Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Chistyakov, On integrating the projectile motion equations of a heavy point in medium with height decreasing density, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, Issue 1, 120–132

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.135.184

April 26, 2023, 16:26:14

УДК 531.55+514.85

© В. В. Чистяков

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ТОЧКИ В СРЕДЕ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ПЛОТНОСТИ

Резольвентный метод, базирующийся на преобразованиях Лежандра, применен для интегрирования уравнений баллистики в среде со степенным по скорости сопротивлением, коэффициент которого падает линейно с высотой. Во втором приближении по градиенту плотности и с учетом уменьшения с высотой ускорения свободного падения $g(y)$ задача сведена к линейному дифференциальному уравнению. Его решением получены универсальные формулы для неоднородностной добавки к резольвентной функции $f_n(b)$, а также к вертикальной и горизонтальной координатам $\delta y(b)$, $\delta x(b)$, $b = \operatorname{tg} \theta$ — наклон траектории. Подробно рассмотрен случай квадратичного сопротивления.

Ключевые слова: преобразование Лежандра, резольвентная функция, степенной закон сопротивления, линейная неоднородность плотности.

Введение

Проблема актуальна как в силу сугубо прикладных потребностей внешней баллистики [1–4], космонавтики, метеорологии, спорта [5], анимации и других, так и с фундаментальной точки зрения регулярной нелинейной динамики и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Традиционно сопротивление описывают кусочно-степенными по скорости зависимостями или же предполагается, что при неизменном базовом показателе степени изменяется коэффициент. Чаще всего за базовое значение принимается $n = 2$, но в ряде баллистических подходов за основу берется кубическая зависимость силы R от скорости [4].

Случай квадратичного рэлеевского сопротивления $R = C_d \rho S V^2 = \alpha m g V^2$, V — скорость, ρ — плотность, S — фронтальная площадь, и C_d — коэффициент формы, чрезвычайно важен, так как он реализуется для тел (снаряды, ракеты, автомобили, воланы, шарики и так далее) вплоть до чисел Маха $M \approx 0,7$ (см графики в [2]). Однако в сверхзвуковой области коэффициент α для многих тел падает как $1/V^{1/2}$, и сила оказывается пропорциональной $V^{3/2}$ («закон трех вторых» [3]).

Первые результаты интегрирования в квадратурах уравнений свободного движения в однородной по плотности среде со степенным по скорости сопротивлением были получены еще в девятнадцатом веке [6]. Но, несмотря на давность, исследования, как теоретические [7, 8], так и экспериментальные, продолжаются и в наши дни, приводя к созданию неких универсальных для динамики подходов.

В настоящей работе применен резольвентный метод для интегрирования уравнений плоского движения с одночленным степенным сопротивлением $R = \alpha(y) \cdot m g V^n$, когда коэффициент $\alpha(y)$ убывает линейно с вертикальной координатой y .

§ 1. Преобразования Лежандра: однородная среда

В каждой точке баллистической траектории вектор скорости $\vec{V}$ составляет свой уникальный угол θ с горизонтом, равно как уникальны и параметры в уравнении касательной $y_k = a + bx$: угловой коэффициент $b = \operatorname{tg} \theta$ и прерывание $a(\theta(b)) \equiv a(b)$ (рис. 1). Следовательно, альтернативно можно описать траекторию как зависимость

$$a = a(b), \quad b = b(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

Рис. 1. Баллистическая траектория (—) и ее касательное расслоение (---)

то есть через ее *касательное расслоение*, уравнение которого получается при помощи преобразования Лежандра.

Обратный переход осуществляется по формулам

$$\left\{ x = -\frac{\dot{a}}{\dot{b}} = -\frac{da}{db}, y = a - \frac{da}{db} b, t(b) = \int_{b_0}^b \frac{d\tilde{b}}{\dot{b}(\tilde{b})} \right\}. \quad (1.1)$$

Соотношения позволяют найти закон движения и рассчитать основные параметры траектории: дальность L , высоту H , абсциссу вершины L_a , наклон приземления $b_1 = \tan \theta_1$ (рис. 1) [8]. Примечательно, что все эти параметры выражаются через три ключевых: $b_0 = \tan \theta_0$ — стартовый наклон траектории, R_a — вершинный радиус ее кривизны и β_0 — безразмерный квадрат разворотной скорости [там же].

Имеет смысл изложить результаты применения подхода для среды с постоянным коэффициентом сопротивления.

Сила сопротивления тогда равна $\vec{R} = -\alpha m g V^{n-1} \vec{V}$, и уравнения движения составляют систему

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\alpha m g \dot{x} V^{n-1}, \\ m\ddot{y} = -\alpha m g \dot{y} V^{n-1} - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\alpha g \dot{x} \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right)^{n-1}, \\ \ddot{y} = -\alpha g \dot{y} \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right)^{n-1} - g. \end{cases} \quad (1.2)$$

По аналогии с [8] умножением верхнего уравнения на b и вычитанием его из нижнего получается $\dot{b}\dot{x} = -g$, что с учетом (1.1) эквивалентно $\dot{b} \left(-\frac{d^2a}{db^2} \dot{b} \right) = -g$ и, следовательно,

$$\dot{b} = -\sqrt{\frac{g}{a''_{bb}}}, \quad b(0) = b_0 = \tan \theta_0, \quad (1.3)$$

что справедливо для любого «лобового» закона $R(V)$, вплоть до противоречащего причинно-следственной связи отрицательного сопротивления (тяги).

