Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. S. Sharipov, On the group of isometries of foliated manifold, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, Issue 1, 118–122

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.187.69

April 26, 2023, 15:08:55

УДК 514.3

© А. С. Шарипов

О ГРУППЕ ИЗОМЕТРИЙ СЛОЕНОГО МНОГООБРАЗИЯ¹

Пусть M — гладкое многообразие с римановой метрикой g . Вопрос о группе изометрий риманова многообразия (M, g) является основной классической задачей римановой геометрии. Обозначим через G группу всех изометрий риманова многообразия (M, g) размерности n с римановой метрикой g . Структура группы G зависит от фиксированной римановой метрики g . Известно, что для «плохих» римановых метрик группа G может быть очень бедной. Известны примеры, когда группа G состоит из одного элемента. В общем случае известно, что группа G с компактно-открытой топологией является группой Ли.

В данной статье обсуждается вопрос о существовании изометрических отображений слоеного многообразия (M, F) . Обозначим через G_F группу всех изометрий слоеного риманова многообразия (M, F) . Структура группы G_F зависит не только от римановой метрики g , но и от данной слоеной структуры. Изучение структуры группы G_F слоеного многообразия (M, F) является новой и интересной задачей. Впервые эта задача рассмотрена в работе А. Я. Нарманова и автора, где было показано, что группа G_F с компактно-открытой топологией является топологической группой.

В работе доказывается, что группа изометрий слоеного евклидова пространства является подгруппой группы изометрий евклидова пространства (то есть $G_F \subset G$), если слоение порождено поверхностями уровня гладкой функции, которая не является метрической.

Ключевые слова: риманово многообразие, слоение, изометрическое отображение, слоеное многообразие, группа изометрий, метрическая функция.

Пусть M, N — гладкие многообразия размерности n , на которых заданы k -мерные слоения F_1, F_2 соответственно. Если для некоторого диффеоморфизма $\phi: M \rightarrow N$ образ $\phi(L_\alpha)$ каждого слоя L_α слоения F_1 является слоем слоения F_2 , то отображение ϕ называется диффеоморфизмом слоеных многообразий $(M, F_1), (N, F_2)$ и записывается в виде $\phi: (M, F_1) \rightarrow (N, F_2)$. Если $M = N$ и $F_1 = F_2$, то ϕ называется диффеоморфизмом, сохраняющим слоение F (диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F)). Диффеоморфизмы, сохраняющие слоение, изучены в работах [1, 2].

Пусть M — гладкое риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g , на котором задано слоение F размерности k . Обозначим через $L(p)$ слой слоения F , проходящий через точку p , через $F(p)$ — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p , а через $H(p)$ — ортогональное дополнение $F(p)$ в $T_p M$. Возникают два подрасслоения $TF = \{F(p): p \in M\}$, $H = \{H(p): p \in M\}$ касательного расслоения TM такие, что $TM = TF \oplus H$. Каждое векторное поле X разложимо в виде $X = X^h \oplus X^v$, где $X^h \in H$, $X^v \in TF$. Векторное поле X называется горизонтальным (вертикальным), если составляющий $X^v = 0$ ($X^h = 0$).

Сужение римановой метрики g на $F(p)$ для всех точек $p \in L_0$ определяет риманову метрику на слое L_0 . Таким образом, каждое слоение F является римановым многообразием относительно индуцированной метрики.

Определение 1. Диффеоморфизм $\phi: (M, F) \rightarrow (M, F)$ называется изометрией слоеного многообразия (M, F) , если сужение отображения ϕ на каждый слой слоения F является изометрическим отображением, то есть для каждого слоя L_α отображение $\phi: L_\alpha \rightarrow \phi(L_\alpha)$ является изометрией между многообразиями $L_\alpha, \phi(L_\alpha)$.

Напомним, что дифференцируемое отображение $f: M \rightarrow B$ максимального ранга, где M, B — гладкие многообразия размерности n, m соответственно, $n > m$, называется субмер-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке МВССО Республики Узбекистан (грант по фундаментальным наукам ОТФ-01-04 «Геометрия и топология слоеных многообразий»).

сией. По теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $f^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = n - m$. Таким образом, субмерсия $f: M \rightarrow B$ порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M , слоями которого являются подмногообразия $L_p = f^{-1}(p)$, $p \in B$. Изучению геометрии и топологии слоений, порожденных субмерсиями, посвящены многочисленные исследования [3, 4], в частности, в работе [5] получены фундаментальные уравнения субмерсии.

В случае когда слоение порождено субмерсией $f: M \rightarrow B$, подпространство $T_q F$ совпадает с подпространством $\text{Ker } df_q$ касательного пространства $T_q M$, где df_q — дифференциал отображения f в точке q .

Перейдем к изучению геометрии субмерсий, когда многообразие B одномерно.

Пусть $f: M \rightarrow R$ — дифференцируемая функция, $\text{Crit } f$ — множество критических точек функции f . Тогда на многообразии $M \setminus \text{Crit } f$ возникают слоение F размерности $n - 1$ (или коразмерности один). Без ограничения общности предположим, что множество $\text{Crit } f$ пусто.

