Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. E. Voronov, On compact T_1 -spaces, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, Issue 3, 20–27

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.85.183.62

April 26, 2023, 16:51:02

УДК 515.122.22, 515.122.252

© М. Е. Воронов

О КОМПАКТНЫХ T_1 -ПРОСТРАНСТВАХ

Рассматриваются пространства, всякие подпространства которых компактны. Будем называть такие пространства наследственно компактными. В работе рассматриваются вопросы о существовании и способах построения наследственно компактных T_1 -топологий. Доказано существование 2^{τ} попарно несравнимых наследственно компактных T_1 -топологий на бесконечном множестве X мощности τ . Получены характеристики наследственно компактных пространств. Доказано, что тихоновское произведение конечного числа наследственно компактных T_1 -пространств является наследственно компактным T_1 -пространством. Доказано, что тихоновское произведение бесконечного числа неодноточечных наследственно компактных T_1 -пространств не является наследственно компактным.

Ключевые слова: компактность, минимальная T_1 -топология, тихоновское произведение.

Введение

Работа посвящена некоторым вопросам теории компактных пространств.

Ослабление условия отделимости пространства X с хаусдорфовости до аксиомы T_1 существенно изменяет свойства компактных пространств. Это определяется в большей степени тем, что в отличие от хаусдорфовых компактов семейство замкнутых и семейство компактных подмножеств в случае T_1 -компактных пространств могут не совпадать. Вопросы, связанные с этой особенностью T_1 -компактных пространств, изучались Я. де Гроотом [1] (он исследовал c - и c^* -пространства), А.В. Архангельским [2] (рассматривавшим класс самосопряженных пространств).

В данной работе рассматриваются наследственно компактные топологические пространства, то есть пространства, в которых любое подпространство компактно. В случае хаусдорфовых пространств наследственно компактное пространство оказывается конечным.

В случае T_1 -пространств ситуация иная. Известным примером наследственно компактного T_1 -пространства является бесконечное пространство X с минимальной T_1 -топологией.

В связи с этим возникает вопрос о существовании на данном множестве других наследственно компактных T_1 -топологий. Если такие существуют, то сколько их? Возникает вопрос о способах построения таких топологий. Этим вопросам и посвящена данная работа.

§ 1. Предварительные сведения

Определения и обозначения, используемые в работе, стандартны, и их можно найти в [3, 4]. Напомним некоторые необходимые определения.

Определение 1. Пространство X называется *компактным*, если из любого открытого покрытия этого пространства можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 2. Топологическое пространство X удовлетворяет *аксиоме отделимости T_1* , или является *T_1 -пространством*, если для любых двух различных точек x_1, x_2 этого пространства существует окрестность Ox_1 такая, что $x_2 \notin Ox_1$.

Известно, что топологическое пространство X является T_1 -пространством тогда и только тогда, когда любое его одноточечное подмножество замкнуто.

Определение 3. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, или T_2 -пространством, если у любых двух различных точек x_1 и x_2 этого пространства существуют непесекающиеся окрестности.

Введем следующее определение.

Определение 4. Пространство X назовем *наследственно компактным*, если любое его подмножество компактно.

В случае хаусдорфовых пространств возникает

Предложение 1. *Наследственно компактное T_2 -пространство конечно.*

Доказательство. Пусть X наследственно компактно. Возьмем произвольную точку $x \in X$. Множество $X \setminus \{x\}$ компактно. Известно, что в T_2 -пространстве любое его компактное подмножество замкнуто. Тогда $X \setminus \{x\}$ замкнуто в X , а значит, $\{x\}$ открыто в X .

Таким образом, X дискретно, а дискретное пространство компактно, только если оно конечно. $\square$

В случае T_1 -пространств ситуация иная, и далее в работе будут рассматриваться только T_1 -пространства.

Известным примером наследственно компактного T_1 -пространства является бесконечное пространство X с минимальной T_1 -топологией, также известной как топология Зарисского.

Определение 5. *Минимальной T_1 -топологией* на множестве X называется семейство $\tau_m = \{X \setminus K : K \text{ конечно}\}$.

В §2 решаются вопрос о существовании других наследственно компактных T_1 -топологий и вопрос об их количестве.

