Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. L. Tonkov, The space of linear control systems and its canonical representatives,
Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2012, Issue 1, 60–76

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.135.184

April 26, 2023, 17:58:05

УДК 517.917

© *Е. Л. Тонков***ПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ
И ЕГО КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВИТЕЛИ ¹**

Для пространства линейных управляемых систем, параметризованных с помощью топологической динамической системы, построены для каждого инвариантного (относительно потока в фазовом пространстве динамической системы) пространства расширения и отвечающее ему перроновское преобразование, приводящее заданное семейство систем к так называемой канонической системе. Доказано также, что на минимальных инвариантных пространствах перроновское преобразование обладает свойством рекуррентности.

Ключевые слова: линейные управляемые системы, пространство управляемости, перроновское преобразование, динамические системы.

Введение

В 1930 году О. Перрон опубликовал [1] следующую теорему:
всякую линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (0.1)$$

с непрерывной вещественнозначной функцией $t \rightarrow A(t)$ можно привести с помощью ортогонального ляпуновского преобразования $x = P(t)y$ (такое преобразование называется перроновским) к системе

$$\dot{y} = F(t)y \quad (0.2)$$

с верхней треугольной матрицей $F(t)$.

Существенным дополнением к теореме Перрона служит доказанное в 1967 году В. М. Миллиончиковым [2] следующее утверждение:

линейная система (0.1) с рекуррентной функцией $t \rightarrow A(t)$ приводима рекуррентным перроновским преобразованием $x = P(t)y$ к системе (0.2) с верхней треугольной рекуррентной функцией $t \rightarrow F(t)$. Более того, функции $t \rightarrow A(t)$, $t \rightarrow P(t)$, $t \rightarrow F(t)$ совместно рекуррентны.

Аналог этой теоремы для семейства линейных управляемых систем

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (0.3)$$

был получен в 1997 году в нашей с С. Н. Поповой статье [3]:

пусть фазовое пространство Σ топологической динамической системы (Σ, f^t) минимально и r — размерность пространства управляемости $\mathcal{L}_\partial(\sigma)$ системы (0.3). Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma$ эта система приводима перроновским преобразованием $x = P(t, \sigma)y$ к системе

$$\dot{y} = F(t, \sigma)y + G(t, \sigma)u, \quad (0.4)$$

причем матрица $F(t, \sigma)$ верхняя треугольная, а последние $n - r$ строк $(n \times m)$ -матрицы $G(t, \sigma)$ равны нулю.

Такая система (0.4) была названа в статье [4] *каноническим представителем* системы (0.3). В этой работе, продолжающей исследования статьи [4], теорема о каноническом представителе распространена на достаточно общий класс линейных управляемых систем, кроме того, устранены замеченные в статье [4] пробелы в доказательствах двух теорем статьи [4] и эти теоремы дополнены новыми утверждениями.

¹Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления», гранта Правительства РФ по государственной поддержке научных исследований (№11.G34.31.0039) и гранта РФФИ (12-01-00195-а).

§ 1. Вводный параграф

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство [5] и, следовательно, в $\mathbb{R}^n$ фиксирован стандартный базис $e^1 \doteq \text{col}(1, 0 \dots 0) \dots e^n \doteq \text{col}(0 \dots 0, 1)$, а запись $\mathbb{M}(n, m)$ означает пространство $(n \times m)$ -матриц с нормой $|\cdot|$, согласованной с евклидовой нормой пространства $\mathbb{R}^n$, E — единичная матрица в $\mathbb{R}^n$.

Напомним [6, ч. II, гл. 1], что пара (Σ, f^t) называется *топологической динамической системой*, если Σ — полное метрическое пространство, называемое фазовым пространством динамической системы, а $\{f^t\}$ — поток на Σ , то есть однопараметрическая группа движений $f^t: \Sigma \rightarrow \Sigma$ ($f^{t+s}\sigma = f^t(f^s\sigma)$ при всех $t, s \in \mathbb{R}$) непрерывная по совокупности переменных (t, σ) и удовлетворяющая начальному условию $f^t\sigma|_{t=0} = \sigma$.

Множество $\text{orb}(\sigma) \doteq \{f^t\sigma : t \in \mathbb{R}\}$ называется *траекторией* точки σ , $\overline{\text{orb}}(\sigma)$ — *замыканием* траектории $\text{orb}(\sigma)$, а множество $\mathcal{O}(\sigma)$, состоящее из всех частичных пределов *положительной полутраектории* $\text{orb}_+(\sigma) \doteq \{f^t\sigma : t \in [0, \infty)\}$ при $t \rightarrow \infty$ — *омега-предельным* множеством точки σ . Аналогичные определения вводятся для *отрицательной* полутраектории $\text{orb}_-(\sigma)$ и *альфа-предельного* множества $\mathcal{A}(\sigma)$ точки σ . Далее, заданное подмножество Σ_0 пространства Σ называется *инвариантным*, если для каждой точки σ множества Σ_0 вся траектория $\text{orb}(\sigma)$ остается в пространстве Σ_0 , и пространство Σ_0 называется *положительно инвариантным*, если для каждой точки σ пространства Σ_0 положительная полутраектория $\text{orb}_+(\sigma)$ целиком содержится в Σ_0 .

Напомним, кроме того, что фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, f^t) называется *минимальным* (относительно потока f^t), если оно замкнуто и равенство $\overline{\text{orb}}(\sigma) = \Sigma$ выполнено для любых $\sigma \in \Sigma$. Оказывается, что, как доказал Дж. Д. Биркгоф (см., например, [7, гл. V], [8]), *всякое инвариантное компактное множество содержит минимальное подмножество и любое движение в минимальном множестве рекуррентно*. Это означает, что для каждой точки $\sigma \in \Sigma$ и любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество

$$\theta(\varepsilon, \vartheta, \sigma) \doteq \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq \vartheta} \rho(f^{t+\tau}\sigma, f^t\sigma) \leq \varepsilon \right\} \quad (1.1)$$

(ε, ϑ) -почти периодов движения $t \rightarrow f^t\sigma$ относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$ (для любых $\varepsilon > 0$, $\vartheta > 0$, найдется такое число $\ell = \ell(\varepsilon, \vartheta)$, что на любом отрезке $[t_0, t_0 + \ell]$ длины ℓ найдется по крайней мере одна точка множества (1.1)).

Далее, если на фазовом пространстве Σ фиксированной топологической динамической системы (Σ, f^t) заданы две *непрерывные* функции $A: \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ и $B: \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n, m)$, то будем говорить, что задано *семейство линейных управляемых систем*

$$\dot{x} = A(f^t\sigma)x + B(f^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (1.2)$$

Это семейство мы будем отождествлять с парой (S, Σ) , где

$$S(\sigma) \doteq (A(\sigma), B(\sigma)) \in \mathbb{M}(n, n + m), \quad \sigma \in \Sigma, \quad (1.3)$$

а фиксированную систему семейств (S, Σ) — с парой (S, σ) .

Замечание 1. В дальнейшем удобно считать, что семейство систем (S, Σ) , заданных равенством (1.3), содержит, наряду с системой (1.2), все системы, полученные из системы (1.2) любым *ляпуновским* преобразованием $x = L(t, \sigma)y$. Напомним, что преобразование $x = L(t, \sigma)y$ называется *ляпуновским*, если функция $(t, \sigma) \rightarrow L(t, \sigma)$ непрерывна, функция $t \rightarrow L(t, \sigma)$ непрерывно дифференцируема и при каждом $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (|L(t, \sigma)| + |dL(t, \sigma)/dt| + |L^{-1}(t, \sigma)|) < \infty.$$

Отметим также, что если при всех $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ для ляпуновского преобразования $L(t, \sigma)$ выполнено равенство $L(t, \sigma) = L(0, f^t\sigma)$, то оно задаётся функцией одной переменной $L(\sigma)$ и называется *стационарным* ляпуновским преобразованием.

Пространство всех систем (S, σ) с непрерывными на Σ функциями $\sigma \rightarrow S(\sigma)$ обозначим $\mathfrak{S}$.

§ 2. Динамическая система сдвигов

Рассматриваемая здесь *динамическая система сдвигов* имеет право на самостоятельное существование не только потому, что в математической теории управления она играет совершенно особую роль, но и потому, что, как показал М.В. Бебутов [9], *всякая динамическая система, фазовое пространство которой локально компактно и имеет вторую аксиому счетности, гомеоморфна динамической системе сдвигов*.

Пусть фиксированы два целых числа n, m , где $n \geq m > 0$ и пространство $\mathfrak{X}$ непрерывных на числовой прямой $\mathbb{R}$ функций $t \rightarrow \varphi(t)$ со значениями в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{M}(n, n+m)$, где $\varphi(t) \doteq (A(t), B(t))$ задаёт управляемую систему (0.3), определенную функциями $t \rightarrow A(t) \in \mathbb{M}(n)$ и $t \rightarrow B(t) \in \mathbb{M}(n, m)$. Такое пространство мы снабдим метрикой Бебутова [7, с. 533]

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \min \left\{ |\varphi(t) - \psi(t)|, |t|^{-1} \right\}, \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{X}. \quad (2.1)$$

Тогда имеют место следующие три леммы [9].

