Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. A. Panasenko, Dynamical system of translations in the space of multi-valued functions with closed images, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, Issue 2, 28–33

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.164.48.24

April 26, 2023, 11:25:36

УДК 517.938.5, 517.911.5

© *Е. А. Панасенко***ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СДВИГОВ В ПРОСТРАНСТВЕ
МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ЗАМКНУТЫМИ ОБРАЗАМИ¹**

Рассматривается динамическая система сдвигов в пространстве $\mathfrak{A}$ непрерывных функций, принимающих значения в полном метрическом пространстве $(\text{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\text{cl}})$ непустых замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Расстояние между функциями в этом пространстве определяется с помощью аналога метрики Бебутова в пространстве вещественных функций, определенных и непрерывных на всей числовой оси. Показано, что для компактности замыкания траектории точки в $\mathfrak{A}$ достаточно, чтобы исходная функция была ограничена и равномерно непрерывна в метрике ρ_{cl} . Как следствие, доказано, что замыкание траектории рекуррентного движения или траектории почти периодического движения в $\mathfrak{A}$ компактно.

Ключевые слова: пространство многозначных функций с замкнутыми образами, динамическая система сдвигов, замыкание траектории.

Введение

Для изучения вопросов качественной теории дифференциальных включений удобно привлекать аппарат динамических систем: минимальные и инвариантные множества, омега- и альфа-предельные множества, периодические, почти периодические или рекуррентные свойства движений в фазовом пространстве. Эта практика успешно используется для изучения асимптотики решений дифференциальных систем. Особая роль здесь принадлежит топологическим динамическим системам сдвигов, динамическим системам А. А. Маркова (см., например, [1]), которые не только естественным образом возникают в теории автономных дифференциальных включений (для которых сдвиг любого решения по времени также является решением), но и позволяют рассматривать неавтономные включения с помощью автономных, используя соответствующую параметризацию.

В работе М. В. Бебутова [2], опубликованной в 1941 г., была изучена динамическая система сдвигов в пространстве вещественных функций, определенных и непрерывных на всей числовой оси, в частности, были получены условия компактности замыкания траектории точки в этом пространстве. В данной заметке приводятся аналогичные утверждения для динамической системы сдвигов в пространстве многозначных функций с замкнутыми (но не обязательно ограниченными или выпуклыми) образами в пространстве $\mathbb{R}^n$. Расстояние между замкнутыми множествами в $\mathbb{R}^n$ при этом определяется с помощью метрики, введенной в [3], а расстояние между многозначными функциями — с помощью аналога метрики Бебутова, полученной в [2].

Динамические системы сдвигов в пространстве многозначных функций с компактными (а также замкнутыми выпуклыми) образами изучались в работах [4–7].

§ 1. Пространство многозначных функций с образами в $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$

Пусть $\mathbb{R}^n$ — пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\varrho(x, M) \doteq \min_{y \in M} |x - y|$ — расстояние в $\mathbb{R}^n$ от точки x до замкнутого множества M ; $S_r(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $O_r(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$, $O_r^o(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$ — сфера, замкнутый и открытый шары, соответственно, в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в x_0 ; $O_r \doteq O_r(0)$; $O_r^o \doteq O_r^o(0)$; $S_r \doteq S_r(0)$; $O_0(x_0) = S_0(x_0) = \{x_0\}$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00645) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы».

Через $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространства *непустых компактных* и *непустых замкнутых* подмножеств $\mathbb{R}^n$, соответственно. Пространство $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ будем рассматривать с метрикой Хаусдорфа dist , пространство $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ снабдим метрикой ρ_{cl} (см. [3]), определяемой для любых $F, G \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ соотношением

$$\rho_{\text{cl}}(F, G) \doteq |\varrho(0, F) - \varrho(0, G)| + \sup_{r>0} \min \left\{ \text{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G), \frac{1}{r} \right\}, \quad (1)$$

где $\mathfrak{S}_r F \doteq (F \cap O_r^o) \cup S_r$, $\mathfrak{S}_r G \doteq (G \cap O_r^o) \cup S_r \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Отметим некоторые основные свойства метрики ρ_{cl} и пространства $(\text{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\text{cl}})$, которые нам потребуются в дальнейшем.