§2. Одна конструкция наследственно компактной топологии

Пусть X — бесконечное множество, $A \subseteq X$ — его произвольное подмножество. Определим на множестве X семейство τ_A , состоящее из множеств семейства τ_m и множеств вида $A \cap U$, где $U \in \tau_m$. Другими словами, $\tau_A = \tau_m \cup \{A \setminus K : K \text{ конечно}\}$.

Предложение 2. *Семейство τ_A является топологией на множестве X .*

Доказательство. Рассмотрим произвольное семейство $\{U_\alpha : \alpha \in E\} \subseteq \tau_A$. Докажем, что $\bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha \in \tau_A$. Действительно, если для некоторого $\alpha_0 \in E$ множество $U_{\alpha_0} \in \tau_m$, то $\bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha \in \tau_m$. Пусть все $\{U_\alpha : \alpha \in E\}$ имеют вид $U_\alpha = A \setminus K_\alpha$, где множество K_α конечно для любого $\alpha \in E$. Тогда $\bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in E} (A \setminus K_\alpha) = A \setminus \bigcap_{\alpha \in E} K_\alpha$ и, следовательно, $\bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha \in \tau_A$.

Рассмотрим произвольное конечное семейство $\lambda = \{U_i\}_{i \leq n} \subseteq \tau_A$. Докажем, что $\bigcap_{i \leq n} U_i \in \tau_A$. Рассмотрим U_i такие, что $U_i \in \tau_m$, и обозначим $\lambda' = \{U_i : U_i \in \tau_m\}$. Тогда

$$\bigcap_{i \leq n} U_i = \left(\bigcap \{U_i : U_i \in \lambda'\} \right) \cap \left(\bigcap \{U_i : U_i \in \lambda \setminus \lambda'\} \right).$$

Для $\bigcap \{U_i : U_i \in \lambda'\}$ имеем, что $\bigcap \{U_i : U_i \in \lambda'\} = X \setminus K$, где K конечно. Также $\bigcap \{U_i : U_i \in \lambda \setminus \lambda'\} = A \setminus K'$, где K' конечно.

Тогда $\bigcap_{i \leq n} U_i = (X \setminus K) \cap (A \setminus K') = A \setminus (K \cup K')$ и, следовательно, $\bigcap_{i \leq n} U_i \in \tau_A$. $\square$

Будем говорить, что множество A порождает топологию τ_A . Нам будет полезна следующая

Лемма 1. *Пространство X наследственно компактно тогда и только тогда, когда для любого семейства открытых множеств $\gamma = \{U\}$ существует конечное подсемейство $\gamma' \subseteq \gamma$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \gamma'\} = \bigcup\{U : U \in \gamma\}$.*

Доказательство. Пусть X наследственно компактно. Докажем, что для любого семейства открытых множеств $\gamma = \{U\}$ существует конечное подсемейство $\gamma' \subseteq \gamma$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \gamma'\} = \bigcup\{U : U \in \gamma\}$.

Рассмотрим произвольное семейство открытых множеств $\gamma = \{U\}$. Подмножество $\bigcup\{U : U \in \gamma\} \subseteq X$, значит, $\bigcup\{U : U \in \gamma\}$ компактно. Семейство γ — открытое покрытие множества $\bigcup\{U : U \in \gamma\}$. Тогда существует конечное подпокрытие $\gamma' \subseteq \gamma$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \gamma'\} = \bigcup\{U : U \in \gamma\}$.

Пусть для каждого семейства открытых множеств $\gamma = \{U\}$ существует конечное подсемейство $\gamma' \subseteq \gamma$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \gamma'\} = \bigcup\{U : U \in \gamma\}$. Докажем, что X наследственно компактно.

Пусть A — произвольное подмножество X , $\gamma = \{U\}$ — произвольное открытое в A покрытие множества A . Тогда существует семейство $\gamma_x = \{U_x\}$ открытых в X множеств, где $U_x \cap A = U$ для любого $U \in \gamma$. Следовательно, существует конечное подсемейство $\gamma'_x \subseteq \gamma_x$ такое, что $\bigcup\{U_x : U_x \in \gamma'_x\} = \bigcup\{U_x : U_x \in \gamma_x\}$. Значит, семейство $\gamma' = \{U : U = U_x \cap A, U_x \in \gamma'_x\}$ будет конечным подпокрытием множества A . Следовательно, любое подмножество $A \subseteq X$ компактно, а значит, X наследственно компактно. $\square$