Лемма 1. *Пространство $\mathfrak{X}$ является полным сепарабельным метрическим пространством. Топология, порождаемая метрикой (2.1), эквивалентна топологии равномерной сходимости на отрезках (называемой еще локально компактной топологией).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно из определения метрики (2.1) следует, что неравенство $\rho(\varphi, \psi) \leq \varepsilon$ влечет неравенство $|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \varepsilon$, выполненное для всех t , удовлетворяющих неравенству $|t| \leq \varepsilon^{-1}$. Следовательно, из сходимости в метрике (2.1) последовательности $\{\varphi^k\}$ функций $\varphi^k \in \mathfrak{X}$ к функции $\varphi \in \mathfrak{X}$ следует сходимость $\varphi^k(t) \rightarrow \varphi(t)$, равномерная на каждом отрезке времени $I_\vartheta \doteq [-\vartheta, \vartheta]$.

Пусть теперь заданы последовательность $\{\varphi^k\}$, где $\varphi^k \in \mathfrak{X}$, и функция $t \rightarrow \varphi(t)$, определенная при всех $t \in \mathbb{R}$, принимающая значения в пространстве $\mathbb{M}(n, n+m)$. Предположим, что для любого отрезка I_ϑ сужение последовательности $\{\varphi^k\}$ на отрезок I_ϑ равномерно сходится к функции $t \rightarrow \varphi(t)$, $t \in I_\vartheta$. Следовательно, функция $t \rightarrow \varphi(t)$ непрерывна на числовой прямой $\mathbb{R}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется какой номер $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что для каждого $k \geq k_0$ при всех t , удовлетворяющих неравенству $|t| \leq \varepsilon^{-1}$, выполнено неравенство $|\varphi^k(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$. Из этих двух неравенств, как легко заметить, при каждом t следует неравенство

$$\min \left\{ |\varphi^k(t) - \varphi(t)|, |t|^{-1} \right\} \leq \varepsilon,$$

из которого ясно, что имеет место неравенство $\rho(\varphi^k, \varphi) \leq \varepsilon$. Мы показали, что сходимость последовательности $\{\varphi_k\}$ к φ в метрике ρ эквивалентна сходимости, равномерной на отрезках.

Отметим теперь, что пространство $\mathfrak{X}$ имеет счетную базу (например, счетную базу образует множество полиномов вида $a_0 t^k + \dots + a_k$ с рациональными коэффициентами $a_0 \dots a_k$ со значениями в пространстве $\mathbb{M}(n, n+m)$, $k = 0, 1, \dots$). $\square$

Пусть $\varphi \in \mathfrak{X}$. Сдвиг функции φ на константу τ обозначим $\varphi_\tau : \varphi_\tau(t) \doteq \varphi(t + \tau)$, где t пробегает всю числовую прямую $\mathbb{R}$. Поток на $\mathfrak{X}$ определим равенством $h^\tau \varphi = \varphi_\tau$.

Лемма 2. *Пара $(\mathfrak{X}, h^\tau)$ образует топологическую динамическую систему (динамическую систему сдвигов).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что $h^\tau \varphi$ принадлежит $\mathfrak{X}$ для любых $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathfrak{X}$. Кроме того, $h^\tau \varphi|_{\tau=0} = \varphi$ и $h^{\tau+s} = h^\tau h^s$. Далее, пусть $(\tau_k, \varphi^k) \rightarrow (\tau, \varphi)$, $k \rightarrow \infty$, тогда сходимость $h^{\tau_k} \varphi^k$ к $h^\tau \varphi$ следует из неравенства

$$|\varphi^k(t + \tau_k) - \varphi(t + \tau)| \leq |\varphi^k(t + \tau_k) - \varphi(t + \tau_k)| + |\varphi(t + \tau_k) - \varphi(t + \tau)|.$$

Лемма 3 (см. [9, теорема 1]). *Для любой ограниченной и равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$ функции $\varphi \in \mathfrak{X}$ замыкание $\overline{\text{orb}}(\varphi)$ траектории $\text{orb}(\varphi) \doteq \{h^t \varphi : t \in \mathbb{R}\}$ компактно в метрике (2.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задано произвольное семейство функций $\{\psi\} \subset \overline{\text{ob}}(\varphi)$. Покажем, что из этого семейства можно выделить сходящуюся в метрике Бебутова последовательность. В силу теоремы Арцела о компактности семейства $\{\psi(t) : |t| \leq \vartheta\}$ на любом отрезке $[-\vartheta, \vartheta]$ достаточно доказать, что семейство $\{\psi\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на числовой прямой $\mathbb{R}$. Действительно, для всякой функции ψ из этого семейства $\{\psi\}$ найдется последовательность $\{t_k(\psi)\}$ моментов времени $t_k = t_k(\psi)$, такая, что последовательность $\{h^{t_k} \varphi\}$ сходится к ψ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Поэтому равномерная ограниченность семейства $\{\psi\}$ следует из неравенств $|\psi(t)| \leq |\psi(t) - \varphi_{t_k}(t)| + |\varphi_{t_k}(t)|$ и $\sup_t |\psi(t)| \leq \sup_t |\varphi(t)|$, а равностепенная непрерывность семейства $\{\psi\}$ функций — из свойств метрики Бебутова и неравенства

$$|\psi(t + \tau) - \psi(t)| \leq |\psi(t + \tau) - \varphi_{t_k}(t + \tau)| + |\psi(t) - \varphi_{t_k}(t)| + |\varphi_{t_k}(t + \tau) - \varphi_{t_k}(t)|, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

В силу сказанного каждой системе

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (2.2)$$

с непрерывной функцией $t \rightarrow \varphi(t) = (A(t)B(t))$ мы можем теперь поставить в соответствие семейство линейных систем

$$\dot{x} = A_\tau(t)x + B_\tau(t)u, \quad (2.3)$$

где параметр τ пробегает числовую ось $\mathbb{R}$ и замыкание

$$\dot{x} = \hat{A}(t)x + \hat{B}(t)u \quad (2.4)$$

множества систем (2.3) в метрике (2.1).

Множество управляемых систем вида (2.3), где параметр τ пробегает числовую ось $\mathbb{R}$, будем называть *траекторией* системы (2.2), а множество систем вида (2.4) — *замыканием* траектории системы (2.2).

Замечание 2. Покажем, что с помощью простых переобозначений пространство линейных управляемых систем можно записать в компактном виде. Пространство систем вида (2.2) с метрикой Бебутова (2.1) обозначим Σ . В силу леммы 1 оно является полным, сепарабельным и каждая точка σ пространства Σ представляет систему вида (2.2), которую мы будем отождествлять с парой $\sigma = (A(\cdot), B(\cdot))$. Далее, введем в рассмотрение две функции $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n, n)$ и $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n, m)$, определенные равенствами

$$F(\sigma) = A(0), \quad G(\sigma) = B(0), \quad \text{где } \sigma = (A(\cdot), B(\cdot)) \in \Sigma.$$

Эти функции непрерывны. Действительно, если $\sigma_i = (A^i(\cdot), B^i(\cdot))$, $i = 1, 2$, и $\rho(\sigma_1, \sigma_2) < \varepsilon$, то в силу определения метрики ρ выполнено неравенство $|A^1(0) - A^2(0)| + |B^1(0) - B^2(0)| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$|F(\sigma_1) - F(\sigma_2)| = |A^1(0) - A^2(0)| < \varepsilon, \quad |G(\sigma_1) - G(\sigma_2)| = |B^1(0) - B^2(0)| < \varepsilon.$$

Введём теперь в рассмотрение динамическую систему сдвигов (Σ, f^t) , где поток $f^t \sigma = \sigma_t$ на пространстве Σ определяется равенством $\sigma_t = (A(t + \cdot), B(t + \cdot))$. В силу введенных в рассмотрение функций F и G пространство систем (2.2) записывается теперь в виде множества систем $\dot{x} = F(f^t \sigma)x + G(f^t \sigma)u$, снабженных параметром σ . Это множество можно записать в привычных обозначениях $\dot{x} = A(f^t \sigma)x + B(f^t \sigma)u$.

§ 3. Основные определения

Пусть (Σ, f^t) — произвольная топологическая динамическая система с полным сепарабельным фазовым пространством Σ . Оператор Коши системы

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x,$$

отождествляемой далее с парой (A, σ) , обозначим $X(t, s, \sigma)$, а всякой управляемой системе (S, σ) , где S определяется равенством

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x + B(f^t \sigma)u, \quad (3.1)$$

и каждому $\vartheta > 0$ поставим в соответствие линейное пространство

$$\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) \doteq \int_0^\vartheta X(0, t, \sigma)B(f^t \sigma)\mathbb{R}^m dt \quad (3.2)$$

в $\mathbb{R}^n$, которое называется *пространством управляемости* системы (3.1) на отрезке времени $[0, \vartheta]$ и *множеством управляемости*

$$\mathcal{D}_\vartheta(S, \sigma, U) \doteq \int_0^\vartheta X(0, t, \sigma)B(f^t \sigma)U dt$$

системы (3.1) с геометрическими ограничениями $U \subset \mathbb{R}^n$ на допустимые управления.

Несложно доказать [10, с. 46], что имеет место равенство

$$\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = \text{Im } W_\vartheta(S, \sigma), \quad \text{где} \quad (3.3)$$

$$W_\vartheta(S, \sigma) \doteq \int_0^\vartheta X(0, t, \sigma)B(f^t \sigma)B^*(f^t \sigma)X^*(0, t, \sigma)dt,$$

а $\text{Im } W_\vartheta(S, \sigma) \doteq W_\vartheta(S, \sigma)\mathbb{R}^n$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$.