Теорема 1. 1) Для любых множеств $F, G \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка

$$\rho_{\text{cl}}(F, G) \leq |\varrho(0, F) - \varrho(0, G)| + 1 < \infty, \quad (2)$$

в частности,

$$|F|_{\text{cl}} \doteq \rho_{\text{cl}}(\{0\}, F) = \begin{cases} 2\varrho(0, F), & \varrho(0, F) \leq 1 \\ \varrho(0, F) + 1, & \varrho(0, F) > 1 \end{cases} \leq \varrho(0, F) + 1.$$

2) Из сходимости последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ в метрике ρ_{cl} следует сходимость числовой последовательности $\{\varrho(0, F^i)\}_{i=1}^\infty$ и сходимость при любом $r > 0$ последовательности $\{(F^i \cap O_r^o) \cup S_r\}_{i=1}^\infty$ в метрике Хаусдорфа dist .

3) Если сходится последовательность $\{\varrho(0, F^i)\}_{i=1}^\infty$ и найдется такое $r_0 \geq 0$, что для любого $r > r_0$ последовательность $\{(F^i \cap O_r^o) \cup S_r\}_{i=1}^\infty$ сходится в метрике dist , то последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ сходится в метрике ρ_{cl} .

4) Пространство $(\text{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\text{cl}})$ является полным.

5) Любое замкнутое ограниченное подмножество $(\text{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\text{cl}})$ является компактным.

Доказательство. Доказательства утверждений 1) – 4) (а также ряд других свойств метрики ρ_{cl}) приведены в [3].

Покажем справедливость свойства 5). Пусть множество $\mathfrak{F}$ пространства $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ замкнуто и ограничено. Тогда для компактности $\mathfrak{F}$ достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным. Фиксируем произвольное положительное ε и построим конечную ε -сеть для множества $\mathfrak{F}$. Ограниченность множества $\mathfrak{F}$ означает существование такого $p > 0$, что $|F|_{\text{cl}} \leq p$ для любого $F \in \mathfrak{F}$. Не уменьшая общности можно считать, что $p \geq 2/\varepsilon$. Рассмотрим множество $\mathfrak{F}_p \doteq \{\mathfrak{S}_p F : F \in \mathfrak{F}\}$, где $\mathfrak{S}_p F = (F \cap O_p^o) \cup S_p$. Это множество является ограниченным подмножеством пространства $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, и, следовательно, оно вполне ограничено. Тогда для него существует конечная $\bar{\varepsilon} \doteq \varepsilon/2$ -сеть $U_{\bar{\varepsilon}} \subset \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что для любого $F \in \mathfrak{F}$ найдется множество $F_{\bar{\varepsilon}} \in U_{\bar{\varepsilon}}$, такое, что $\text{dist}(F_{\bar{\varepsilon}}, \mathfrak{S}_p F) \leq \bar{\varepsilon}$. Оценим $\rho_{\text{cl}}(F_{\bar{\varepsilon}}, F)$. Так как функция $r \mapsto \text{dist}(\mathfrak{S}_r F_{\bar{\varepsilon}}, \mathfrak{S}_r F)$ не убывает (см. [3]), то

$$\sup_{r>0} \min \left\{ \text{dist}(\mathfrak{S}_r F_{\bar{\varepsilon}}, \mathfrak{S}_r F), \frac{1}{r} \right\} = \sup \left\{ \sup_{0<r\leq p} \{ \text{dist}(\mathfrak{S}_r F_{\bar{\varepsilon}}, \mathfrak{S}_r F) \}, \sup_{r>p} \{ 1/r \} \right\} \leq \varepsilon/2,$$

а из свойств расстояния по Хаусдорфу получаем

$$|\varrho(0, F_{\bar{\varepsilon}}) - \varrho(0, F)| = |\varrho(0, F_{\bar{\varepsilon}}) - \varrho(0, \mathfrak{S}_p F)| \leq \varepsilon/2.$$

Таким образом, $\rho_{\text{cl}}(F_{\bar{\varepsilon}}, F) \leq \varepsilon$, и $U_{\bar{\varepsilon}}$ будет ε -сетью для множества $\mathfrak{F}$. □

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{A}$, элементами которого являются функции $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^n)$, непрерывные в метрике ρ_{cl} , то есть для любой функции $F \in \mathfrak{A}$ в каждой точке $t_0 \in \mathbb{R}$ выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $t \in \mathbb{R}$ из неравенства $|t_0 - t| < \delta$ следует неравенство $\rho_{\text{cl}}(F(t_0), F(t)) < \varepsilon$.