Лемма 2. *Пространство X с топологией τ_A является наследственно компактным T_1 -пространством.*

Доказательство. Пусть X_0 — произвольное подмножество X и $\lambda = \{U\}$ — произвольное открытое покрытие X_0 , то есть $X_0 \subseteq \bigcup\{U : U \in \lambda\}$. Докажем, что X_0 — компактно. Если $X_0 \setminus A \neq \emptyset$, то найдется $U \in \lambda$ такое, что $U \in \tau_m$, следовательно, $X_0 \setminus U$ конечно. Тогда найдется конечное число элементов из λ , покрывающих $X_0 \setminus U$. Пусть $X_0 \subseteq A$. Но тогда для любого $U \in \lambda$ имеем, что $X_0 \setminus U$ конечно, следовательно, найдется конечное число элементов из λ , покрывающих $X_0 \setminus U$. Следовательно, X наследственно компактно. $\square$

Напомним следующее

Определение 6. Топология τ_A *мажорирует* топологию τ_B , $\tau_B \leq \tau_A$, если $\tau_B \subseteq \tau_A$. Если найдутся $U \in \tau_A$ и $V \in \tau_B$ такие, что $U \notin \tau_B$ и $V \notin \tau_A$, то топологии называются *несравнимыми*.

Лемма 3. *Для любых множеств $A, B \in \tau_A \setminus \tau_m$ таких, что $A \setminus B$ бесконечно, следует, что топология τ_A несравнима с топологией τ_B .*

Доказательство. Покажем, что $A \notin \tau_B$. Действительно, нельзя представить множество A в виде $A = B \setminus K$, так как по условию A содержит бесконечно много точек, не лежащих в B . Покажем, что $B \notin \tau_A$. Действительно, множество B нельзя представить в виде $B = A \setminus K$, так как по условию множество $A \setminus B$ бесконечно. $\square$

Напомним, что симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Определение 7. Семейство σ подмножеств множества X назовем *существенным*, если для любых $A, B \in \sigma$ таких, что $A \neq B$, следует $A \Delta B$ бесконечно.

На множестве всех существенных семейств можно ввести отношение частичного порядка по включению, то есть $\sigma_1 \leq \sigma_2$ тогда и только тогда, когда $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ как подсемейство.

Лемма 4. *Пусть X — бесконечное множество мощности τ . Тогда на X найдется существенное семейство множеств σ подмножеств X такое, что $|\sigma| = 2^\tau$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Σ — множество всех существенных семейств подмножеств X , упорядоченных с указанным частичным порядком. Покажем, что в Σ существует максимальный элемент.

Рассмотрим $\xi = \{\sigma\}$ — произвольную цепь, состоящую из существенных семейств. Покажем, что в Σ для ξ существует мажорирующий элемент. Пусть $\hat{\sigma} = \bigcup\{\sigma : \sigma \in \xi\}$. Тогда $\hat{\sigma}$ также является существенным семейством. Действительно, пусть $A, B \in \hat{\sigma}$. Тогда найдутся $\sigma_1 \in \xi$ и $\sigma_2 \in \xi$ такие, что $A \in \sigma_1$ и $B \in \sigma_2$. Так как σ_1 и σ_2 есть элементы цепи ξ , то они сравнимы. Пусть для определенности $\sigma_1 \leq \sigma_2$, то есть $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$. Тогда $A, B \in \sigma_2$, и так как σ_2 существенно, то $A \Delta B$ бесконечно.

Очевидно, что для любого $\sigma \in \xi$ имеем $\sigma \leq \hat{\sigma}$, следовательно, существует мажорирующий элемент. Таким образом, каждая цепь из Σ имеет мажорирующий элемент, следовательно, по принципу максимального элемента во всем множестве Σ найдется максимальный элемент.

Пусть $\exp X$ — множество всех подмножеств множества X . Рассмотрим максимальный элемент $\sigma_0 \in \Sigma$. Тогда $\exp X \setminus \sigma_0$ состоит только из множеств A , для которых найдется $U \in \sigma_0$ такое, что $A \Delta U$ конечно. В противном случае $A \cup \sigma_0$ — существенное семейство и $\sigma_0 \subseteq A \cup \sigma_0$, что противоречит максимальнойности σ_0 .