Далее, пусть $x = L(t, \sigma)y$ — невырожденное при всех t (но не обязательно ляпуновское) преобразование системы (3.1). Тогда система (C, σ) записывается в виде:

$$\dot{y} = F(t, \sigma)y + G(t, \sigma)u, \quad (3.4)$$

где $F(t, \sigma) = L^{-1}(t, \sigma)(A(f^t \sigma)L(t, \sigma) - \dot{L}(t, \sigma))$, $G(t, \sigma) = L^{-1}(t, \sigma)B(f^t \sigma)$. Поэтому

$$X(t, s, \sigma) = L(t, \sigma)Y(t, s, \sigma)L^{-1}(s, \sigma).$$

Из всех этих соотношений получаем следующие утверждения.

Лемма 4. *Имеют место следующие равенства:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) &= L(0, \sigma)\mathcal{L}_\vartheta(C, \sigma), \quad \mathcal{D}_\vartheta(S, \sigma, U) = L(0, \sigma)\mathcal{D}_\vartheta(C, \sigma, U), \\ W_\vartheta(S, \sigma) &= L(0, \sigma)W_\vartheta(C, \sigma)L^*(0, \sigma), \quad \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = \text{rank } W_\vartheta(S, \sigma). \end{aligned}$$

Отметим кроме того, что если невырожденное преобразование $x = L(t, \sigma)y$ удовлетворяет при всех $\sigma \in \Sigma$ равенству $L(0, \sigma) = E$, то оно называется *нормированным* невырожденным преобразованием. Полезно отметить, что пространство управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$, множество управляемости $\mathcal{D}_\vartheta(S, \sigma, U)$ и матрица Калмана $W_\vartheta(S, \sigma)$ инвариантны относительно невырожденных нормированных преобразований системы (S, σ) . То есть имеют место равенства

$$\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = \mathcal{L}_\vartheta(C, \sigma), \quad \mathcal{D}_\vartheta(S, \sigma, U) = \mathcal{D}_\vartheta(C, \sigma, U), \quad W_\vartheta(S, \sigma) = W_\vartheta(C, \sigma).$$

Определение 1. Пусть задано инвариантное подмножество Σ_0 пространства Σ . Семейство (S, Σ_0) систем вида (3.1) назовем *регулярным*, если найдется такое число $\vartheta_0 > 0$, что для любых $\vartheta \geq \vartheta_0$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$ размерность $\dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ пространства управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ системы (S, σ) постоянна.

Пример 1. В качестве важного примера *регулярного* семейства (S, Σ_0) систем может выступать инвариантное (относительно сдвигов по времени t) подмножество Σ_0 в пространстве Σ линейных управляемых систем (2.4), состоящее из замыкания множества сдвигов заданной почти периодической системы (2.2).

Определение 2. Пусть задано инвариантное подмножество Σ_0 пространства Σ . Регулярное семейство (S, Σ_0) систем вида (3.1) назовем *каноническим*, если:

1) для каждого целого $k \in \{1 \dots n\}$ и любой точки σ множества Σ_0 линейное пространство $L^k \doteq \text{lin}\{e^1 \dots e^k\}$ в $\mathbb{R}^n$ инвариантно относительно линейной системы

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x \quad (3.5)$$

(то есть если $x(t)$ — решение системы (3.5) и $x(0) \in L^k$, то $x(t) \in L^k$ для всех $t \in \mathbb{R}$);

2) найдутся целое $r \in \{1 \dots n\}$ и такое число $\vartheta_0 > 0$, что для каждой точки σ множества Σ_0 и всех $\vartheta \geq \vartheta_0$ имеет место равенство $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = L^r$, где $r \doteq \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$, а пространство управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ определяется равенством (3.2).

Замечание 3. Из этого определения несложно вывести следующее утверждение: *семейство (S, Σ_0) является каноническим в том и только том случае, если для каждой точки σ множества Σ_0 матрица $A(\sigma)$ верхняя треугольная, а последние $n - r$ строк матрицы $B(\sigma)$ равны нулю.*

Напомним, что вещественное преобразование Ляпунова $x = P(t, \sigma)y$ системы (3.5) называется *преобразованием Перрона*, если в дополнение к свойствам, определяющим преобразование Ляпунова, $P(t, \sigma)$ является ортогональной матрицей (то есть $P(t, \sigma)P^*(t, \sigma) = E$) при всех t . Если, кроме уже сказанного, преобразование Перрона определяется равенством $x = P(f^t \sigma)y$, то оно называется *стационарным перроновским преобразованием* системы (A, σ) . В отличие от нестационарного перроновского преобразования $x = P(t, \sigma)y$, стационарное задается независимой от времени t функцией $P : \Sigma \rightarrow \mathbb{M}(n)$.

Определение 3. Пусть заданы инвариантное подмножество Σ_0 пространства Σ и регулярное семейство (S, Σ_0) . Подмножество (C, Σ_0) , где $C(\sigma) = (F(\sigma), G(\sigma)) \in \mathbb{M}(n, n + m)$, $\sigma \in \Sigma_0$, семейства (S, Σ_0) будем называть *каноническим представителем*, если найдется стационарное перроновское преобразованием $x = P(f^t \sigma)y$, приводящее при каждом $\sigma \in \Sigma_0$ систему (S, σ) к канонической системе (C, σ) . В этом случае

$$F(\sigma) = -P^{-1}(\sigma)\dot{P}(\sigma) + P^{-1}(\sigma)A(\sigma)P(\sigma), \quad G(\sigma) = P^{-1}(\sigma)B(\sigma).$$

Для формулировки основных утверждений статьи напомним определение расширения динамической системы. Пусть фиксированы две топологические динамические системы (Ω, g^t) и (Σ, f^t) . Тогда [6, с. 164] система (Ω, g^t) называется *расширением* системы (Σ, f^t) , а система (Σ, f^t) — *фактором* системы (Ω, g^t) , если существует непрерывное отображение p пространства Ω на Σ , сопрягающее потоки (то есть $p(\Omega) = \Sigma$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{p} & \Sigma \\ \downarrow g^t & & \downarrow f^t \\ \Phi & \xrightarrow{p} & \Sigma \end{array}$$

коммутативна: $pg^t = f^t p$). Такое отображение (сюръективный гомоморфизм [6, с. 164]) называется *проекцией*.

Простым примером расширения системы (Σ, f^t) служит следующая (используемая далее) конструкция. Пусть $(\mathfrak{X}, h^t)$ — еще одна топологическая динамическая система. Построим следующую топологическую динамическую систему: $\Omega = \Sigma \times \mathfrak{X}$, $\{g^t\}$ — поток на Ω , определенный

равенством $g^t = (f^t, h^t)$, $p(\omega) = \sigma$ — проекция точки $\omega = (\sigma, x) \in \Omega$ на фазовое пространство Σ . Тогда система (Ω, g^t) является расширением системы (Σ, f^t) .

Пусть заданы топологическая динамическая система (Σ, f^t) и её расширение (Ω, g^t) , где $\Omega = \Sigma \times \mathfrak{X}$, $g^t = (f^t, h^t)$, $(\mathfrak{X}, h^t)$ — топологическая динамическая система. Пусть, кроме того, задано семейство систем (S, Σ_0) , где Σ_0 — инвариантное подмножество пространства Σ . Предполагается, что $S \subseteq \mathfrak{S}$. Таким образом, для каждой точки σ пространства Σ_0 и для любой точки $\omega = (\sigma, x)$ множества $p^{-1}(\sigma)$ определена непрерывная на инвариантном (как легко заметить) подмножестве $\Omega_0 \doteq p^{-1}(\Sigma_0)$ пространства Ω функция

$$\omega \rightarrow \mathcal{S}(\omega) \doteq S(p(\omega)) = S(\sigma). \quad (3.6)$$

Построенная таким образом функция $\mathcal{S}(\omega) \doteq (A(\omega), B(\omega)) : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{M}(n, n + m)$ порождает семейство $(\mathcal{S}, \Omega_0)$ систем $(\mathcal{S}, \omega)$ вида

$$\dot{x} = A(g^t \omega)x + B(g^t \omega)u, \quad (t, \omega, x, u) \in \mathbb{R} \times \Omega_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (3.7)$$

Это новое семейство $(\mathcal{S}, \Omega_0)$ (назовем его *псевдорасширением* семейства (S, Σ_0)) фактически является другой записью семейства (S, Σ_0) (действительно, в силу равенства (3.6), для каждой точки σ множества Σ_0 все системы $(\mathcal{S}, \omega)$ на слое

$$\gamma(\sigma) \doteq \{\omega \in \Omega_0 : p(\omega) = \sigma\} \quad (3.8)$$

совпадают с системой (S, σ)). Поэтому для каждой системы $\sigma \in \Sigma_0$ и всех точек $\omega \in \gamma(\sigma)$ матрица Коши $\mathcal{X}(t, s, \omega)$ системы $(\mathcal{A}, \omega)$ совпадает с матрицей Коши $X(t, s, \sigma)$ системы (A, σ) . Следовательно, для каждой системы $\sigma \in \Sigma_0$ и всех точек ω на слое (3.8) имеет место равенство $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \omega) = \mathcal{L}(S, \sigma)$.