Замечание 1. Отметим, что для функций с образами в пространстве $(\text{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\text{cl}})$ можно ввести понятия *полу непрерывности сверху* и *полу непрерывности снизу*. Для этого надо рассмотреть функцию *полуотклонения* $\rho_{\text{cl}}^+ : \text{clos}(\mathbb{R}^n) \times \text{clos}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенную равенством

$$\rho_{\text{cl}}^+(F, G) \doteq |\varrho(0, F) - \varrho(0, G)| + \sup_{r>0} \min \left\{ d(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G), \frac{1}{r} \right\}, \quad (3)$$

где $d(\cdot, \cdot)$ — полуотклонение по Хаусдорфу одного компактного множества от другого. Очевидно, что $\rho_{\text{cl}}(F, G) = \max\{\rho_{\text{cl}}^+(F, G), \rho_{\text{cl}}^+(G, F)\}$. Тогда функцию $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ назовем *полу непрерывной сверху* (снизу) в точке t_0 , если выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех t , удовлетворяющих неравенству $|t_0 - t| < \delta$, выполнено неравенство $\rho_{\text{cl}}^+(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$ ($\rho_{\text{cl}}^+(F(t_0), F(t)) < \varepsilon$). Далее, функцию F назовем *полу непрерывной сверху* (снизу), если она *полу непрерывна сверху* (снизу) в каждой точке. Таким образом, функция F будет непрерывной, если она является одновременно *полу непрерывной сверху* и *снизу*.

На $\mathfrak{X}$ определим метрику, аналогичную метрике Бебутова в пространстве действительных функций, заданных и непрерывных на всей числовой прямой [2], а именно:

$$\rho_{\mathfrak{X}}(F^1, F^2) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \min \left\{ \rho_{\text{cl}}(F^1(t), F^2(t)), \frac{1}{|t|} \right\}, \quad F^1, F^2 \in \mathfrak{X}. \quad (4)$$

Нетрудно показать, что пространство $(\mathfrak{X}, \rho_{\mathfrak{X}})$ является *полным метрическим*, а сходимость последовательности в метрике $\rho_{\mathfrak{X}}$ равносильна сходимости равномерной на отрезках, то есть $\rho_{\mathfrak{X}}(F^i, F) \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon, \vartheta > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon, \vartheta)$, такой, что $\max_{|t| \leq \vartheta} \rho_{\text{cl}}(F^i(t), F(t)) < \varepsilon$ для всех $i \geq N$.

§ 2. Динамическая система сдвигов в пространстве многозначных функций

Напомним, что пара (Σ, h^t) есть *топологическая динамическая система*, если на метрическом пространстве Σ задана однопараметрическая группа преобразований $h^t : \Sigma \rightarrow \Sigma$ (то есть для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \Sigma$ имеет место $h^{t+s}\sigma = h^t h^s \sigma$), удовлетворяющая начальному условию $h^t \sigma|_{t=0} = \sigma$ и непрерывная по совокупности переменных (t, σ) на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$. Пространство Σ называют *фазовым пространством* динамической системы, h^t — *поток* на Σ , функцию $t \rightarrow h^t \sigma$ — *движением* точки σ , а

$$\text{orb}(\sigma) \doteq \{h^t \sigma : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad \text{orb}_+(\sigma) \doteq \{h^t \sigma : t \geq 0\}$$

— соответственно *траекторией* и *положительной полутраекторией* точки σ .

Пусть теперь $F \in \mathfrak{X}$, и F_τ определяет сдвиг функции F на константу $\tau \in \mathbb{R} : F_\tau(t) \doteq F(t+\tau)$, $t \in \mathbb{R}$. Если определить поток на $\mathfrak{X}$ равенством $h^\tau F \doteq F_\tau$, то пара $(\mathfrak{X}, h^\tau)$ будет задавать *топологическую динамическую систему сдвигов*.

Будем говорить, что функция $F \in \mathfrak{X}$ *удовлетворяет условию А*, если:

- 1) функция $t \rightarrow \varrho(0, F(t))$ *ограничена* на $\mathbb{R}$, то есть существует такое $c > 0$, что для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\varrho(0, F(t)) \leq c$;
- 2) F *равномерно непрерывна* на $\mathbb{R}$ в метрике ρ_{cl} , то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех t_1, t_2 из неравенства $|t_1 - t_2| < \delta$ следует неравенство $\rho_{\text{cl}}(F(t_1), F(t_2)) < \varepsilon$.

Следующая теорема является аналогом теоремы об устойчивости по Лагранжу траектории в пространстве функций непрерывных на всей числовой оси [2].