Для каждого $U \in \sigma_0$ рассмотрим семейство $\lambda_U = \{A \subseteq X : A \Delta U \text{ конечно}\}$. Всякое $A \in \lambda_U$ получается из U вычитанием или добавлением конечного множества точек из X . Следовательно, $|\lambda_U| = \tau$. Таким образом, $\exp X = \sigma_0 \cup \bigcup\{\lambda_U : U \in \sigma_0\}$. Получаем, что $|\bigcup\{\lambda_U : U \in \sigma_0\}| = |\sigma_0| \cdot \tau$. Отсюда следует, что $2^\tau = |\exp X| = |\sigma_0| \cdot \tau$. Значит, $|\sigma_0| = 2^\tau$. $\square$

Из лемм 3 и 4 вытекает следующая

Теорема 1. *На множестве X мощности τ существует 2^τ попарно несравнимых наследственно компактных T_1 -топологий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 4 на множестве X найдется существенное семейство множеств σ такое, что $|\sigma| = 2^\tau$. По лемме 3 для любых $A, B \in \sigma$ получаем, что топологии τ_A и τ_B несравнимы. $\square$

Замечание 1. В максимальном существенном семействе подмножеств бесконечного множества X существует единственное конечное множество и существует единственное множество вида $X \setminus K$, где K конечно.

Заметим также, что для любого $A \in \tau_m$ имеем $\tau_A = \tau_m$.

Теорема 2. *Пусть σ_0 — максимальное существенное семейство подмножеств бесконечного множества X , $T = \{\tau_A : A \subseteq X\}$ — семейство всех τ_A -топологий на множестве X . Тогда*

- (1) *для любых двух множеств $A, B \in \sigma_0 \setminus \tau_m$ не существует топологии $\tau_C \in T$ мажорирующей топологии τ_A и τ_B ;*
- (2) *для всякого множества $A \in \exp X \setminus (\sigma_0 \cup \tau_m)$ существует единственное $B \in \sigma_0 \setminus \tau_m$ такое, что для τ_A и τ_B есть мажоранта $\tau_C \in T$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть $A, B \in \sigma_0 \setminus \tau_m$. Предположим, что существует $C \subseteq X$ такое, что $\tau_A \subseteq \tau_C$ и $\tau_B \subseteq \tau_C$. Тогда $A, B \in \tau_C$, следовательно, они получаются из C выбрасыванием конечных множеств. Но это противоречит тому, что $A \Delta B$ бесконечно.

(2) Пусть $A \in \exp X \setminus (\sigma_0 \cup \tau_m)$. В силу максимальнойности семейства σ_0 найдется $B \in \sigma_0$ такое, что $A \Delta B$ конечно. Тогда $\tau_A \subseteq \tau_{A \cup B}$ и $\tau_B \subseteq \tau_{A \cup B}$.

Докажем единственность B . Предположим, что существует $C \in \sigma_0$, $C \neq B$, такое, что для A и C найдется $D \in \exp X$ такое, что $\tau_A \subseteq \tau_D$ и $\tau_C \subseteq \tau_D$. Тогда A и C получаются из D выбрасыванием конечного числа точек, следовательно, $A \Delta C$ конечно. При этом $A \Delta B$ конечно. Тогда $A \Delta B$ конечно, что противоречит тому, что A и B существенно различны. $\square$

Теорема 3. *Топология, мажорирующая все наследственно компактные T_1 -топологии на множестве X , является дискретной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое множество $A \subseteq X$ порождает соответственно топологию τ_A . В топологии τ_A множество A открыто.

Рассмотрим семейство $\sigma = \{\tau_A : A \subseteq X\}$. Мажорантой семейства σ будет топология τ_σ такая, что $\tau_A \subseteq \tau_\sigma$ для любого $A \subseteq X$. Следовательно, в топологии τ_σ любое множество $A \subseteq X$ будет открыто, а значит, τ_σ — дискретная топология. $\square$

§ 3. Свойства наследственно компактных пространств

Наряду с известным критерием о том, что пространство компактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение, получена