В работе [4] изучена геометрия слоения F , когда для каждого вертикального векторного поля X выполнено условие $X(|\text{grad } f|^2) = 0$, то есть когда длина градиентного векторного поля постоянна на каждом слое (на каждой поверхности уровня). В частности, показано, что при выполнении условия $X(|\text{grad } f|^2) = 0$ слоение F является римановым.

Напомним, что слоение F называется римановым, если геодезическая, ортогональная к слою слоения F в одной точке, остается ортогональной к слоению F во всех точках [4].

Мы рассмотрим вопрос о структуре группы G_F , когда $M = R^n$ и слоение F порождено компонентами связности поверхностей уровня некоторой гладкой функции $f: R^n \rightarrow R$.

Изучение структуры группы G_F слоеного многообразия (M, F) является новой и интересной задачей. Впервые эта задача рассмотрена в работе [2]. В работе [2] доказывается, что группа G_F с компактно-открытой топологией является топологической группой.

Определение 2. Пусть M — гладкое многообразие размерности n . Функция $f: M \rightarrow R^1$ из класса $C^2(M, R^1)$, длина градиента которой постоянна на компонентах связности множеств уровня, называется метрической функцией.

Теорема 1. Пусть F — слоение евклидова пространства R^n , порожденное поверхностями уровня функции $f: R^n \rightarrow R^1$, которая не является метрической функцией. Тогда группа G_F является подгруппой группы G .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\phi: (R^n, F) \rightarrow (R^n, F)$ — изометрическое отображение слоеного евклидова пространства R^n , где слоение F порождено поверхностями уровня функции f .

Для значения c функции f обозначим через L_c поверхность уровня, определяемую уравнением $f = c$, через Z — единичное градиентное векторное поле функции f . Матрицу Якоби в точке $p \in R^n$ отображения $\phi: R^n \rightarrow R^n$ обозначим через $B(p) = \{b_i^j\}$.

Покажем, что диффеоморфизм $\phi: R^n \rightarrow R^n$ является движением R^n . Пусть $p_0 \in R^n$, $\phi(p_0) = q_0$. Отображение $\phi: R^n \rightarrow R^n$ является изометрией между поверхностями L_{c_1} , L_{c_2} , где $f(p_0) = c_1$, $f(q_0) = c_2$.

Фиксируем ортонормированный базис $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ касательного пространства $T_{p_0} L_{c_1}$ поверхности L_{c_1} , а в пространстве фиксируем ортонормированный базис $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, Z(p_0)$. Положим $Y_i = B(p_0) X_i$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$. Тогда семейство $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ является ортонормированным базисом касательного пространства $T_{q_0} L_{c_2}$ поверхности L_{c_2} .

Пусть $A(p_0) = \{a_i^j\}$ — матрица Якоби в точке $p_0 \in R^n$ движения $F: R^n \rightarrow R^n$, которое переводит точку p_0 в точку q_0 , а ортонормированный базис $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, Z(p_0)$ в ортонормированный базис $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, Z(q_0)$. Мы имеем равенства

$$A(p_0) X_i = Y_i, \quad A(p_0) Z(p_0) = Z(q_0). \quad (1)$$

Так как отображение $\phi: R^n \rightarrow R^n$ переводит касательные векторы в касательные и сужение $\phi: L_{c_1} \rightarrow L_{c_2}$ является изометрией, вектор $B(p_0) Z(p_0)$ параллелен вектору $Z(q_0)$, то есть

существует ненулевое число $\lambda(p_0)$ такое, что имеет место $B(p_0)Z(p_0) = \lambda(p_0)Z(q_0)$. Таким образом, мы имеем систему равенств

$$B(p_0)X_i = Y_i, \quad B(p_0)Z(p_0) = \lambda(p_0)Z(q_0). \quad (2)$$

Система равенств (1) состоит из n^2 равенств. Если известны векторы $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, Z(p_0)$ и векторы $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, Z(q_0)$, то систему (1) можно рассмотреть как систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\{a_i^j\}$. Так как векторы $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, Z(p_0)$ линейно независимы, система (1) имеет единственное решение. Если систему (2) перепишем в виде

$$B(p_0)X_i = Y_i, \quad \frac{1}{\lambda(p_0)}B(p_0)Z(p_0) = Z(q_0), \quad (3)$$

то основной определитель системы (3) получается умножением последней строки основного определителя системы (1) на $\frac{1}{\lambda(p_0)}$. В системе (1) и системе (3) напомним равенства только для первых координат векторов правой и левой частей и получим систему уравнений для $a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n$ и $b_1^1, b_1^2, \dots, b_1^n$:

$$\sum_{k=1}^n a_1^k x_i^k = y_i^1, \quad \sum_{k=1}^n a_1^k z^k = z^1, \quad \sum_{k=1}^n b_1^k x_i^k = y_i^1, \quad \sum_{k=1}^n \mu b_1^k z^k = z^1,$$

где $\mu = \frac{1}{\lambda}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Так как векторы $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, Z(p_0)$ — единичные базисные векторы, из этих систем мы получим, что $b_n^n = \lambda(p_0)a_n^n$, а остальные элементы матрицы $B(p_0) = \{b_i^j\}$ совпадают с соответствующими элементами матрицы $A(p_0) = \{a_i^j\}$.