Аналогичной цепочкой несложных преобразований [там же] выводится задача Коши для резольвентной функции $a(b)$

$$a'''_{bbb} = 2\alpha g^{\frac{n}{2}} (a''_{bb})^{\frac{n}{2}+1} \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{n-1}, \quad a(b_0) = \frac{da(b_0)}{db} = 0, \quad \frac{d^2a(b_0)}{db^2} = \frac{V_0^2 \cos^2 \theta_0}{g}. \quad (1.4)$$

Ее решение есть [6]

$$a_{bb}^{(0)''}(b) = \left[\left(\frac{V_0^2 \cos^2 \theta_0}{g} \right)^{-\frac{n}{2}} + n\alpha g^{\frac{n}{2}} b_0 F \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) - \right. \\ \left. - n\alpha g^{\frac{n}{2}} b F \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b^2 \right) \right]^{-2/n} = \frac{R_a}{\left(1 - n\beta_n b F \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b^2 \right) \right)^{\frac{2}{n}}} \equiv f_n(b),$$

где $R_a = f_n(0) = \frac{V_a^2}{g} = \frac{V_0^2}{g \left((1 + b_0^2)^{\frac{n}{2}} + n\alpha V_0^n b_0 F \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) \right)^{\frac{2}{n}}}$ — радиус кривизны

в вершине траектории, $V_a^2 = \frac{V_0^2}{C_n}$ — вершинный квадрат скорости, $C_n = \frac{V_0^2}{V_a^2} = \left((1 + b_0^2)^{\frac{n}{2}} + \right.$

$\left. + n\alpha V_0^n b_0 F \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) \right)^{\frac{2}{n}}$, $\beta_n = \frac{\alpha V_0^n}{C_n} = \frac{V_a^2}{V_T^2}$ — отношение квадрата вершинной скорости к квадрату предельной (V_t) при падении с неограниченной высоты в однородном поле,

$$b F \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b^2 \right) = \int_0^b \left(\sqrt{1 + b'^2} \right)^{n-1} db' = \int_0^{\operatorname{arcsinh} b} (\operatorname{ch} u)^n du.$$

Из (1.4) легко получаются наглядные формулы для координат и времени

$$x_0(b) = -R_a \int_{b_0}^b \frac{d\tilde{b}}{\phi_n(\tilde{b})}, \quad y_0(b) = -R_a \int_{b_0}^b \frac{\tilde{b} d\tilde{b}}{\phi_n(\tilde{b})}, \quad t_0(b) = -\sqrt{\frac{R_a}{g}} \int_{b_0}^b \frac{d\tilde{b}}{\sqrt{\phi_n(\tilde{b})}}, \quad (1.5) \\ \phi_n(\tilde{b}) = \left(1 - n\beta_n \tilde{b} F \left(\frac{1}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -\tilde{b}^2 \right) \right)^{\frac{2}{n}}.$$

§ 2. Линейно неоднородная плотность

Вообще, неоднородность плотности земной атмосферы может быть локально вызвана как погодными условиями, так и природными явлениями, а также искусственными артефактами: туман, вулканическая пыль, дымовая завеса и прочими.

Есть и глобальные причины, связанные с тем, что относительная плотность воздуха падает с высотой в согласии с барометрической формулой, линеаризуемой как $\rho(y)/\rho_0 = 1 - c'y$, $c'/\text{м}^{-1}$ — ее постоянный градиент. Такое поведение имеет место для земных высот, не превышающих 2000 м, и градиент оценивается как $c' \approx 10^{-4} \text{ м}^{-1}$.

Кроме того, в первом приближении линейно с высотой убывает также приповерхностное ускорение свободного падения $g(y) = g_0 \left(1 - \frac{2y}{\mathfrak{R}} \right)$, $\mathfrak{R}$ — радиус Земли/планеты.

Резольвентное уравнение в (1.4) учитывает локальные и глобальные факторы мультипликативно, но в линейном приближении они складываются в *эффективный* градиент $c/\text{м}^{-1}$

$$\left(1 - \frac{2y}{\mathfrak{R}} \right)^{\frac{n}{2}} (1 - c'y) = 1 - \left(c' + \frac{n}{\mathfrak{R}} \right) y + \frac{c'n}{\mathfrak{R}} y^2 + \dots \approx 1 - \left(c' + \frac{n}{\mathfrak{R}} \right) y \equiv 1 - cy. \quad (2.1)$$

В итоге резольвентное уравнение примет вид

$$a_{bbb}''' = 2\alpha_0 g_0^{\frac{n}{2}} (a_{bb}'')^{\frac{n}{2}+1} \left(\sqrt{1 + b^2} \right)^{n-1} \cdot (1 - c(a - a'_b b)). \quad (2.2)$$

Интегрирование с применением приема «по частям» дает

$$\int_{b_0}^b \frac{a_{bbb}'''}{(a_{bb}'')^{\frac{n}{2}+1}} d\tilde{b} = 2\alpha_0 g^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^b \left(\sqrt{1 + \tilde{b}^2} \right)^{n-1} d\tilde{b} - c \cdot 2\alpha_0 g^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^b (a - a'_b \tilde{b}) \left(\sqrt{1 + \tilde{b}^2} \right)^{n-1} d\tilde{b},$$