Теорема 2. Если функция $F \in \mathfrak{X}$ удовлетворяет условию А, то замыкание $\overline{\text{orb}}(F)$ траектории $\text{orb}(F) \doteq \{h^\tau F : \tau \in \mathbb{R}\}$ компактно в метрике (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что любое семейство функций $\{G\}$ из $\overline{\text{orb}}(F)$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на всей числовой оси. Согласно определению замыкания траектории, для всякой функции $G \in \overline{\text{orb}}(F)$ найдется последовательность моментов времени $\{\tau_i\}_{i=1}^\infty$, такая, что последовательность $\{h^{\tau_i} F\}_{i=1}^\infty$ сходится к G в топологии равномерной сходимости на отрезках, то есть для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$, начиная с некоторого номера $I = I(\varepsilon, \vartheta)$, неравенство $\rho_{\text{cl}}(F_{\tau_i}(t), G(t)) \leq \varepsilon$ имеет место для любого $t \in [-\vartheta, \vartheta]$. Следовательно, равномерная ограниченность функций G следует из ограниченности F (которую гарантирует пункт 1) условия **A**) и неравенства

$$|G(t)|_{\text{cl}} = \rho_{\text{cl}}(\{0\}, G(t)) \leq \rho_{\text{cl}}(\{0\}, F_{\tau_i}(t)) + \rho_{\text{cl}}(F_{\tau_i}(t), G(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

а равностепенная непрерывность — из равномерной непрерывности F и неравенства

$$\rho_{\text{cl}}(G(t + \vartheta), G(t)) \leq \rho_{\text{cl}}(G(t + \vartheta), F_{\tau_i}(t + \vartheta)) + \rho_{\text{cl}}(F_{\tau_i}(t + \vartheta), F_{\tau_i}(t)) + \rho_{\text{cl}}(F_{\tau_i}(t), G(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Далее, при каждом положительном ϑ множество $\{G_\vartheta\}$ сужений на отрезок $[-\vartheta, \vartheta]$ семейства функций $\{G\}$ удовлетворяет условиям обобщенной теоремы Арцела и, следовательно, является компактным. Следовательно, из этого семейства можно выделить последовательность, сходящуюся на отрезке $[-\vartheta, \vartheta]$, из которой, в свою очередь, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся на отрезке $[-\vartheta - 1, \vartheta + 1]$ и так далее. Тем самым показано, что диагональная последовательность сходится равномерно на каждом конечном интервале. Таким образом, доказано, что множество $\overline{\text{orb}}(F)$ компактно. $\square$

Рассмотрим теперь траектории рекуррентных или почти периодических движений в пространстве $\mathfrak{X}$. Напомним, что движение $\tau \rightarrow h^\tau F$ точки $F \in \mathfrak{X}$ называется *рекуррентным*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\ell(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \rho_{\mathfrak{X}}(h^\tau F, F) \leq \varepsilon\}$$

относительно плотно на числовой прямой $\mathbb{R}$, то есть $\ell(\varepsilon) \cap [t_0, t_0 + T] \neq \emptyset$ для некоторого $T > 0$ и всех $t_0 \in \mathbb{R}$. Далее, движение $\tau \rightarrow h^\tau F$ называется *почти периодическим*, если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотным является множество

$$L(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{s \in \mathbb{R}} \rho_{\mathfrak{X}}(h^{s+\tau} F, h^s F) \leq \varepsilon\}.$$

Очевидно, что если движение почти периодически, то оно рекуррентно, при этом обратное утверждение неверно.

Следствие 1 (см. [2]). Пусть $F \in \mathfrak{X}$ и движение $\tau \rightarrow h^\tau F$, где $h^\tau F = F_\tau$, рекуррентно (почти периодически). Тогда замыкание $\overline{\text{orb}}(F)$ траектории F компактно в метрике (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 достаточно показать, что F удовлетворяет условию **A**. Из рекуррентности движения $\tau \rightarrow h^\tau F$ и определения метрики Бебутова $\rho_{\mathfrak{X}}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотным будет множество

$$\theta(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq \varepsilon^{-1}} \rho_{\text{cl}}(F(t + \tau), F(t)) \leq \varepsilon\}.$$

Это, в свою очередь, означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $T = T(\varepsilon)$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется $\xi \in [0, T]$, удовлетворяющее неравенству

$$\max_{|t| \leq \varepsilon^{-1}} \rho_{\text{cl}}(F(t + t_0), F(t + \xi)) \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда из (5) следует

$$|F(t_0)|_{\text{cl}} \leq 1 + \max_{\xi \in [0, T]} |F(\xi)|_{\text{cl}}.$$

Таким образом, учитывая свойства метрики ρ_{cl} (см. теорему 1), получаем ограниченность функции $t \rightarrow \varrho(0, F(t))$.