§ 4. Основные утверждения статьи

Определение 4. Пусть (Σ, f^t) — топологическая динамическая система с компактным фазовым пространством Σ и (S, Σ) — регулярное семейство систем

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x + B(f^t \sigma)u \quad (4.1)$$

с непрерывными матрицами $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$. Каждой системе (S, σ) семейства (S, Σ) поставим в соответствие функцию, заданную равенством

$$t \rightarrow \Theta(t, \sigma) \doteq (S(f^t \sigma), P(t, \sigma), C(t, \sigma)) \in \mathbb{M}(n, 3n + 2m), \quad (4.2)$$

где $S(\sigma) \doteq (A(\sigma), B(\sigma))$, $C(t, \sigma) \doteq (F(t, \sigma), G(t, \sigma))$ — управляемая система

$$\dot{y} = F(t, \sigma)y + G(t, \sigma)u, \quad (4.3)$$

а матрицы $P(t, \sigma)$, $F(t, \sigma)$ и $G(t, \sigma)$ удовлетворяют следующим условиям:

- а) функция $(t, \sigma) \rightarrow P(t, \sigma)$ непрерывна на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$ и при каждом σ является перроновским преобразованием, приводящем систему (4.1) к системе (4.3);
- б) $F(t, \sigma)$ — верхняя треугольная матрица, непрерывная по переменным t, σ и ограниченная на оси $\mathbb{R}$ для каждой точки $\sigma \in \Sigma$;
- с) последние $n - r$ строк матрицы $G(t, \sigma) \doteq P^{-1}(t, \sigma)B(f^t \sigma)$, где $r \doteq \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$, тождественно равны нулю при всех $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$.

Построенную так функцию $t \rightarrow \Theta(t, \sigma)$ будем называть *правильной*.

Ниже будет показано, что правильные функции существуют (см. лемму 8).

Замечание 4. Отметим, что систему (C, σ) мы не можем назвать канонической потому, что функция $t \rightarrow C(t, \sigma)$ не обязана быть стационарной относительно потока f^t (напомним, что функция $t \rightarrow C(t, \sigma)$ называется стационарной относительно потока f^t в том и только том случае, если $C(t, \sigma) = C(0, f^t \sigma)$ для всех t). Простой пример, подтверждающий сказанное, это система (S, σ) с матрицей $S(\sigma) = (A, B)$, не зависящей от σ (если A не является верхней треугольной матрицей, то не найдется стационарного (в данном случае не зависящего от t) перроновского преобразования $x = Py$, приводящего S к канонической системе C с постоянной матрицей C).

Напомним ещё раз, что сдвиг функции $t \rightarrow \Theta(t)$ на константу τ мы обозначаем так: Θ_τ (таким образом, $\Theta_\tau(t) = \Theta(\tau + t)$ при всех t) и отметим, что если функция $t \rightarrow \Theta(t, \sigma)$ правильная, то любой сдвиг такой функции — тоже правильная функция.

Определение 5. Для каждой точки $\sigma \in \Sigma$ введем в рассмотрение пространство непрерывных функций $\mathfrak{X}(\sigma)$ (см. (4.2)), полученное из правильной функции $t \rightarrow \Theta(t, \sigma)$ замыканием (в топологии равномерной сходимости на отрезках) множества её сдвигов $\Theta_\tau(t, \sigma)$. Такое пространство можно рассматривать как замыкание траектории движения точки Θ , определенной равенством (4.2): $\mathfrak{X}(\sigma) = \overline{\text{orb}}(\Theta(\cdot, \sigma))$.

Далее, для каждой точки $\sigma \in \Sigma$ введем в рассмотрение динамическую систему (Ω, g^t) , по которой построим расширение динамической системы (Σ, f^t) . Такая динамическая система определяется равенствами (см. равенство (4.2) и определение 5)

$$\Omega \doteq \{\omega = (\sigma, \Theta(\cdot, \sigma)) : \sigma \in \Sigma, \Theta(\cdot, \sigma) \in \mathfrak{X}(\sigma)\}, \quad g^t = (f^t, h^t). \quad (4.4)$$

Здесь Ω — фазовое пространство системы, снабженное метрикой $\rho_\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) + \rho_{\mathfrak{X}}(\Theta_1, \Theta_2)$, где $\rho_{\mathfrak{X}}$ — метрика Бebutова, заданная равенством (2.1), $h^\tau \Theta(\cdot, \sigma) = \Theta(\cdot + \tau, \sigma)$.

Построим теперь функцию $\omega \rightarrow p(\omega)$, определенную равенством $p(\omega) = \sigma$. Тогда $p(\Omega) = \Sigma$ и, как легко понять, p сопрягает потоки f^t и h^t : $pg^t = f^t p$. Поэтому p — проекция расширения системы (Ω, g^t) на фактор (Σ, f^t) .

Определим далее функцию $\Xi: \Omega \rightarrow \mathbb{M}(n, 3n + 2m)$ равенством

$$\Xi(\omega) = \Theta(0, p(\omega)) = (\mathcal{S}(\omega), \mathcal{P}(\omega), \mathcal{C}(\omega)),$$

где

$$p(\omega) = \sigma, \quad \mathcal{S}(\omega) = S(\sigma), \quad \mathcal{P}(\omega) = P(0, \sigma), \quad \mathcal{C}(\omega) = C(0, \sigma).$$

Тогда из равенства $pg^t = f^t p$ следует равенство $\Xi(g^t \omega) = \Theta(t, \sigma)$ (для всех $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ и $\sigma = p(\omega)$). Поэтому семейство $(\mathcal{S}, \Omega)$ является псевдорасширением семейства (S, Σ) (см. равенства (3.6) и (3.7)), а функция $t \rightarrow \mathcal{P}(g^t \omega)$ — стационарным перроновским преобразованием, приводящим (для каждого $\omega \in \Omega$) систему $(\mathcal{S}, \omega)$ к канонической системе $(\mathcal{C}, \omega)$. Следовательно, семейство $(\mathcal{C}, \Omega)$ служит каноническим представителем семейства $(\mathcal{S}, \Omega)$.

Теорема 1. Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с компактным фазовым пространством Σ и любого регулярного семейства (S, Σ) систем

$$\dot{x} = A(f^t \sigma)x + B(f^t \sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \quad (4.5)$$

с непрерывными матрицами $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ существует расширение (Ω, g^t) системы (Σ, f^t) , построенное равенствами (4.4). Это расширение имеет компактное фазовое пространство Ω , в силу построения системы (Ω, g^t) , псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства систем (S, Σ) обладает каноническим представителем $(\mathcal{C}, \Omega)$.

В силу теоремы 1 псевдорасширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ) , удовлетворяющего условиям теоремы 1, приводимо стационарным перроновским преобразованием $x = \mathcal{P}(g^t \omega)y$ к каноническому семейству $(\mathcal{C}, \Omega)$.

Теорема 2. Для всякой топологической динамической системы (Σ, f^t) с минимальным фазовым пространством Σ и любого регулярного семейства (S, Σ) систем (4.5) с непрерывными матрицами $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$, существует расширение (Ω, g^t) системы (Σ, f^t) , построенное равенствами (4.4). Оно имеет минимальное (относительно потока g^t) фазовое пространство Ω и в силу построения системы (Ω, g^t) , отвечающее системе (Ω, g^t) , псевдорасширение (S, Ω) семейства (S, Σ) обладает каноническим представителем $(\mathcal{C}, \Omega)$.

Из теоремы 2 следует, в частности, что если размерность пространства управляемости системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

равна r и функции матрицы $t \rightarrow A(t)$ и $t \rightarrow B(t)$ совместно рекуррентны, то система (4.6) приводима рекуррентным перроновским преобразованием $x = P(t)y$ к системе

$$\dot{y} = F(t)y + G(t)u$$

с совместно рекуррентными функциями $t \rightarrow F(t)$ и $t \rightarrow G(t)$, причем $F(t)$ — верхняя треугольная, а последние $n - r$ строк матрицы $G(t)$ равны нулю. Более того, функция

$$t \rightarrow (A(t), B(t), P(t), F(t), G(t))$$

тоже рекуррентна.

§ 5. Доказательства

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся сформулированные ниже леммы.

Лемма 5. Пусть $X(t, s, \sigma)$ — матрица Коши системы (A, σ) с непрерывной функцией $\sigma \rightarrow A(\sigma)$. Тогда функция $\sigma \rightarrow X(t, s, \sigma)$ непрерывна в каждой точке $\sigma_0 \in \Sigma$ равномерно относительно (t, s) на любом компакте в $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Из равенства

$$X(t, s, \sigma) = I + \int_s^t A(f^\tau \sigma) X(\tau, s, \sigma) d\tau, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

и леммы Гронуолла и Беллмана следует неравенство

$$|X(t, s, \sigma)| \leq \exp(a|t - s|), \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2,$$

где $a \doteq \sup_\sigma |A(\sigma)|$, $\sigma \in \Sigma$. Пусть $\sigma_0 \in \Sigma$, K — произвольный компакт в $\mathbb{R}^2$. Найдутся вещественные числа α и $\beta > 0$, что $K \subset G$, где $G = [\alpha, \alpha + \beta]^2$. Положим $v(t, s, \sigma) = |X(t, s, \sigma) - X(t, s, \sigma_0)|$. Из цепочки равенств

$$\begin{aligned} X(t, s, \sigma) - X(t, s, \sigma_0) &= \int_s^t [A(f^\tau \sigma) X(\tau, s, \sigma) - A(f^\tau \sigma_0) X(\tau, s, \sigma_0)] d\tau = \\ &= \int_s^t [A(f^\tau \sigma) X(\tau, s, \sigma) - A(f^\tau \sigma_0) X(\tau, s, \sigma)] d\tau + \int_s^t [A(f^\tau \sigma_0) X(\tau, s, \sigma) - A(f^\tau \sigma_0) X(\tau, s, \sigma_0)] d\tau \end{aligned}$$