в результате

$$\begin{aligned} \frac{(a''_{bb}(b))^{-\frac{n}{2}} - (a''_{bb}(b_0))^{-\frac{n}{2}}}{-\frac{n}{2}} = \\ = \frac{(f_n(b))^{-\frac{n}{2}} - (f_n(b_0))^{-\frac{n}{2}}}{-\frac{n}{2}} - \frac{c \cdot y(b) (f_n(b))^{-\frac{n}{2}}}{-\frac{n}{2}} + c \int_{b_0}^b \frac{(-a''\tilde{b}) (f_n(b))^{-\frac{n}{2}}}{-\frac{n}{2}} d\tilde{b}. \end{aligned}$$

Здесь $y(b) = -\int_{b_0}^b a''_{bb}(\tilde{b})\tilde{b} d\tilde{b}$ — зависимость вертикальной координаты от наклона, $g \equiv g_0$ — тяготение на высоте старта.

С учетом универсальности начальных условий на обе резольвенты $f_n(b)$ и $a''_{bb}(b)$

$$a''_{bb}(b) = \left((f_n(b))^{-\frac{n}{2}} - c \cdot y(b) (f_n(b))^{-\frac{n}{2}} + c \int_{b_0}^b (-a''\tilde{b}) (f_n(\tilde{b}))^{-\frac{n}{2}} d\tilde{b} \right)^{-\frac{2}{n}},$$

следовательно,

$$a''_{bb}(b) = \frac{f_n(b)}{\left(1 + c \int_{b_0}^b a''_{bb}(\tilde{b})\tilde{b} d\tilde{b} - c f_n(b)^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^b a''(\tilde{b})\tilde{b} (f_n(\tilde{b}))^{-\frac{n}{2}} d\tilde{b} \right)^{\frac{2}{n}}}. \quad (2.3)$$

Это нелинейное интегральное уравнение можно решать итеративно с $f_n(b)$ в качестве нулевого приближения, получая в первом

$$a^{(I)''}_{bb}(b) = \frac{f_n(b)}{\left(1 + c \int_{b_0}^b f_n(\tilde{b})\tilde{b} d\tilde{b} - c f_n(b)^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^b \tilde{b} (f_n(\tilde{b}))^{1-\frac{n}{2}} d\tilde{b} \right)^{\frac{2}{n}}}. \quad (2.4)$$

Кроме того, для малоугловых траекторий прицельной стрельбы приближенное решение можно найти в виде степенного ряда по наклону b , аналогично [8].

§ 3. Приближение 2-го порядка

Однако, альтернативный путь позволяет достаточно точно найти решение резольвентного уравнения (2.2) при не слишком больших градиентах c/m^{-1} .

Интегрированием с учетом невозмущенного уравнения (1.4) получается

$$a''_{bb}(b) = \frac{f_n(b)}{\left(1 + c \cdot n \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^b y(\tilde{b}) \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{n-1} d\tilde{b} \right)^{\frac{2}{n}}}. \quad (3.1)$$

Если ввести в качестве новой переменной $G(b) = \int_{b_0}^b y(\tilde{b}) \left(\sqrt{1+\tilde{b}^2} \right)^{n-1} d\tilde{b} \leq 0$, то

$$\frac{dG(b)}{db} = y(b) \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{n-1},$$

следовательно

$$y(b) = G'_b \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{1-n},$$

и с учетом $a''_{bb} = -\frac{y'_b(b)}{b}$ получается

$$-\frac{G''_{bb} \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{1-n} + G'_b \left(\left(\sqrt{1+b^2} \right)^{1-n} \right)'_b}{b} = \frac{f_n(b)}{\left(1 + c \cdot n \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b) \right)^{\frac{2}{n}}}.$$

Тогда

$$\frac{G''_{bb} \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{1-n} + G'_b \left(b(1-n) \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{-n-1} \right)}{b} = -\frac{f_n(b)}{\left(1 + c \cdot n \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b) \right)^{\frac{2}{n}}},$$

что в итоге равносильно уравнению

$$G''_{bb} + G'_b \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) = -\frac{f_n(b)b \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{n-1}}{\left(1 + c \cdot n \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b) \right)^{\frac{2}{n}}}. \quad (3.2)$$

С введением $G_0(b) = \int_{b_0}^b y_0(\tilde{b}) \left(\sqrt{1+\tilde{b}^2} \right)^{n-1} d\tilde{b}$ и учетом того, что

$$G''_{(0)bb} + G'_{(0)b} \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) = -f_n(b)b(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

оно преобразуется к виду

$$G''_{bb} + G'_b \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) = \frac{G''_{(0)b} + G'_{(0)b} \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right)}{\left(1 + c \cdot n \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b) \right)^{\frac{2}{n}}}. \quad (3.3)$$

Теперь решение можно искать в виде $G(b) = G_0(b) + cD(b)$, используя при этом биномиальное разложение для знаменателя и полагая, что

$$c \cdot n \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G(b) \ll 1, \quad \forall b \in [b_0, b_1]. \quad (3.4)$$

Нетрудно максимизацией левой части по b с учетом уравнения (2.2) для $f_n(b)$ показать, что это условие автоматически выполняется, если $c \cdot \max_b[y_0(b)] = cH_0 \ll 1$.