Теорема 4. *Пространство X наследственно компактно тогда и только тогда, когда для любой центрированной системы замкнутых множеств $\gamma = \{F\}$ найдется конечная подсистема $\gamma' \subseteq \gamma$ такая, что $\bigcap\{F : F \in \gamma'\} = \bigcap\{F : F \in \gamma\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X наследственно компактно. Рассмотрим произвольную центрированную систему замкнутых множеств $\gamma = \{F\}$. Тогда $\lambda = \{U_F = X \setminus F : F \in \gamma\}$ — семейство открытых множеств. В силу леммы 1 существует конечное подсемейство $\lambda' \subseteq \lambda$ такое, что $\bigcup\{U_F : U_F \in \lambda'\} = \bigcup\{U_F : U_F \in \lambda\}$. Обозначим систему множеств F таких, что $U_F \in \lambda'$ через γ' . Тогда $\bigcup\{U_F : U_F \in \lambda'\} = \bigcup\{X \setminus F : F \in \gamma'\} = X \setminus \bigcap\{F : F \in \gamma'\}$ и $\bigcup\{U_F : U_F \in \lambda\} = X \setminus \bigcap\{F : F \in \gamma\}$. Тогда $\bigcap\{F : F \in \gamma\} = \bigcap\{F : F \in \gamma'\}$, следовательно, $\{F : F \in \gamma'\}$ — искомое конечное подсемейство системы γ .

Предположим, что для любой центрированной системы замкнутых множеств $\gamma = \{F\}$ найдется конечная подсистема $\gamma' \subseteq \gamma$ такая, что $\bigcap\{F : F \in \gamma'\} = \bigcap\{F : F \in \gamma\}$. Докажем, что X наследственно компактно.

Пусть $\lambda = \{U\}$ — произвольное семейство открытых множеств. Докажем, что существует конечное подсемейство $\lambda' \subseteq \lambda$ такое, что $\bigcup\{U : U \in \lambda'\} = \bigcup\{U : U \in \lambda\}$. Предположим противное, пусть из семейства λ нельзя выделить такого конечного подсемейства.

Рассмотрим систему множеств $\gamma = \{F_U = X \setminus U : U \in \lambda\}$. Тогда, в силу нашего предположения, система γ центрирована и состоит из замкнутых множеств. Следовательно, найдется конечная подсистема $\gamma' \subseteq \gamma$ такая, что $\bigcap\{F_U : F_U \in \gamma'\} = \bigcap\{F_U : F_U \in \gamma\}$. Тогда $\lambda' = \{U = X \setminus F_U : F_U \in \gamma'\} \subseteq \lambda$ — конечное подсемейство λ такое, что $\bigcup\{U : U \in \lambda'\} = \bigcup\{U : U \in \lambda\}$. Получаем противоречие с предположением, что из семейства λ нельзя выделить такого конечного подсемейства. В силу леммы 1 пространство X является наследственно компактным. $\square$

Следующая теорема показывает связь произвольного наследственно компактного пространства и минимального T_1 -пространства.

Теорема 5. *Пространство X наследственно компактно тогда и только тогда, когда в любом бесконечном подмножестве $A \subseteq X$ есть бесконечное T_1 -минимальное подпространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X — наследственно компактно. Предположим, что существует бесконечное $A \subseteq X$ такое, что в A нет бесконечного подпространства с минимальной T_1 -топологией.

Построим систему открытых множеств $\{U_i : i \in \omega\}$ такую, что для любого $n \in \omega$ выполнены следующие условия:

- (1) $A \setminus \{U_i : i \leq n\}$ бесконечно;
- (2) $U_{n+1} \setminus \{U_i : i \leq n\} \neq \emptyset$.

Из нашего предположения следует, что A как подпространство пространства X не является минимальным T_1 -пространством. Следовательно, найдется открытое в X множество U_0 такое, что $A \setminus U_0$ бесконечно.

Пусть для $n \in \omega$ построено семейство $\{U_i : i \leq n\}$, удовлетворяющее условиям (1), (2). Построим множество U_{n+1} . По нашему предположению, $X' = A \setminus \{U_i : i \leq n\}$ бесконечно и не

является минимальным T_1 -пространством. Следовательно, найдется открытое в X множество U такое, что $U \cap X' \neq \emptyset$ и $X' \setminus U$ бесконечно. Положим $U_{n+1} = U$. Проводя индукцию по всем $n \in \omega$, получим систему открытых множеств $\gamma = \{U_i : i \in \omega\}$, удовлетворяющую условиям (1), (2).