следует (при $\alpha \leq s \leq t \leq \alpha + \beta$) неравенство

$$v(t, s, \sigma) \leq c(\sigma) + a \int_s^t v(\tau, s, \sigma) d\tau, \quad (5.1)$$

$$\text{где } c(\sigma) = \exp(a\beta) \int_\alpha^{\alpha+\beta} |A(f^\tau \sigma) - A(f^\tau \sigma_0)| d\tau.$$

Поэтому, в силу леммы Гронуолла и Беллмана, из (5.1) следует неравенство

$$v(t, s, \sigma) \leq c(\sigma) \exp(a\beta).$$

Так как $c(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$, то $v(t, s, \sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \sigma_0$ равномерно относительно t, s , удовлетворяющих неравенствам $\alpha \leq s \leq t \leq \alpha + \beta$. Аналогично доказывается неравенство (5.1) и при $\alpha \leq t \leq s \leq \alpha + \beta$. $\square$

Лемма 6 (см. [11, с. 141]). Пусть Σ — полное метрическое пространство и при всех

$$(t, s, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Sigma$$

задана симметрическая матрица $Q(t, s, \sigma) \in \mathbb{M}(n)$. Если она определенно положительна, а функция $(t, s, \sigma) \rightarrow Q(t, s, \sigma)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по t и s при каждом σ , то существует единственная верхняя треугольная матрица $Z(t, s, \sigma)$ с положительными при всех t, s, σ диагональными элементами $z_1(t, s, \sigma) \dots z_n(t, s, \sigma)$, являющаяся решением матричного уравнения

$$Z^* Z = Q(t, s, \sigma). \quad (5.2)$$

Это решение непрерывно по (t, s, σ) и непрерывно дифференцируемо по t и s при каждом σ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если найдется верхняя треугольная матрица $Z(t, s, \sigma)$, удовлетворяющая уравнению (5.2), то

$$|\det Z(t, s, \sigma)| = |z_1(t, s, \sigma)| \cdots |z_n(t, s, \sigma)| = \sqrt{\det Q(t, s, \sigma)} > 0. \quad (5.3)$$

Поэтому $z_i(t, s, \sigma) \neq 0$ для всех t, s, σ .

При $n = 1$ лемма очевидна ($z_1(t, s, \sigma) = \sqrt{Q(t, s, \sigma)}$). Допустим, что лемма доказана для каждого $k = 2 \dots n - 1$. Запишем матрицы Z и $Q(t, s, \sigma)$ в блочном виде

$$Z = \begin{array}{c|c} Z_{n-1} & z \\ \hline 0 & z_n \end{array}, \quad Q(t, s, \sigma) = \begin{array}{c|c} Q_{n-1} & q \\ \hline q^* & q_n \end{array},$$

где Z_{n-1} — диагональный блок матрицы Z порядка $n - 1$, z — вектор-столбец, занимающий вместе с z_n последний столбец матрицы Z , аналогично $Q_{n-1} = Q_{n-1}(t, s, \sigma)$, $q = q(t, s, \sigma)$ и $q_n = q_n(t, s, \sigma)$ для матрицы $Q(t, s, \sigma)$, причем матрица $Q_{n-1}(t, s, \sigma)$ определенно положительна. Тогда матричное уравнение (5.2) переписывается в виде системы уравнений

$$\begin{cases} Z_{n-1}^* Z_{n-1} = Q_{n-1}(t, s, \sigma), \\ Z_{n-1}^* z = q(t, s, \sigma), \\ |z|^2 + (z_n)^2 = q_n(t, s, \sigma). \end{cases} \quad (5.4)$$

В силу предположения индукции первое уравнение системы (5.4) имеет решение $Z_{n-1}(t, s, \sigma)$ с требуемыми свойствами. Поэтому из второго уравнения получаем равенство

$$z(t, s, \sigma) = Z_{n-1}^{*-1}(t, s, \sigma) q(t, s, \sigma)$$

и, с учетом (5.3), находим

$$z_n(t, s, \sigma) = \frac{\sqrt{\det Q(t, s, \sigma)}}{z_1(t, s, \sigma) \cdots z_{n-1}(t, s, \sigma)} > 0.$$

Непрерывность по (t, s, σ) и непрерывная дифференцируемость по переменным t и s функций $z(t, s, \sigma)$ и $z_n(t, s, \sigma)$ следует из равенств (5.4). $\square$

Лемма 7. Пусть Z и $\hat{Z}$ — верхние треугольные матрицы размерности n с положительными диагональными элементами и имеет место равенство $Z^*Z = \hat{Z}^*\hat{Z}$, тогда $Z = \hat{Z}$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что лемма доказана для каждого $k = 2 \dots n - 1$. Запишем матрицы Z и $\hat{Z}$ в блочном виде

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{n-1} & p \\ 0 & z_n \end{pmatrix}, \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} \hat{Z}_{n-1} & q \\ 0 & \hat{z}_n \end{pmatrix},$$

где Z_{n-1} — диагональный блок матрицы Z порядка $n - 1$, p — вектор-столбец, занимающий вместе с z_n последний столбец матрицы Z , аналогично $\hat{Z}_{n-1}$, q и $\hat{z}_n$ для матрицы $\hat{Z}$. Тогда уравнение $Z^*Z = \hat{Z}^*\hat{Z}$ перепишется в виде системы

$$\begin{cases} Z_{n-1}^*Z_{n-1} = \hat{Z}_{n-1}^*\hat{Z}_{n-1}, \\ Z_{n-1}^*p = \hat{Z}_{n-1}^*q, \\ |p|^2 + (z_n)^2 = |q|^2 + (\hat{z}_n)^2. \end{cases} \quad (5.5)$$

Равенство $Z_{n-1} = \hat{Z}_{n-1}$ уже доказано, поэтому, в силу невырожденности матрицы Z_{n-1} и второго уравнения системы (5.5), получаем равенство $p = q$. Обращаясь теперь к последнему уравнению системы (5.5) и учитывая положительность диагональных элементов матриц Z и $\hat{Z}$, получаем равенство $z_n = \hat{z}_n$. $\square$

Лемма 8. Пусть $\Phi(t, \sigma)$ — произвольная фундаментальная матрица системы (A, σ) с непрерывной и ограниченной на Σ функцией $\sigma \rightarrow A(\sigma)$, $Z(t, \sigma)$ — решение уравнения (5.2) с матрицей $Q(t, \sigma) \doteq \Phi^*(t, \sigma)\Phi(t, \sigma)$. Тогда:

1) найдется непрерывная по совокупности переменных t, σ верхняя треугольная матрица $F(t, \sigma)$ такая, что матрица

$$Y(t, s, \sigma) \doteq Z(t, \sigma)Z^{-1}(s, \sigma) \quad (5.6)$$

является матрицей Коши системы

$$\dot{y} = F(t, \sigma)y; \quad (5.7)$$

2) функция $(t, \sigma) \rightarrow F(t, \sigma)$ ограничена на $\mathbb{R} \times \Sigma$, а при каждом $\sigma \in \Sigma$ функция $t \rightarrow F(t, \sigma)$ равномерно непрерывна в топологии равномерной сходимости на отрезках (это означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(t, \tau, \sigma) \in [-\vartheta, \vartheta] \times [-\delta, \delta] \times \Sigma$ выполнено неравенство $|F(t + \tau, \sigma) - F(t, \sigma)| \leq \varepsilon$);

3) для любой фиксированной точки $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ матрица

$$P(t, \sigma) \doteq \Phi(t, \sigma)Z^{-1}(t, \sigma) \quad (5.8)$$

ортогональна, имеет место неравенство $\sup_{t, \sigma} |\dot{P}(t, \sigma)| < \infty$ и при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ преобразование $x = P(t, \sigma)y$ приводит систему (A, σ) к системе (F, σ) . Следовательно, преобразование $x = P(t, \sigma)y$ является (не обязательно стационарным) перроновским преобразованием системы (A, σ) .

Доказательство. Пусть $F(t, \sigma) \doteq \dot{Z}(t, \sigma)Z^{-1}(t, \sigma)$. Покажем, что F обладает перечисленными свойствами. Так как произведение верхних треугольных матриц есть матрица верхняя треугольная, то $F(t, \sigma)$ — верхняя треугольная матрица. Далее, функция $t \rightarrow Z(t, \sigma)$ является решением матричного уравнения $\dot{Z} = F(t, \sigma)Z$. Следовательно, умножив тождество $\dot{Z}(t, \sigma) = F(t, \sigma)Z(t, \sigma)$ справа на $Z^{-1}(s, \sigma)$, получим тождество $\dot{Y}(t, s, \sigma) = F(t, \sigma)Y(t, s, \sigma)$. Так

как выполнено равенство $Y(t, s, \sigma)|_{t=s} = I$, то $Y(t, s, \sigma)$ — матрица Коши системы (5.7). Тем самым свойство 1 доказано.