Во втором порядке такого разложения уравнение сохранят свою линейность

$$\begin{aligned} cD''_{bb} + cD'_b \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) + \left(G''_{(0)bb} + G'_{(0)b} \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) \right) &= \\ &= \left(G''_{(0)b} + G'_{(0)b} \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) \right) \left(1 + c \cdot n \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G_0 + c^2 n \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} D \right)^{-\frac{2}{n}} \approx \\ &\approx \left(1 - c \cdot 2 \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G_0(b) - c^2 \cdot 2 \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} D(b) + c^2 \cdot 4(2+n) \alpha^2 g^n f_n(b)^n G_0^2(b) \right) \cdot \\ &\cdot \left(G''_{(0)bb} + G'_{(0)b} \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} D''_{bb} + D'_b \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) + c \cdot 2 \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} D(b) \left(G''_{(0)bb} + G'_{(0)b} \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) \right) &\approx \\ \approx - \left(2 \alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G_0(b) - c \cdot 4(2+n) \alpha^2 g^n f_n(b)^n G_0^2(b) \right) \cdot \left(G''_{(0)bb} + G'_{(0)b} \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $G''_{(0)bb} + G'_{(0)b} \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) = -f_n(b)b(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}}$, преобразуем уравнение к виду

$$\begin{aligned} D''_{bb} + D'_b \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) + c \cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} D(b) \left(-f_n(b)b(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}} \right) &\approx \\ \approx - \left(2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}} G_0(b) - c \cdot 4(2+n)\alpha^2 g^n f_n(b)^n G_0^2(b) \right) \cdot \left(-f_n(b)b(1+b^2)^{\frac{n-1}{2}} \right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(D''_{bb} + D'_b \left(\frac{b}{1+b^2} (1-n) \right) \right) (1+b^2)^{\frac{1-n}{2}} - c \cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}+1} b D(b) &\approx \\ \approx b \left(2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}+1} G_0(b) - c \cdot 4(2+n)\alpha^2 g^n f_n(b)^{n+1} G_0^2(b) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Представив теперь $D(b) = D_1(b) + c \cdot D_2(b)$, получим для первого члена

$$\left(D'_{1b}(b)(1+b^2)^{\frac{1-n}{2}} \right)'_b = 2\alpha g^{\frac{n}{2}} \left(b f_n(b)^{\frac{n}{2}+1} G_0(b) \right),$$

следовательно,

$$D'_{1b}(b) = 2\alpha g^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^b \tilde{b} f_n(\tilde{b})^{\frac{n}{2}+1} G_0(\tilde{b}) d\tilde{b} \cdot (1+b^2)^{\frac{n-1}{2}},$$

и добавка первого порядка равна

$$D_1(b) = 2\alpha g^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^b \left(\int_{b_0}^{b'} \tilde{b} f_n(\tilde{b})^{\frac{n}{2}+1} G_0(\tilde{b}) d\tilde{b} \right) \cdot (1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}} db'. \quad (3.6)$$

Аналогично находится и второй порядок:

$$\left(D'_{2b}(b)(1+b^2)^{\frac{1-n}{2}} \right)'_b = 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(b)^{\frac{n}{2}+1} b D_1(b) - 4(2+n)\alpha^2 g^n f_n(b)^{n+1} G_0^2(b)b,$$

следовательно,

$$D'_{2b}(b) = (1+b^2)^{\frac{n-1}{2}} \left(\int_{b_0}^b 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(\tilde{b})^{\frac{n}{2}+1} \tilde{b} D_1(\tilde{b}) - 4(2+n)\alpha^2 g^n f_n(\tilde{b})^{n+1} G_0^2(\tilde{b}) \tilde{b} \right) d\tilde{b},$$

и добавка равна

$$\begin{aligned} D_2(b) = \int_{b_0}^b \left((1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}} \left(\int_{b_0}^{b'} 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n(\tilde{b})^{\frac{n}{2}+1} \tilde{b} D_1(\tilde{b}) - \right. \right. \\ \left. \left. - 4(2+n)\alpha^2 g^n f_n(\tilde{b})^{n+1} G_0^2(\tilde{b}) \tilde{b} \right) d\tilde{b} \right) db'. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В итоге с точностью до членов 2-го порядка по градиенту c/m^{-1} функция $G(b)$ определится как

$$\begin{aligned} G(b) \approx \int_{b_0}^b y_0(\tilde{b}) \left(\sqrt{1+\tilde{b}^2} \right)^{n-1} d\tilde{b} + c \cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^b \left(\int_{b_0}^{b'} \tilde{b} f_n(\tilde{b})^{\frac{n}{2}+1} G_0(\tilde{b}) d\tilde{b} \right) \cdot (1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}} db' + \\ + c^2 \cdot \int_{b_0}^b \left((1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}} \left(\int_{b_0}^{b'} 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(\tilde{b}) \tilde{b} D_1(\tilde{b}) - 4(2+n)\alpha^2 g^n f_n^{n+1}(\tilde{b}) G_0^2(\tilde{b}) \tilde{b} \right) d\tilde{b} \right) db'. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Зависимость от b вертикальной координаты —

$$\begin{aligned} y(b) = \frac{dG(b)}{db} \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{1-n} \approx y_0(b) + c \cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^b \tilde{b} f_n^{\frac{n}{2}+1}(\tilde{b}) G_0(\tilde{b}) d\tilde{b} + \\ + c^2 \cdot 4\alpha^2 g^n \int_{b_0}^b \left(f_n^{\frac{n}{2}+1}(k) \left(\int_{b_0}^k \left(\int_{b_0}^{b'} \tilde{b} f_n^{\frac{n}{2}+1}(\tilde{b}) G_0(\tilde{b}) d\tilde{b} \right) \cdot (1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}} db' \right) - \right. \\ \left. - (2+n) G_0^2(k) k f_n^{n+1}(k) \right) dk. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Соответственно, резольвента $f(b) = a''_{bb}(b)$ для нахождения $x(b)$ и $t(b)$ —