Покажем теперь равномерную непрерывность функции F на всей числовой оси. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $T = T(\varepsilon)$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется хотя бы одно ξ , $\xi \in [0, T]$, удовлетворяющее условию

$$\max_{|t| \leq 3/\varepsilon} \rho_{cl}(F(t + t_0), F(t + \xi)) \leq \varepsilon/3. \quad (6)$$

Так как F является равномерно непрерывной на $[-T, T]$, то найдется такое $\delta \leq \varepsilon/3$, что при $|\eta| \leq \delta$ выполнено

$$\max_{|t| \leq T} \rho_{cl}(F(t + \eta), F(t)) \leq \varepsilon/3. \quad (7)$$

Тогда для $|\eta| \leq \delta$ и произвольного $t_0 \in \mathbb{R}$ из оценок (6) и (7) получаем

$$\rho_{cl}(F(t_0 + \eta), F(t_0)) \leq \rho_{cl}(F(\eta + t_0), F(\eta + \xi)) + \rho_{cl}(F(\eta + \xi), F(\xi)) + \rho_{cl}(F(\xi), F(t_0)) \leq \varepsilon.$$

Таким образом, условие **A** имеет место. Доказательство для случая почти периодического движения $\tau \rightarrow h^\tau F$ аналогично. $\square$

В динамической системе сдвигов $(\mathfrak{X}, h^\tau)$ рекуррентные свойства движений связаны с рекуррентными свойствами самих функций из $\mathfrak{X}$. Функция $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ называется *рекуррентной*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ множество (ε, ϑ) -почти периодов

$$l(\varepsilon, \vartheta) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \max_{|t| \leq \vartheta} \rho_{cl}(F(t + \tau), F(t)) \leq \varepsilon\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$. А если для всякого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество ε -почти периодов

$$L(\varepsilon) \doteq \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} \rho_{cl}(F(t + \tau), F(t)) \leq \varepsilon\},$$

то функция $t \rightarrow F(t)$ называется *почти периодической*.

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого во многом повторяет доказательство следствия 1.

Теорема 3. *Функция $F \in \mathfrak{X}$ рекуррентна тогда и только тогда, когда движение $\tau \rightarrow h^\tau F$ рекуррентно, и почти периодична тогда и только тогда, когда движение $\tau \rightarrow h^\tau F$ почти периодично.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
2. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюлл. Ин-та матем. при МГУ. 1940. Т. 2. № 5. С. 1–52.
3. Жуковский Е.С., Панасенко Е.А. Об одной метрике в пространстве непустых замкнутых подмножеств пространстве $\mathbb{R}^n$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 15–26.
4. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
5. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.

6. Панасенко Е.А. О существование рекуррентных и почти периодических решений дифференциального включения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 42–57.
7. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа–Бebutова и дифференциальные включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 162–177.

Поступила в редакцию 27.12.2011

Панасенко Елена Александровна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33.
E-mail: panlena_t@mail.ru

E. A. Panasenko

Dynamical system of translations in the space of multi-valued functions with closed images

Keywords: space of multivalued functions with closed images, dynamical system of translations, closure of trajectory.

Mathematical Subject Classifications: 37C99, 34A60

In the work there is considered the dynamical system of translations in the space $\mathfrak{R}$ of continuous multi-valued functions with images in complete metric space $(\text{clos}(\mathbb{R}^n), \rho_{\text{cl}})$ of nonempty closed subsets of $\mathbb{R}^n$. The distance between such functions is measured by means of the metric analogous to the Bebutov metric constructed for the space of continuous real-valued functions defined on the whole real line. It is shown that for compactness of the trajectory's closure in $\mathfrak{R}$ it is sufficient to have initial function bounded and uniformly continuous in the ρ_{cl} metric. As consequence, it is also proved that the trajectory's closure of a recurrent or an almost periodic motion is compact in $\mathfrak{R}$.

REFERENCES

1. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravnenii* (Qualitative theory of differential equations), Moscow: Gos. Izd. Tekh. Teor. Lit., 1949, 550 p.
2. Bebutov M.V. Dynamical systems in the space of continuous function, *Bull. Mat. Inst. Moscow State University*, 1940, vol. 2, no. 5, pp. 1–52.
3. Zhukovskii E.S., Panasenko E.A. On one metric in the space of nonempty closed subsets of $\mathbb{R}^n$, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'ut. Nauki*, 2012, no. 1, pp. 15–26.
4. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions, *Tr. Mat. Inst. Steklov*, 2008, vol. 262, pp. 202–221.
5. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221.
6. Panasenko E.A. On existence of recurrent and almost periodic solutions to differential inclusion, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'ut. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 42–57.
7. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. The space $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and differential inclusions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 121–136.

Received 27.12.2011

Panasenko Elena Aleksandrovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia.
E-mail: panlena_t@mail.ru