Покажем, что матрица $P(t, \sigma)$, определенная равенством (5.8), является ортогональной матрицей. Действительно,

$$P^*(t, \sigma)P(t, \sigma) = Z^{*-1}(t, \sigma)\Phi^*(t, \sigma)\Phi(t, \sigma)Z^{-1}(t, \sigma) = Z^{*-1}(t, \sigma)Z^*(t, \sigma)Z(t, \sigma)Z^{-1}(t, \sigma) = I.$$

Следовательно, $|P(t, \sigma)| = |P^{-1}(t, \sigma)| = 1$ для всех (t, σ) . Далее, дифференцируя тождество

$$Z^*(t, \sigma)Z(t, \sigma) = \Phi^*(t, \sigma)\Phi(t, \sigma)$$

по переменной t и умножая его справа на $Z^{-1}(t, \sigma)$, а слева на $Z^{*-1}(t, \sigma)$, приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} F^* + F &= Z^{*-1}\dot{Z}^* + \dot{Z}Z^{-1} = Z^{*-1}(\dot{Z}^*Z + Z^*\dot{Z})Z^{-1} = Z^{*-1}(\dot{\Phi}^*\Phi + \Phi^*\dot{\Phi})Z^{-1} = \\ &= Z^{*-1}\dot{\Phi}^*\Phi Z^{-1} + Z^{*-1}\Phi^*\dot{\Phi}Z^{-1} = Z^{*-1}\dot{\Phi}^*P + P^*\dot{\Phi}Z^{-1} = P^*A\Phi Z^{-1} + Z^{*-1}\Phi^*A^*P, \end{aligned}$$

из которых следует равенство

$$F^*(t, \sigma) + F(t, \sigma) = P^*(t, \sigma)(A^*(f^t\sigma) + A(f^t\sigma))P(t, \sigma). \quad (5.9)$$

Поэтому из ограниченности функции $\sigma \rightarrow |A(\sigma)|$ на пространстве Σ , ортогональности $P(t, \sigma)$ и равенства (5.9) следует ограниченность функции $(t, \sigma) \rightarrow |F(t, \sigma)|$ на пространстве $\mathbb{R} \times \Sigma$.

Покажем теперь, что функция $t \rightarrow P(t, \sigma)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Действительно,

$$\dot{P}(t, \sigma) = A(f^t\sigma)P(t, \sigma) - P(t, \sigma)F(t, \sigma),$$

поэтому, в силу ограниченности A, F, P , найдется $\ell < \infty$, что $|\dot{P}(t, \sigma)| \leq \ell$ для всех (t, σ) . Из ограниченности $|\dot{P}(t, \sigma)|$ следует неравенство $|P(t + \tau, \sigma) - P(t, \sigma)| \leq \ell|\tau|$, обеспечивающее равномерную непрерывность $P(t, \sigma)$ по переменной t .

Обозначим $H = F^* + F$, $D = A^* + A$. Тогда, в силу (5.9), выполнено равенство

$$\begin{aligned} H(t + \tau, \sigma) - H(t, \sigma) &= P^*(t + \tau, \sigma)D(f^{t+\tau}\sigma)[P(t + \tau, \sigma) - P(t, \sigma)] + \\ &+ P^*(t + \tau, \sigma)[D(f^{t+\tau}\sigma) - D(f^t\sigma)]P(t, \sigma) + [P^*(t + \tau, \sigma) - P^*(t, \sigma)]D(f^t\sigma)P(t, \sigma). \end{aligned}$$

Поэтому найдется такая константа $\beta < \infty$, что выполнено неравенство

$$|H(t + \tau, \sigma) - H(t, \sigma)| \leq \beta|P(t + \tau, \sigma) - P(t, \sigma)| + |D(f^{t+\tau}\sigma) - D(f^t\sigma)|.$$

Это доказывает (с учетом равномерной непрерывности потока $t \rightarrow f^t\sigma$ на отрезках и непрерывности $D(\sigma)$ на пространстве Σ) равномерную непрерывность функции $t \rightarrow H(t, \sigma)$, а следовательно, и функции $t \rightarrow F(t, \sigma)$.

Осталось доказать, что преобразование $x = P(t, \sigma)y$ приводит систему (A, σ) к системе (F, σ) . Пусть $X(t, s, \sigma)$ — матрица Коши системы (A, σ) . Тогда из (5.6) и (5.8) имеем

$$X(t, s, \sigma) = \Phi(t, \sigma)\Phi^{-1}(s, \sigma) = P(t, \sigma)Z(t, \sigma)Z^{-1}(s, \sigma)P^*(s, \sigma) = P(t, \sigma)Y(t, s, \sigma)P^*(s, \sigma).$$

Поэтому если $x(t, x_0, \sigma) = X(t, 0, \sigma)x_0$ — решение системы (A, σ) дифференциальных уравнений и $y_0 = P^*(0, \sigma)x_0$, то $x(t, x_0, \sigma) = P(t, \sigma)y(t, y_0, \sigma)$, где $y(t, y_0, \sigma) = Y(t, 0, \sigma)y_0$ — решение системы (F, σ) . $\square$

Лемма 9 (см. [12, § 20]). Пусть система (S, σ) регулярна. Если имеет место неравенство $r < n$ (при достаточно больших ϑ и всех $\sigma \in \Sigma$), где $r \doteq \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$, то найдется $n - r$ линейно независимых на отрезке $[0, \vartheta]$ решений $\psi_{r+1}(t, \sigma) \dots \psi_n(t, \sigma)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi A(f^t\sigma) \quad (5.10)$$

таких, что

$$\psi_{r+1}(t, \sigma)B(f^t\sigma) \equiv 0, \dots, \psi_n(t, \sigma)B(f^t\sigma) \equiv 0. \quad (5.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу отмеченного ранее равенства (3.3) найдется $n - r$ линейно независимых векторов $\xi_{r+1} \dots \xi_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ таких, что $\xi_k W_\vartheta(S, \sigma) = 0$, $k = r + 1 \dots n$. Так как $\psi_k(t, \sigma) \doteq \xi_k X(0, t, \sigma)$ — решение сопряженной системы, то

$$\xi_k W_\vartheta(S, \sigma) \xi_k^* = \int_0^\vartheta |\psi_k(t, \sigma) B(f^t \sigma)|^2 dt = 0$$

и равенства (5.11) доказаны. $\square$

Лемма 10. Пусть нормированное (то есть $P(0, \sigma) = E$ при каждом $\sigma \in \Sigma$) перроновское преобразование $x = P(t, \sigma)y$ приводит систему (S, σ) к системе (C, σ) . Тогда имеет место равенство $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) = \mathcal{L}_\vartheta(C, \sigma)$.

Эта лемма содержится в лемме 4.

Лемма 11. Пусть система (S, σ) регулярна и выполнено неравенство $r \doteq \dim \mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma) < n$. Тогда для каждой точки $\sigma \in \Sigma$ найдется такая фундаментальная матрица $\Phi(t, \sigma)$ системы (A, σ) , что последние $n - r$ строк матрицы $G(t, \sigma) \doteq P^*(t, \sigma)B(f^t \sigma)$, построенной с помощью перроновского преобразования $t \rightarrow P(t, \sigma)$, определенного равенством (5.8), тождественно равны нулю при всех t .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равенства (5.8) и ортогональности матрицы P имеют место равенства $P^*(t, \sigma) = P^{-1}(t, \sigma) = Z(t, \sigma)\Phi^{-1}(t, \sigma)$. С другой стороны, если $\Psi(t, \sigma)$ — фундаментальная матрица сопряженной системы (5.10) и $\Psi(0, \sigma)\Phi(0, \sigma) = I$, то $\Psi(t, \sigma)\Phi(t, \sigma) \equiv I$. Следовательно, $\Psi(t, \sigma) = \Phi^{-1}(t, \sigma)$ и $P^*(t, \sigma) = Z(t, \sigma)\Psi(t, \sigma)$.

Пусть последние $n - r$ строк $\psi_{r+1}(t, \sigma) \dots \psi_n(t, \sigma)$ фундаментальной матрицы $\Psi(t, \sigma)$ системы (5.10) таковы, что (лемма 9) выполнены равенства (5.11), тогда последние $n - r$ строк матрицы $\Psi(t, \sigma)B(f^t \sigma)$ тождественно равны нулю на $[0, \sigma]$. Далее, поскольку матрица $Z(t, \sigma)$ — верхняя треугольная (лемма 6), то последние $n - r$ строк матрицы $G(t, \sigma) = Z(t, \sigma)\Psi(t, \sigma)B(f^t \sigma)$ тоже тождественно равны нулю. $\square$

Прежде, чем сформулировать следующую лемму, отметим, что включение $\hat{\Theta} \in \mathfrak{X}(\Theta, \sigma)$, где $\Theta(t, \sigma) = (S(f^t \sigma), P(t, \sigma), C(t, \sigma))$, выполнено в том и только том случае, если найдется такая последовательность $\{\tau_k\}$, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ существует индекс $k = k(\varepsilon, \vartheta)$, начиная с которого выполнено неравенство

$$\max_{|t| \leq \vartheta} |\hat{\Theta}(t, \sigma) - \Theta_{\tau_k}(t, \sigma)| \leq \varepsilon.$$

Лемма 12. Пусть пространство Σ компактно. Тогда для каждой точки σ пространство $\mathfrak{X}(\Theta, \sigma)$ компактно (в топологии равномерной сходимости на отрезках) и состоит только из правильных функций. Кроме того, при всех t, τ и $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство

$$Q(t + \tau, \sigma) = Q(t, f^\tau \sigma). \quad (5.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (5.12) просто следует из равенства

$$X(t + \tau, s + \tau, \sigma) = X(t, s, f^\tau \sigma)$$

(см. [13, теорема 8]) и равенства (5.8).