$$\begin{aligned} a''_{bb}(b) = & -\frac{1}{b} \cdot \frac{dy(b)}{db} \approx f_n(b) - c \cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) G_0(b) - \\ & - c^2 \cdot 4\alpha^2 g^n \left(f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) \left(\int_{b_0}^b \left(\int_{b_0}^{b'} \tilde{b} f_n^{\frac{n}{2}+1}(\tilde{b}) G_0(\tilde{b}) d\tilde{b} \right) \cdot (1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}} db' \right) - \right. \\ & \left. - (2+n) f_n^{n+1}(b) G_0^2(b) \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

С учетом знака $G_0(b)$ и пределов интегрирования видно, что обе добавки к $f_0(b)$ положительны как минимум на взлетном участке траектории $b \geq 0$, и они взаимно усиливают друг друга, уменьшая кривизну этого участка.

Линейное по $c/\mathcal{M}^{-1}$ слагаемое (обозначим его $ca_{bb}^{(I)''}(b)$) можно преобразовать все тем же интегрированием по частям

$$\begin{aligned} ca_{bb}^{(I)''}(b) = & -c \cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) G_0(b) = \frac{c \cdot 2f_n^{\frac{n}{2}+1}(b)}{n} \int_{b_0}^b y_0(\tilde{b}) \left(-n\alpha g^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{1+\tilde{b}^2} \right)^{n-1} \right) d\tilde{b} = \\ = & \frac{c \cdot 2f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) y_0(b) f_n^{-\frac{n}{2}}(b)}{n} + \frac{c \cdot 2f_n^{\frac{n}{2}+1}(b)}{n} \int_{b_0}^b f_n(\tilde{b}) f_n^{-\frac{n}{2}}(\tilde{b}) \tilde{b} d\tilde{b}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$ca_{bb}^{(I)''}(b) = c \cdot \frac{2}{n} f_n(b) \left(y_0(b) + f_n^{\frac{n}{2}}(b) \int_{b_0}^b f_n^{1-\frac{n}{2}}(\tilde{b}) \tilde{b} d\tilde{b} \right). \quad (3.11)$$

Тогда содержащая 4-кратное интегрирование квадратичная добавка $c^2 a_{bb}^{(II)''}(b)$ преобразуется как

$$\begin{aligned} c^2 a_{bb}^{(II)''}(b) = & c \cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} \frac{f_n^{\frac{n}{2}+1}(b)}{b} \left(\int_{b_0}^b \left(\int_{b_0}^{b'} \tilde{b} \left(-c \cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) G_0(\tilde{b}) \right) d\tilde{b} \right) \cdot (1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}} db' \right) + \\ & + (2+n) \left(-c \cdot 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) G_0(b) \right)^2 = \\ = & c^2 \cdot \left\{ 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) \left(\int_{b_0}^b \left(\int_{b_0}^{b'} \tilde{b} \left(\frac{2}{n} f_n(\tilde{b}) \left(y_0(\tilde{b}) + f_n(\tilde{b})^{\frac{n}{2}} \int_{b_0}^{\tilde{b}} f_n^{1-\frac{n}{2}}(k) k dk \right) \right) d\tilde{b} \right) \cdot \right. \right. \\ & \left. \cdot (1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}} db' \right) + (2+n) \left(\frac{2}{n} f_n(b) \left(y_0(b) + f_n^{\frac{n}{2}}(b) \int_{b_0}^b f_n^{1-\frac{n}{2}}(\tilde{b}) \tilde{b} d\tilde{b} \right) \right)^2 \Big\}, \end{aligned}$$

и она определится следующим образом:

$$\begin{aligned} c^2 a_{bb}^{(II)''}(b) = & c^2 \cdot \left\{ 2\alpha g^{\frac{n}{2}} f_n^{\frac{n}{2}+1}(b) \left(\int_{b_0}^b \left(-\frac{y_0^2(b')}{n} + \int_{b_0}^{b'} \left(\frac{2}{n} f_n^{\frac{n}{2}+1}(\tilde{b}) \int_{b_0}^{\tilde{b}} f_n^{1-\frac{n}{2}}(k) k dk \right) \tilde{b} d\tilde{b} \right) \cdot \right. \right. \\ & \left. \cdot (1+b'^2)^{\frac{n-1}{2}} db' \right) + (2+n) \left(\frac{2}{n} f_n(b) \left(y_0(b) + f_n^{\frac{n}{2}}(b) \int_{b_0}^b f_n^{1-\frac{n}{2}}(\tilde{b}) \tilde{b} d\tilde{b} \right) \right)^2 \Big\}. \end{aligned}$$

Кратность интегрирования таким преобразованием понижается на единицу, что немало важно при численном интегрировании.