Из построения системы γ для каждого $n \in \omega$ имеем, что $\bigcup_{i \leq n} U_i \neq \bigcup_{i \in \omega} U_i$ и $U_{n+1} \setminus \bigcup_{i \leq n} U_i \neq \emptyset$. Тогда из системы γ нельзя выделить конечной подсистемы γ' такой, что $\bigcup \{U_i : U_i \in \gamma'\} = \bigcup \{U_i : U_i \in \gamma\}$. Следовательно, в силу леммы 1 X не является наследственно компактным, что противоречит условию теоремы. Тогда в любом бесконечном подмножестве $A \subseteq X$ есть бесконечное T_1 -минимальное подпространство.

Пусть в любом бесконечном подмножестве $A \subseteq X$ есть бесконечное T_1 -минимальное подпространство. Докажем, что X наследственно компактно.

Предположим противное, пусть существует не компактное подпространство $A \subseteq X$. Построим последовательность $\{x_i \in A : i \in \omega\}$ и систему открытых множеств $\{U_i : i \in \omega\}$ такие, что

- (1) $x_i \in U_i$;
- (2) $A \setminus \bigcup \{U_i : i \leq n\}$ бесконечно для любого $n \in \omega$;
- (3) $x_n \notin \bigcup \{U_i : i < n\}$.

Пусть $\gamma = \{U_i\}$ — открытое покрытие A , из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Пусть $x_0 \in A$ — произвольная точка. Так как γ — покрытие, то найдется множество $U_0 \in \gamma$ такое, что $x_0 \in U_0$. В силу нашего предположения о γ следует, что $A \setminus U_0$ — бесконечно.

Пусть построены $\{x_i : i < n\}$ и $\{U_i : i < n\}$. Строим x_n и U_n по следующему правилу: $A \setminus \bigcup \{U_i : i < n\}$ бесконечно, значит, найдется $x_n \in A \setminus \bigcup \{U_i : i < n\}$. Так как γ — покрытие A , то найдется $U \in \gamma$ такое, что $x_n \in U$. Обозначим это U через U_n . Проводя индукцию для всех $n \in \omega$, получаем последовательность $\{x_i \in A : i \in \omega\}$ и систему открытых множеств $\{U_i : i \in \omega\}$, удовлетворяющие условиям (1)–(3).

Обозначим $F = \{x_i \in A : i \in \omega\}$. Покажем, что в F нет бесконечного минимального T_1 -подпространства. Рассмотрим произвольное бесконечное $F' \subseteq F$. Зафиксируем $n_0 \in \omega$ и рассмотрим подмножество $F'' = \{x_n \in F' : n \leq n_0\}$. Но $F'' = F' \cap (\bigcup_{i \leq n_0} U_i)$ является открытым и конечным подмножеством F' . Следовательно, в F нет бесконечного минимального T_1 -пространства, так как в нем открыты только бесконечные подмножества, являющиеся дополнениями до конечных подмножеств. Получаем противоречие, что существует не компактное подпространство $A \subseteq X$. Следовательно, X наследственно компактно. $\square$

В следующих теоремах рассматривается свойство сохранения наследственной компактности при произведениях пространств. Нам потребуется

Лемма 5 (Дж. Александер, см. [5, с. 39–40]). *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда выделение конечного подпокрытия допускает каждое покрытие, составленное из элементов предбазы его топологии.*

Теорема 6. *Тихоновское произведение конечного числа наследственно компактных T_1 -пространств является наследственно компактным T_1 -пространством.*

Доказательство. Пусть $X = \prod_{i=1}^n X_i$ — тихоновское произведение и X_i — наследственно компактное пространство для каждого $i \leq n$. Для доказательства теоремы воспользуемся леммой Александера. Рассмотрим предбазу тихоновской топологии $B = \{W = \pi_i^{-1}(U) : U \text{ открыто в } X_i\}$, составленную из прообразов открытых подмножеств пространств X_i .

Пусть $A \subseteq X$ — произвольное подмножество тихоновского произведения. Тогда семейство $B_A = \{W \cap A : W \in B\}$ является предбазой топологии подпространства A .

Пусть $\lambda = \{W\}$ — произвольное открытое покрытие множества A элементами предбазы B . Покажем, что из λ можно выделить конечное подпокрытие.

Всякое множество $W \in \lambda$ имеет вид $W = \pi_i^{-1}(U)$, где U — открытое подмножество X_i . Для каждого $W \in \lambda$ найдется номер i такой, что $W = \pi_i^{-1}(\pi_i(W))$. Обозначим такой номер через $i(W)$. Для всех $i \leq n$ пусть $\lambda_i = \{W \in \lambda : i(W) = i\}$.