Докажем компактность пространства $\mathfrak{X}(\sigma)$. Покажем, что семейство функций, наполняющих $\mathfrak{X}(\sigma)$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно (на числовой прямой $\mathbb{R}$). Тогда, в силу теоремы 1 работы Бебутова [9], компактность множества $\mathfrak{X}(\sigma)$ будет доказана.

Для всякой функции $t \rightarrow \hat{\Theta}(t, \sigma)$ из этого семейства найдется последовательность $\{\Theta_{\tau_k}(t, \sigma)\}$, сходящаяся к $\hat{\Theta}(t, \sigma)$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Поэтому из неравенства

$$|\hat{\Theta}(t, \sigma)| \leq |\hat{\Theta}(t, \sigma) - \Theta_{\tau_k}(t, \sigma)| + |\Theta_{\tau_k}(t, \sigma)|, \quad t \in \mathbb{R}$$

имеем: для любого целого $k \geq 1$ и всех $t \in [-k, k]$ найдется τ_k (при необходимости перейдем к подпоследовательности $\{\tau_{j_k}\}$) такая, что $|\hat{\Theta}(t, \sigma) - \Theta_{\tau_k}(t, \sigma)| \leq k^{-1}$. Поэтому из неравенств

$$|\hat{\Theta}(t, \sigma)| \leq \max_{|t| \leq k} |\hat{\Theta}(t, \sigma) - \Theta_{\tau_k}(t, \sigma)| + \max_{|t| \leq k} |\Theta_{\tau_k}(t, \sigma)| \leq k^{-1} + \sup_{t \in \mathbb{R}} |\Theta_{\tau_k}(t, \sigma)| \leq k^{-1} + \sup_{t \in \mathbb{R}} |\Theta(t, \sigma)|$$

следует неравенство $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{\Theta}(t, \sigma)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\Theta(t, \sigma)|$.

Для доказательства равномерной непрерывности отметим, что имеет место неравенство

$$|\hat{\Theta}(t+s, \sigma) - \hat{\Theta}(t, \sigma)| \leq |\hat{\Theta}(t+s, \sigma) - \Theta_{\tau_k}(t+s, \sigma)| + |\hat{\Theta}(t, \sigma) - \Theta_{\tau_k}(t, \sigma)| + |\Theta_{\tau_k}(t+s, \sigma) - \Theta_{\tau_k}(t, \sigma)|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, если $|\Theta(t+s, \sigma) - \Theta(t, \sigma)| \leq \varepsilon$ при $|s| \leq \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$, то, начиная с некоторого τ_k (при необходимости перейдем к подпоследовательности $\{\tau_{j_k}\}$) выполнено неравенство

$$|\hat{\Theta}(t+s, \sigma) - \hat{\Theta}(t, \sigma)| \leq \max_{|t| \leq k+\varepsilon} |\hat{\Theta}(t+s, \sigma) - \Theta_{\tau_k}(t+s, \sigma)| + \max_{|t| \leq k} |\hat{\Theta}(t, \sigma) - \Theta_{\tau_k}(t, \sigma)| + \varepsilon \leq k^{-1} + k^{-1} + \varepsilon, \quad |t| \leq k.$$

Устремляя k к бесконечности, получим требуемое.

Докажем теперь, что каждая функция из $\mathfrak{X}(\sigma)$ правильная. Если

$$\hat{\Theta}(t, \sigma) \doteq (\hat{S}(f^t \sigma), \hat{P}(t, \sigma), \hat{C}(t, \sigma)) \in \mathfrak{X}(\sigma),$$

то найдется такая последовательность $\{\tau_k\}$, что имеет место сходимость $\Theta_{\tau_k} \rightarrow \hat{\Theta}$ в топологии равномерной сходимости на отрезках. Так как $S(f^{t+\tau_k} \sigma) = S(f^t \sigma_k)$, где $\sigma_k = f^{\tau_k} \sigma$ и пространство Σ компактно, то, выделив из последовательности $\{\sigma_k\}$ сходящуюся к некоторой точке $\hat{\sigma} \in \Sigma$ подпоследовательность (обозначим ее снова $\{\sigma_k\}$), получим сходимость $S(f^{t+\tau_k} \sigma) \rightarrow S(f^t \hat{\sigma})$, из которой следует равенство $\hat{S}(t, \sigma) = S(f^t \hat{\sigma})$.

Далее, если $\Phi(t, \sigma)$ — фундаментальная матрица системы (A, σ) , построенная в доказательстве леммы 11, то $\Phi(t + \tau_k, \sigma)$ — аналогичная матрица для системы (A_{τ_k}, σ) . Так как $(A_{\tau_k}, \sigma) = (A, \sigma_k)$, то имеет место равенство $\Phi(t + \tau_k, \sigma) = \Phi(t, \sigma_{\tau_k})$. Следовательно,

$$Z^*(t + \tau_k, \sigma) Z(t + \tau_k, \sigma) = \Phi^*(t, \sigma_{\tau_k}) \Phi(t, \sigma_{\tau_k}) = Z^*(t, \sigma_{\tau_k}) Z(t, \sigma_{\tau_k}).$$

Поэтому, в силу лемм 5, 6 и 7, имеем:

$$Z(t + \tau_k, \sigma) = Z(t, \sigma_{\tau_k}) \rightarrow Z(t, \hat{\sigma}) \quad \text{и} \quad Z^*(t, \hat{\sigma}) Z(t, \hat{\sigma}) = \Phi^*(t, \hat{\sigma}) \Phi(t, \hat{\sigma}).$$

Далее, из равенства (5.8) следует сходимость

$$P(t + \tau_k, \sigma) = \Phi(t, \sigma_{\tau_k}) Z^{-1}(t, \sigma_{\tau_k}) = P(t, \sigma_{\tau_k}) \rightarrow P(t, \hat{\sigma}) = \Phi(t, \hat{\sigma}) Z^{-1}(t, \hat{\sigma}).$$

Следовательно, выполнено равенство $\hat{P}(t, \sigma) = P(t, \hat{\sigma})$, функция $(t, \hat{\sigma}) \rightarrow \hat{P}(t, \hat{\sigma})$ непрерывна, функция $t \rightarrow \hat{P}(t, \sigma)$ непрерывно дифференцируема при каждом σ и, кроме того, матрица $\hat{P}(t, \hat{\sigma})$ ортогональна при всех $(t, \hat{\sigma})$.

Аналогично доказывается, что имеет место сходимость (в топологии равномерной сходимости на отрезках)

$$F(t + \tau_k, \sigma) \doteq \dot{Z}(t + \tau_k, \sigma) Z^{-1}(t + \tau_k, \sigma) \rightarrow \dot{Z}(t, \hat{\sigma}) Z^{-1}(t, \hat{\sigma}) = F(t, \hat{\sigma})$$

и $G(t + \tau_k, \sigma) \rightarrow G(t, \hat{\sigma})$. Тем самым доказано, что $\hat{C}(t, \sigma) = C(t, \hat{\sigma})$ и нестационарное пероновское преобразование $x = \hat{P}(t, \sigma) y$ приводит систему (S, σ) к системе $\hat{C}(t, \sigma)$. Поэтому $\hat{\Theta}(t, \sigma) = \Theta(t, \hat{\sigma})$ и, следовательно, $\hat{\Theta}(t, \sigma)$ — правильная матрица. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть заданы топологическая динамическая система (Σ, f^t) с компактным фазовым пространством Σ и регулярное семейство (S, Σ) управляемых систем вида (4.1). По этой системе построим правильную функцию (см. (4.2))

$$t \rightarrow \Theta(t, \sigma) \doteq (S(f^t \sigma), P(t, \sigma), C(t, \sigma)), \quad (5.13)$$

где $S(\sigma) \doteq (A(\sigma), B(\sigma))$ — исходная система (4.1), $x = P(t, \sigma)y$ — перроновское преобразование системы (4.1), $C(t, \sigma) \doteq (F(t, \sigma), G(t, \sigma))$ — управляемая система, заданная равенством (4.3). В силу леммы 8 такая функция существует.

Построим теперь по функции (5.13) пространство $\mathfrak{X}(\sigma)$, имеющее структуру, как в определении 5, то есть пространство, полученное из правильной функции $t \rightarrow \Theta(t, \sigma)$ замыканием множества её сдвигов $\Theta_\tau(t, \sigma)$. Такое пространство является замыканием траектории движения точки Θ , определенной равенством (5.13): $\mathfrak{X}(\sigma) = \overline{\text{orb}}(\Theta(\cdot, \sigma))$. На пространстве $\mathfrak{X}(\sigma)$ определим поток h^t равенством $h^t \Theta(\cdot, \sigma) = \Theta_t(\cdot, \sigma)$. Тогда пара $(\mathfrak{X}(\sigma), h^t)$ образует топологическую динамическую систему с топологией равномерной сходимости на отрезках на фазовом пространстве $\mathfrak{X}(\sigma)$. В силу только что доказанной леммы 12, фазовое пространство $\mathfrak{X}(\Theta)$ компактно, а следовательно, фазовое пространство динамической системы (Ω, g^t) , построенной в соответствии с равенствами (4.4), тоже компактно. Остается напомнить, что построенное расширение $(\mathcal{S}, \Omega)$ семейства (S, Σ) систем не содержит новых управляемых систем и каждой управляемой системе (S, σ) семейства (S, Σ) отвечает канонический представитель $(\mathcal{C}, \omega)$ семейства $(\mathcal{C}, \Omega)$.