Линейные по градиенту поправки добавки к горизонтальной координате и времени движения определяются как

$$\begin{aligned}\delta x^{(I)}(b) &= -c \cdot \frac{2}{n} \int_{b_0}^b f_n(b') \left(y_0(b') + f_n^{\frac{n}{2}}(b') \int_{b_0}^{b'} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\tilde{b}) \tilde{b} d\tilde{b} \right) db' = |-f_n(b') db' = dx_0(b')| = \\ &= c \cdot \frac{2}{n} S_{xy}^{(0)}(b) - c \cdot \frac{2}{n} \int_{b_0}^b f_n^{\frac{n}{2}+1}(b') \left(\int_{b_0}^{b'} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\tilde{b}) \tilde{b} d\tilde{b} \right) db', \\ \delta t^{(I)}(b) &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \int_{b_0}^b f_n^{-\frac{1}{n}}(b') \left[1 + c \cdot \frac{2}{n} \left(y_0(b') + f_n^{\frac{n}{2}}(b') \int_{b_0}^{b'} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\tilde{b}) \tilde{b} d\tilde{b} \right) \right]^{-\frac{1}{n}} db' + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g}} \int_{b_0}^b f_n^{-\frac{1}{n}}(b) db' \approx c \frac{2}{\sqrt{g} n^2} \int_{b_0}^b f_n^{-\frac{1}{n}}(b') \left(y_0(b) + f_n^{\frac{n}{2}}(b) \int_{b_0}^b f_n^{1-\frac{n}{2}}(\tilde{b}) \tilde{b} d\tilde{b} \right)^{-\frac{1}{n}} db'.\end{aligned}$$

Интегрирование по частям с учетом уравнения в (1.4) дает в итоге

$$\delta t^{(I)}(b) = -c \frac{2t_0(b)y_0(b)}{n^2} + c \frac{2\alpha g^{\frac{n}{2}}}{n} \int_{b_0}^b \left(\int_{b_0}^{b'} f_n^{1-\frac{n}{2}}(\tilde{b}) \tilde{b} d\tilde{b} \right) t_0(b') (f_n(b'))^n \left(\sqrt{1+b'^2} \right)^{n-1} b' db'.$$

Здесь $S_{xy}^{(0)}(b)$ — площадь под невозмущенной траекторией от стартовой точки до точки с наклоном b .

Из-за своей громоздкости квадратичные поправки к x и t не приводятся. Тем не менее, не представляет труда их высокоточная нумеризация через резольвентную функцию (3.10) при помощи таких продуктов, как Maple [8], MatLab и другие, хорошо интегрирующие медленно меняющиеся функции. И не будет смелым утверждение о большей надежности резольвентного метода по сравнению с вычислением по векторной разностной схеме 2-го порядка для двух переменных, то есть по скалярной 4-го.

§ 4. Квадратичный закон

Случай рэлеевского сопротивления чрезвычайно важен в баллистике, в динамике любого движения твердого тела в диссипирующей среде.

Метод дает выражение для невозмущенной резольвенты [8] —

$$f_2(b) \equiv a_{bb}^{(0)''}(b) = \frac{R_a}{1 - \beta_2 \left(b\sqrt{b^2 + 1} + \operatorname{arcsch} b \right)}, \quad (4.1)$$

где $R_a = \frac{V_a^2}{g} = \frac{V_0^2}{gC_0}$ — радиус кривизны траектории в точке разворота (*разворотный*),

$$C_0 = \frac{V_0^2}{V_a^2} = 1 + b_0^2 + \alpha V_0^2 \left(b_0 \sqrt{b_0^2 + 1} + \operatorname{arcsch} b_0 \right) \quad (4.2)$$

— отношение квадратов скоростей на старте и в точке разворота, а

$$\beta_2 = \frac{\alpha V_0^2}{C_0} = \frac{V_a^2}{V_T^2} = \frac{\alpha V_0^2 \cos^2(\theta_0)}{1 + \alpha V_0^2 \left(\sin \theta_0 + \cos^2(\theta_0) \cdot \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)} \quad (4.3)$$

— безразмерный квадрат *разворотной* скорости.

Знаменательно, что при квадратичном сопротивлении эта резольвента под интегралом в (3.11) сокращается, и линейная добавка выражается просто:

$$ca_{bb}^{(0)''}(b) = c \cdot \left(y_0(b)f_2(b) + f_2^2(b) \cdot \frac{b^2 - b_0^2}{2} \right). \quad (4.4)$$

Рис. 2. Кривые $\delta y(b)$ (4.6), $\delta x(b)$ (4.5), $ca_{bb}^{(I)''}$ (4.4) и $\delta y(b)$ (4.6)

Рис. 3. Поверхности $Z(b, b_0) = c \frac{d^2 a^{(I)}(b, b_0)}{db^2}$

Квадратичная равна

$$c^2 a_{bb}^{(II)''} = c^2 \cdot \left\{ 2\alpha g f_2^2(b) \left(\int_{b_0}^b \left(-\frac{y_0^2(b')}{2} - \int_{b_0}^{b'} f_2(\tilde{b}) \left(\frac{\tilde{b}^2 - b_0^2}{2} \right) (-f_2(\tilde{b})\tilde{b}) d\tilde{b} \right) \cdot (1+b'^2)^{\frac{1}{2}} db' \right) + \right. \\ \left. + 4 \left(f_2(b) \left(y_0(b) + f_2(b) \cdot \frac{\tilde{b}^2 - b_0^2}{2} \right) \right)^2 \right\},$$

