mu \leq (\nu|\mathcal{L})) \iff (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) \leq \nu).$$

Как показано в [7, с. 302, 303], $\forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$

$$((\lambda_0[\mu])^+ \leq \lambda^0[\mu^+]) \& ((\lambda_0[\mu])^- \leq \lambda^0[\mu^-]). \quad (5.5)$$

В связи с (5.5) отметим с учетом (4.8), что при $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ определена мера $\lambda^0[\mathbf{v}_\mu] \in (\sigma - \text{add})_+[\sigma_E^0(\mathcal{L})]$. Более того, как показано в [7, с. 303, 304],

$$\mathbf{v}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)} = \mathbf{v}_{\lambda_0[\mu]} = \lambda^0[\mathbf{v}_\mu] \quad \forall \mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L}). \quad (5.6)$$

В (5.6) речь идет о совпадении ФМ. Но, как следствие, имеем равенство значений этих ФМ в «точке» E , то есть совпадение полных вариаций (см. [7, с. 304]). Итак, имеем

Свойство изометричности в смысле сильных норм: если $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$\|\mu\|_{\mathcal{L}}^{(\mathbf{v})} = V_\mu = \mathbf{v}_\mu(E) = \lambda^0[\mathbf{v}_\mu](E) = \mathbf{v}_{\lambda_0[\mu]}(E) = \mathbf{v}_{\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)}(E) = V_{\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)} = \|\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)\|_{\sigma_E^0(\mathcal{L})}^{(\mathbf{v})}. \quad (5.7)$$

С учетом (5.7) и ранее установленных свойств $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ получаем теорему 11.2 монографии [7], доставляющую следующее

Свойство изометрической изоморфности в классе сильных норм: оператор $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ есть изометрический изоморфизм пространств (5.1) в оснащении сильными нормами (см. также [5, 6]).

Предложение 6. Если $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$(\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu))^+ = (\lambda_0[\mu])^+ = \lambda^0[\mu^+].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (4.3) имеем по свойству линейности $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$, что

$$(\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu))^+ = (\lambda_0[\mu])^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{\lambda_0[\mu]} + \lambda_0[\mu]) = \frac{1}{2}(\lambda^0[\mathbf{v}_\mu] + \lambda_0[\mu]). \quad (5.8)$$

С учетом (4.3), (4.8) и (5.2) имеем, однако, из (5.8) цепочку равенств

$$(\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu))^+ = \frac{1}{2}(\lambda_0[\mathbf{v}_\mu] + \lambda_0[\mu]) = \frac{1}{2}(\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mathbf{v}_\mu) + \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu)) = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{v}_\mu + \mu)\right) = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu^+) = \lambda_0[\mu^+] = \lambda^0[\mu^+].$$

□

Отметим с учетом (4.2), (4.11) и (4.17), что при $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ и $\nu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ определены меры

$$(\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu \vee \nu) = \lambda_0[\mu \vee \nu] \in (\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})] \text{ \& } (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) \vee \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu) \in (\sigma - \text{add})[\sigma_E^0(\mathcal{L})]).$$

Теорема 2. Если $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ и $\nu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu \vee \nu) = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) \vee \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (4.5), (4.9) и линейности $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ получаем равенство

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu \vee \nu) = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) + \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}((\nu - \mu)^+), \quad (5.9)$$

где $(\nu - \mu)^+ \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{L}]$. Согласно (5.2) и предложению 6

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}((\nu - \mu)^+) = \lambda^0[(\nu - \mu)^+] = (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu - \mu))^+ = (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu) - \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu))^+ \quad (5.10)$$

(учитываем также свойство линейности $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$). Из (4.5), (5.9) и (5.10) вытекает, что

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu \vee \nu) = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) + (\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu) - \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu))^+ = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) \vee \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu). \quad \square$$

Следствие 1. Если $\mu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$ и $\nu \in (\sigma - \text{add})[\mathcal{L}] \cap \mathbb{B}(\mathcal{L})$, то

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu \wedge \nu) = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) \wedge \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu). \quad (5.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (4.7) и теоремы 2 имеем, что

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu \wedge \nu) = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(-\eta), \quad (5.12)$$

где $\eta = (-\mu) \vee (-\nu)$, причем $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(-\eta) = -\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\eta) = -\gamma$, где $\gamma = \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(-\mu) \vee \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(-\nu)$. Вновь используя (4.7), получаем, что

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\mu) \wedge \mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(\nu) = (-\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(-\mu)) \wedge (-\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}(-\nu)) = -\gamma. \quad (5.13)$$

Комбинируя (5.12) и (5.13), получаем (5.11). □

Теорема 2 и следствие 1 характеризуют $\mathfrak{C}_{\mathcal{L}}$ как решеточный изоморфизм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. — 895 с.
2. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969. — 309 с.
3. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 1. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. — 543 с.
4. Богачев В. И. Основы теории меры. Т. 2. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2003. — 575 с.
5. Ченцов А. Г. К вопросу о продолжении меры // Методы негладкой оптимизации и задачи управления: сб. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. — С. 126–134.
6. Ченцов А. Г. О задаче продолжения меры / АН СССР. УНЦ. ИММ. Свердловск, 1983. — 81 с. — Деп. в ВИНТИ 29.06.83, № 3504-83.
7. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры. I. — Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. — 388 с.
8. Ченцов А. Г. Об одном классе недираковских счетно-аддитивных мер // Вестник ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения (специальный выпуск): сб. Пермь: ПГТУ. 2002. — С. 238–252.
9. Ченцов А. Г. Недираковские $(0,1)$ -меры и σ -топологические пространства // Вестник Челябинского университета. — 2003. — № 2(8). — С. 190–202.
10. Ченцов А. Г. Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1985. — 128 с.
11. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. — 624 с.
12. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. — 430 с.

Поступила в редакцию 01.08.09

A. G. Chentsov

Some properties of the operator of the measure extension

The operator defining for a measure on algebra of sets, the extension on the σ -algebra generated by the given algebra is considered. On the basis of the representation of the extended measure in the minimax terms, the property of the isometric isomorphism for the above-mentioned operator for the traditional normalizations is established. Some properties connected with the preservation of order relations under the given operator are established.

Keywords: algebra of sets, measure, extension of measure, isometric isomorphism

Mathematical Subject Classifications: 28A33

Ченцов Александр Георгиевич, член-корреспондент РАН, заведующий отделом Института математики и механики УрО РАН, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, E-mail: chentsov@imm.uran.ru