Рассмотрим $\hat{\lambda}_i = \{\pi_i(W) : W \in \lambda_i\}$ — систему открытых в X_i множеств. Так как X_i наследственно компактно, то в силу леммы 1 найдется конечная подсистема $\hat{\lambda}'_i = \{\pi_i(W_j)\}_{j \leq k_i}$ такая, что $\bigcup_{j \leq k_i} \pi_i(W_j) = \bigcup \{\pi_i(W) : W \in \lambda_i\}$. Обозначим $\lambda'_i = \{W_j = \pi_i^{-1}(\pi_i(W))\}_{j \leq k_i} = \{W_j\}_{j \leq k_i}$.

Пусть $O_i = \bigcup \{W_j : W_j \in \lambda'_i\}$. Пусть $x \in A$. Тогда найдется $W \in \lambda$ такое, что $x \in W$. Но $W \in \lambda_i$ для некоторого i , следовательно, $x \in O_i = \bigcup \{W_j : W_j \in \lambda'_i\}$. Таким образом, $\bigcup_{i \leq n} \lambda'_i$ и является искомым конечным подпокрытием покрытия λ .

Тогда по лемме 5 A компактно, следовательно, X наследственно компактно. $\square$

Следующая теорема отвечает на вопрос, сохраняется ли наследственная компактность при бесконечном числе сомножителей в произведении.

Теорема 7. *Тихоновское произведение бесконечного числа неодноточечных наследственно компактных T_1 -пространств не является наследственно компактным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $(x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ тихоновского произведения. Тогда $X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}$ — открытое множество в X_α для каждого $\alpha \in A$. Следовательно, $\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\})$ — открытое множество в $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Тогда система $\gamma = \{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}) : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus (x_\alpha)$, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия.

Действительно, рассмотрим произвольное конечное подпокрытие $\gamma' = \{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}) : \alpha \in A', A' \subseteq A \text{ конечно}\}$. Тогда

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \setminus \bigcup \{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}) : \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}) \in \gamma'\} = \{(y_\alpha) : y_\alpha = x_\alpha, \alpha \in A'\},$$

следовательно, γ' не является подпокрытием γ . Тогда $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ не является наследственно компактным пространством. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. de Groot Y. An isomorphism principle in general topology // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73. № 3. P. 465–467.
2. Архангельский А.В. Отображения и пространства // Успехи математических наук. 1966. Т. 21. № 4. С. 133–183.
3. Архангельский А.В., Пономарёв В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424 с.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
5. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. 2-е изд. М.: Физматлит, 2006. 336 с.

Воронов Михаил Евгеньевич, студент, кафедра алгебры и топологии, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: mevoronov@gmail.com

M. E. Voronov
On compact T_1 -spaces

Keywords: compactness, minimal T_1 -topology, Tychonoff product.

Mathematical Subject Classifications: 54D10, 54D30

We consider spaces, any subspaces of which are compact. We call such spaces hereditarily compact. The present work covers questions on the existence and methods of constructing hereditarily compact T_1 -topologies. We prove the existence of 2^τ pairwise incomparable hereditarily compact T_1 -topologies on an infinite set X of power τ . The characteristics of hereditarily compact spaces are obtained. It is proved that the Tychonoff product of a finite number of hereditarily compact T_1 -spaces is a hereditarily compact T_1 -space, but the Tychonoff product of an infinite number of nonsingleton hereditarily compact T_1 -spaces is not hereditarily compact.

REFERENCES

1. de Groot Y. An isomorphism principle in general topology, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 73, no. 3, pp. 465–467.
2. Arkhangel'skii A.V. Maps and spaces, *Usp. Mat. Nauk*, 1966, vol. 21, no. 4, pp. 133–183.
3. Arkhangel'skii A.V., Ponomarev V.I. *Osnovy obshchei topologii v zadachakh i uprazhneniyakh* (Fundamentals of general topology through problems and exercises), Moscow: Nauka, 1974, 424 p.
4. Engelking R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 752 p.
5. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Basic design), Moscow: Fizmatlit, 2006, 336 p.

Received 22.07.2013

Voronov Mikhail Evgen'evich, student, Department of Algebra and Topology, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: mevoronov@gmail.com