что дает после несложных преобразований

$$c^2 a_{bb}^{(II)''}(b) = c^2 \cdot 2\alpha g \left\{ f_2^2(b) \left(\int_{b_0}^b \left(-y_0^2(b') - y_0(b') f_2(b') \left(\frac{b'^2 - b_0^2}{2} \right) \right) \cdot (1+b'^2)^{\frac{1}{2}} db' \right) + \right. \\ \left. + \int_{b_0}^b \left(\int_{b_0}^{b'} y_0(\tilde{b}) f_2^2(\tilde{b}) (1+\tilde{b}^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tilde{b}^2 - b_0^2}{2} \right) d\tilde{b} \right) db' + 4 \left(f_2(b) \left(y_0(b) + f_2(b) \cdot \frac{\tilde{b}^2 - b_0^2}{2} \right) \right)^2 \right\}.$$

$$dX(b_0, b), V_0 = 200 \text{ м/с}, a = 0,0001, r = 4$$

Рис. 4. Добавка $\delta x^{(I)}(b, b_0)$, $V_0 = 200 \text{ м/с}$, $c = 0,0001 \text{ м}^{-1}$, $\alpha = 0,00005 \text{ с}^2/\text{м}^2$

Поправки первого порядка к характеристикам движения определяются как соответствующие интегралы от $ca_{bb}^{(0)''}(b)$. Для x -координаты это

$$\delta x^{(I)}(b) = c \cdot \int_{b_0}^b \left(f_2(b) y^{(0)}(b') + (f_2(b))^2 \cdot \frac{b'^2 - b_0^2}{2} \right) db' = -c \cdot \int_{b_0}^b y^{(0)}(b') dx^{(0)}(b') - \\ - \frac{c}{4\alpha g} \cdot \int_{b_0}^b \frac{f_2'(b) (b'^2 + 1 - (1 + b_0^2))}{\sqrt{1 + b'^2}} db' = \\ = cS_{xy}^0(b) + \frac{cf_2(b)(b_0^2 - b^2)}{4\alpha g (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{cy^{(0)}(b) (2 + b_0^2 + b^2)}{4\alpha g (1 + b^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{4\alpha g} \int_{b_0}^b \frac{(4 + 3b_0^2 + b'^2) y^{(0)}(b') b'}{(1 + b'^2)^{\frac{5}{2}}} db'. \quad (4.5)$$

$$dY(b_0, b), V_0 = 100 \text{ м/с}, a = 0,0001, c = 0,0001, r = 1$$

Рис. 5. Добавка $\delta y^{(I)}(b, b_0)$, $V_0 = 100 \text{ м/с}$, $c = 0,0001 \text{ м}^{-1}$, $\alpha = 0,0001 \text{ с}^2/\text{м}^2$

При $b = b_1$ подынтегральная функция в последнем члене (4.5) обращается в нуль в трех точках, меняя при этом знак при переходе через вершину $b = 0$. Это дает основание ожидать, что в силу ее медленного изменения в области малых b_0 вклад последнего слагаемого мал по сравнению с главным первым членом, пропорциональным всей площади под траекторией. Тогда при оценке вклада в дальность им можно пренебречь.

Для вертикальной координаты линейная добавка определится как

$$\delta y^{(I)}(b) = -c \cdot \int_{b_0}^b \left(f_2(b') b' y^{(0)}(b') + (f_2(b'))^2 b' \cdot \frac{b'^2 - b_0^2}{2} \right) db', \quad (4.6)$$

что дает после интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \delta y^{(I)}(b) = & \frac{c y_0^2(b)}{2} + \frac{c}{4\alpha g} \cdot \frac{f_2(b) b (b_0^2 - b^2)}{(1 + b^2)^{\frac{1}{2}}} + \\ & + \frac{c}{4\alpha g} \cdot \frac{x^{(0)}(b) (b_0^2 - 3b^2 - 2b^4)}{(1 + b^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c}{4\alpha g} \int_{b_0}^b \frac{(2b'^4 + 5b'^2 + 6 + 3b_0^2) x^{(0)}(b') b'}{(1 + b'^2)^{\frac{5}{2}}} db'. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Такое же интегрирование во всех вышеприведенных формулах помимо придания некоторой наглядности выражениям преследовало также цель контроля точности, с которой в Maple вычисляются повторные интегралы. В идеале результаты, рассчитанные, например, по (4.6) и (4.7), должны совпадать. Именно это и наблюдалось: кривые, рассчитанные по исходной и преобразованной формулам сливались ($\delta y^{(I)}(b)$ — линии 1 (4.6) и 4 (4.7) рис. 2).

Характерный вид кривой ($V_0 = 150 \text{ м/с}$, $\alpha = 0,0006$, $c = 0,0001 \text{ м}^{-1}$, $b_0 = 0,8$) свидетельствует, что добавка положительна вплоть до значений $b_2 = k(b_0)b_1$, со слабо зависящим от начальных наклона и сопротивления коэффициентом $k(b_0) \approx 1,87 \dots 2$.

Это можно сформулировать как своеобразный «закон удвоения наклона»: при запуске точечной массы (сферического тела) с достаточно большой высоты в среде с постоянным гради-

ентом плотности и квадратичным по скорости законом сопротивления преимущество в горизонтальной координате за счет падения плотности достигает максимума ниже уровня запуска на примерно удвоенном наклоне его пересечения.

То же подтверждает вид зависимостей $Z(b, b_0) = c \frac{d^2 a^{(I)}(b, b_0)}{db^2}$ (рис. 3) для не слишком больших начальных сопротивлений $r = R(V_0)/mg < 2 \dots 3$, когда линия нулевого уровня в плоскости (O, b, b_0) двумя фрагментами сливается с кривой $b = 2b_1^{(0)}(b_0)$.