Лемма 13. *Если пространство Σ минимально относительно потока f^t , то семейство (S, Σ) регулярно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если пространство Σ минимально, то всякое движение $t \rightarrow f^t \sigma$ в Σ рекуррентно [7, с. 400]. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ множество

$$\Delta(\varepsilon, \sigma) \doteq \{t \in \mathbb{R}: \varrho(f^t \sigma, \sigma) \leq \varepsilon\},$$

где ϱ — метрика в Σ , относительно плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$. Следовательно, движение $t \rightarrow f^t \sigma$ рекуррентно в том и только том случае, если для любых $\varepsilon > 0$, $\varkappa > 0$ множество

$$\theta(\varepsilon, \varkappa, \sigma) \doteq \left\{ \tau \in \mathbb{R}: \max_{|t| \leq \varkappa} \varrho(f^{t+\tau} \sigma, f^t \sigma) \leq \varepsilon \right\}$$

$(\varepsilon, \varkappa)$ -почти периодов относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$.

Так как функция $t \rightarrow W_\vartheta(S, f^t \sigma)$, где матрица $W_\vartheta(S, \sigma)$ определена равенством (3.1), тоже рекуррентна (то есть для любых $\varepsilon > 0$ и $\varkappa > 0$ множество

$$\left\{ \tau \in \mathbb{R}: \max_{|t| \leq \varkappa} |W_\vartheta(S, f^{t+\tau} \sigma) - W_\vartheta(S, f^t \sigma)| \leq \varepsilon \right\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$), то функции $t \rightarrow \lambda_i(\vartheta, f^t \sigma)$, где через $\lambda_i(\vartheta, \sigma)$ обозначены собственные значения матрицы $W_\vartheta(S, \sigma)$, тоже рекуррентны при любом $\sigma \in \Sigma$. Но размерность пространства управляемости $\mathcal{L}_\vartheta(S, \sigma)$ системы (S, σ) совпадает с количеством строго положительных собственных значений матрицы $W_\vartheta(S, \sigma)$. С учетом рекуррентности собственных значений λ_i матрицы $W_\vartheta(S, \sigma)$ и того факта, что функции $\vartheta \rightarrow \lambda_i(\vartheta, \sigma)$ не убывают с возрастанием времени ϑ , следует регулярность системы (S, σ) при любом σ . $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Достаточно доказать, что если пространство Σ минимально относительно потока f^t , то построенное в лемме 12 и доказательстве теоремы 1 пространство Ω минимально относительно потока g^t .

Отметим [7, с. 400], что если движение $t \rightarrow g^t \omega$ рекуррентно для каждой точки $\omega \in \Omega$, то замыкание $\overline{\text{orb}}(\omega)$ траектории $\text{orb}(\omega)$ движения $t \rightarrow g^t \omega$ является минимальным множеством

и имеют место равенства $\overline{\text{orb}}(\omega) = \overline{\text{orb}}_+(\omega) = \Omega$. Поэтому достаточно показать, что движение $t \rightarrow g^t \omega$ рекуррентно для каждой точки $\omega \in \Omega$.

Пусть $\Theta(t, \sigma)$ — функция, построенная согласно равенству (4.2), тогда, как было показано в лемме 12, выполнено равенство $\Theta(t + \tau, \sigma) = \Theta(t, f^\tau \sigma)$. Поэтому из рекуррентности движения $t \rightarrow f^t \sigma$, как несложно убедиться, следует рекуррентность (при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$) функции $t \rightarrow \Theta(t, \sigma)$. Это означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\varkappa > 0$ множество

$$\left\{ \tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq \varkappa} |\Theta(t + \tau, \sigma) - \Theta(t, \sigma)| \leq \varepsilon \right\}$$

относительно плотно на прямой $\mathbb{R}$. Действительно, пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\varkappa > 0$. Тогда из непрерывности (равномерной по t на отрезках) движения $t \rightarrow f^t \sigma$ по начальным данным следует, что найдется положительная константа δ , обеспечивающая неравенство

$$\max_{|t| \leq \varkappa} |\Theta(t, \hat{\sigma}) - \Theta(t, \sigma)| \leq \varepsilon$$

для всех точек $\hat{\sigma}$, удовлетворяющих неравенству $\varrho(\hat{\sigma}, \sigma) \leq \delta$.

Далее, в силу рекуррентности движения $t \rightarrow f^t \sigma$ найдется относительно плотная последовательность $\{\tau_k\}$ такая, что неравенство $\varrho(\sigma_k, \sigma) \leq \delta$, где $\sigma_k = f^{\tau_k} \sigma$, выполнено для любого целого k . Следовательно, имеет место неравенство $\max_{|t| \leq \varkappa} |\Theta(t + \tau_k, \sigma) - \Theta(t, \sigma)| \leq \varepsilon$, что и доказывает рекуррентность функции $t \rightarrow \Theta(t, \sigma)$ для каждой точки σ .

Этим же свойством рекуррентности обладает любая функция $\hat{\Theta}(\cdot, \sigma)$ пространства $\mathfrak{X}(\sigma)$. Следовательно, при каждом σ пространство $\mathfrak{X}(\sigma)$ минимально относительно потока h^t .

Далее, так как имеют место равенства

$$\Xi(g^t \omega) = \Theta(0, p(g^t \omega)) = \Theta(0, f^t \sigma) = \Theta(t, \sigma),$$

где $\sigma = p(\omega)$, то, как легко проверить, для любой точки $\omega \in \Omega$ функция $t \rightarrow \Xi(g^t \omega)$ тоже рекуррентна. Более того, функция $t \rightarrow g^t \omega \doteq (f^t \sigma, \Theta(\cdot, f^t \sigma))$, где $\sigma = p(\omega)$, тоже рекуррентна (для всякой точки $\omega \in \Omega$). Следовательно, пространство Ω минимально. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Perron O. Uber line Matrixtransformation // Mathematische Zeitschrift. 1930. № 32. P. 465–473.
2. Миллионщиков В.М. О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью линейных систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 12. С. 2127–2134.
3. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.
4. Тонков Е.Л. Канонический представитель линейной управляемой системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. С. 113–123.
5. Аносов Д.В. Лекции по линейной алгебре. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 105 с.
6. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Арнольд В.И., Бронштейн И.У., Гринес В.З., Ильяшенко Ю.С. Динамические системы–1 // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. М.: Изд-во ВИНТИ АН СССР, 1985. 244 с.
7. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
8. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Ижевск: Удмуртский университет, 1999. 408 с.
9. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюлл. ин-та матем. при МГУ. 1940. Т. 2. № 5. С. 1–52.
10. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
12. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
13. Тонков Е.Л. Глобально управляемые линейные системы // Современная математика и её приложения. 2005. Т. 23. С. 145–165.

Поступила в редакцию 01.02.2012

Тонков Евгений Леонидович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: eltonkov@udm.ru

E. L. Tonkov**The space of linear control systems and its canonical representatives**

Keywords: linear control systems, controllability space, the Perron transformation, dynamical systems.

Mathematical Subject Classifications: 34D08, 93C15

The space of linear control systems that are parameterized with the help of a topological dynamical system is considered. For each invariant space (with respect to a flow in the dynamical system phase space) there are constructed its extension and the corresponding Perron transformation that reduces a given family of systems to the so-called canonical system. It is also proved that for minimal invariant spaces the Perron transformation possesses the recurrence property.

REFERENCES

1. Perron O. Über lineare Matrixtransformation, *Math. Z.*, 1930, no. 32, pp. 465–473.
2. Millionshchikov V.M. The connection between the stability of characteristic exponents and almost reducibility of linear systems of differential equations with almost periodic coefficients, *Differ. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 12, pp. 2127–2134.
3. Popova S.N., Tonkov E.L. Consistent systems and control over Lyapunov exponents, *Differ. Uravn.*, 1997, vol. 33, no. 2, pp. 226–235.
4. Tonkov E.L. Canonical representative of linear control system, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2003, no. 1, pp. 113–123.
5. Anosov D.V. *Lektsii po lineinoi algebre* (Lectures on linear algebra), Moscow: Regular and Chaotic Dynamics, 1999. 105 p.
6. Anosov D.V., Aranson S.Kh., Arnol'd V.I., Bronshtein I.U., Grines V.Z., Il'yashenko Yu.S. Dynamical Systems–1, *Itogi Nauki i Tekhniki Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Naprav.*, vol. 1, Moscow: Vseross. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform. (VINITI), 1985, 244 p.
7. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow: GITTL, 1949. 550 p.
8. Birkhoff G.D. *Dynamical Systems*, New York, 1927. Translated under the title *Dinamicheskie sistemy*, Izhevsk: RCD, 1999. 408 p.
9. Bebutov M.V. Dynamical systems in the space of continuous function, *Bull. Mat. Inst. Moscow State University*, 1940, vol. 2, no. 5, pp. 1–52.
10. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Topics in mathematical system theory*, New York: McGraw-Hill, 1969, 358 p. Translated under the title *Ocherki po matematicheskoi teorii sistem*, Moscow: Editorial URSS, 2004, 400 p.
11. Horn R., Johnson C. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.
12. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of control of motion), Moscow: Nauka, 1968, 475 p.
13. Tonkov E.L. Globally controllable linear systems, *Sovrem. Mat. Prilozh.*, 2005, vol. 23, p. 145–165.

Received 01.02.2012

Tonkov Evgenii Leonidovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: eltonkov@udm.ru