Что касается самой резольвентной добавки, то ее поведение при изменении b_0 при $b = \text{const}$ не является монотонно растущим, но имеет максимум. В том числе и для $b = 0$, что свидетельствует о немонотонности прироста разворотного радиуса $\delta R_a(b_0)$. Однако относительное его увеличение монотонно растет с b_0 , выходя на насыщение при больших углах вылета.

Соответствующие поверхности над плоскостью (b, b_0) для координатных добавок $\delta x^{(I)}(b, b_0)$ и $\delta y^{(I)}(b, b_0)$ (рис. 4, 5) сохраняют свой вид в широкой области начальных скоростей и безразмерных коэффициентов сопротивления. При этом конечные величины поправок могут достигать десятков метров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. URL: <http://www.snipercountry.com/ballistics/tables/>
2. Paul Weinacht, Gene R. Cooper, James F. Newill. Analytical Prediction of Trajectories for High-Velocity Direct-Fire Munitions // Army Research Laboratory Report.
URL: <http://www.arl.army.mil/arlreports/2005/ARL-TR-3567.pdf>
3. Thomas R.N. Some Comments on the Form of Drag Coefficient at Supersonic Velocity: report no. 542 // U.S. Army Ballistic Research Laboratory: Aberdeen Proving Ground, MD, April, 1945.
4. Robert F. Lieske. Determination of aerodynamic drag and exterior ballistic trajectory simulation for the 155MM, DPICM, M864 base-burn projectile // Memorandum report BRL-MR-3768, Aberdeen, Maryland, June, 1989.
5. N. de Mestre. The Mathematics of Projectiles in Sport. New York: Cambridge University Press, 1990. 175 p.
6. Edward John Routh, A Treatise on Dynamics of a Particle with Numerous Examples. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1898. 418 p.
7. Чудинов П.С. Численно-аналитический алгоритм построения огибающей траекторий снарядов в воздухе // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. 2009. Вып. 7 (33). С. 90–94.
8. Чистяков В.В. Об одном резольвентном методе интегрирования уравнений свободного движения в среде с квадратичным сопротивлением // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3. № 3. С. 265–277.

Поступила в редакцию 12.12.2011

Чистяков Виктор Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра физики и электротехники, кафедра математики и ИКТ, Ярославская государственная сельхозакадемия, 150042, Россия, г. Ярославль, Тутаевское ш., 58.

E-mail: chistiakov_v_v@rambler.ru, v.chistyakov@yarcx.ru

V. V. Chistyakov

On integrating the projectile motion equations of a heavy point in medium with height decreasing density

Keywords: Legendre transformation, resolvent function, power law air drag, linear density inhomogeneity.

Mathematical Subject Classifications: 70E15, 34A26, 34A34

The resolvent method based on Legendre transformation was applied to integrate ballistic equations of a heavy point mass in inhomogeneous medium with the drag force being power-law with respect to speed, at

that the coefficient of the drag force decreases linearly with height y . General expressions were obtained for resolvent function $a''_{bb}(b)$ with $a(b)$ being an intercept and $b = \operatorname{tg} \theta$, where θ is inclination angle. In the second order by gradient c/m^{-1} of perturbative approach, the universal formulas for $\delta a''_{bb}(b)$ -, $\delta x(b)$ -, $\delta y(b)$ -additions were derived. The case of Releigh resistance was considered particularly in frames of the method above and inhomogeneity influence on the motion was investigated. The falling of gravity $g(y)$ is taken into consideration too.

REFERENCES

1. <http://www.snipercountry.com/ballistics/tables/>
2. Paul Weinacht, Gene R. Cooper, James F. Newill. *Analytical Prediction of Trajectories for High-Velocity Direct-Fire Munitions*, Army Research Laboratory Report.
<http://www.arl.army.mil/arlreports/2005/ARL-TR-3567.pdf>
3. Thomas R.N. *Some Comments on the Form of Drag Coefficient at Supersonic Velocity: report no. 542*, U.S. Army Ballistic Research Laboratory: Aberdeen Proving Ground, MD, April, 1945.
4. Robert F. Lieske. *Determination of aerodynamic drag and exterior ballistic trajectory simulation for the 155MM, DPICM, M864 base-burn projectile*, Memorandum report BRL-MR-3768, Aberdeen, Maryland, June, 1989.
5. N. de Mestre. *The Mathematics of Projectiles in Sport*, Cambridge University Press, New York, 1990, 175 p.
6. Edward J. R. *A Treatise on Dynamics of a Particle with Numerous Examples*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1898, 418 p.
7. Chudinov P.S. Numerical-analytical algorithm for constructing the envelope of the projectile trajectories in the air, *Vest. Perm. Univ. Mat. Mekh.*, 2009, no. 7 (33), pp. 90–94.
8. Chistyakov V.V. On one resolvent method for integrating the low angle trajectories of a heavy point projectile motion under quadratic air resistance, *Komp. Issled. Model.*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 265–277.

Received 12.12.2011

Chistyakov Viktor Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Yaroslavl State Academy of Agriculture, Tutaevskoe sh., 58, Yaroslavl, 150042, Russia.
E-mail: chistiakov_v_v@rambler.ru, v.chistyakov@yarcx.ru