Теперь рассмотрим другую точку $p \in R^n$ и такой ортонормированный базис $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ касательного пространства $T_p L_c$ поверхности L_c ($f(p) = c$), что ортонормированный базис $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, Z(p)$ пространства имеет такую же ориентацию, что и базис $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, Z(p_0)$.

Положим $W_i = B(p)U_i$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$. Тогда семейство $W_1, W_2, \dots, W_{n-1}$ является ортонормированным базисом касательного пространства $T_q L_{c^*}$ поверхности L_{c^*} , где $q = \phi(p)$, $f(p) = c^*$.

Пусть $A(p) = \{a_i^j\}$ — матрица Якоби в точке $p \in R^n$ движения $F: R^n \rightarrow R^n$, которое переводит точку p в точку q , а ортонормированный базис $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, Z(p)$ в ортонормированный базис $W_1, W_2, \dots, W_{n-1}, Z(q)$.

Мы имеем равенства

$$A(p)U_i = W_i, \quad A(p)Z(p) = Z(q). \quad (4)$$

Как и выше, получим систему равенств

$$B(p)U_i = W_i, \quad B(p)Z(p) = \lambda(p)Z(q). \quad (5)$$

Если касательный вектор $Z(p)$ параллелен $Z(p_0)$, то базисные векторы $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ линейно выражаются через векторы $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$. В этом случае матрицы $A(p)$, $B(p)$ и скалярная величина $\lambda(p)$ совпадают с матрицами $A(p_0)$, $B(p_0)$ и величиной $\lambda(p_0)$ соответственно.

Предположим, что касательный вектор $Z(p)$ не параллелен $Z(p_0)$. В этом случае касательная плоскость $T_p L_c$ не параллельна плоскости $T_{p_0} L_{c_1}$, и, следовательно, векторы $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ не выражаются через векторы $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$. Поэтому из систем (3) и (4) получим, что $\lambda(p) = 1$.

Таким образом, возникают две возможные ситуации:

- а) единичный градиентный вектор $Z(p)$ параллелен $Z(p_0)$ и $\lambda(p) \neq 1$;
- б) единичный градиентный вектор $Z(p)$ не параллелен $Z(p_0)$ и $\lambda(p) = 1$.

Обозначим через G множество точек $p \in R^n$, для которых $\lambda(p) \neq 1$. Это множество является открытым в силу непрерывности функции $\lambda(p)$.

С другой стороны, множество G совпадает с множеством точек $p \in R^n$, для которых вектор $Z(p)$ параллелен $Z(p_0)$ и в силу непрерывности функции $Z(p)$ является замкнутым множеством. Таким образом, множество G одновременно является открытым и замкнутым множеством. Поэтому в силу связности пространства R^n множество G либо пусто, либо совпадает с R^n .

Предположим, что G совпадает с R^n . Тогда всюду вектор $Z(p)$ параллелен $Z(p_0)$ и, следовательно, градиентные линии являются параллельными прямыми.

Покажем, что в этом случае функция f является метрической функцией. Для этого положим $W = \text{grad } f$. Покажем, что $|W|$ постоянна вдоль кривых, лежащих на поверхностях уровня.

Пусть γ — кривая, лежащая на поверхности уровня, параметризованная уравнениями $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Так как $f \in C^2(R^n, R^1)$, имеет место равенство $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$. Вычислим $\frac{d}{dt} f_{x_i} = \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j} x'_j = \sum_{j=1}^n f_{x_j x_i} x'_j$. Из равенства $W = \text{grad } f = gZ(p_0)$ получим, что $f_{x_i} = ga_i$, где $Z(p_0) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, g — гладкая функция, равная длине вектора $\text{grad } f$. Таким образом, $\frac{d}{dt} f_{x_i} = \sum_{j=1}^n f_{x_j x_i} x'_j = \sum_{j=1}^n a_j x'_j \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$. Отсюда следует, что $\frac{d}{dt} \langle W, W \rangle = 2 \langle W, \frac{d}{dt} W \rangle = 0$. Таким образом, длина градиента $\text{grad } f$ постоянна на каждой поверхности уровня, то есть функция f является метрической.

Это противоречие показывает, что множество G пусто и для всех $p \in R^n$ имеет место $\lambda(p) = 1$. Это означает, что для всех $p \in R^n$ матрица Якоби $B(p_0) = \{b_i^j\}$ отображения $\phi: R^n \rightarrow R^n$ совпадает с ортогональной матрицей.

Таким образом, мы показали, что отображение $\phi: R^n \rightarrow R^n$ является изометрией евклидова пространства R^n . $\square$

Замечание 1. Как показывают примеры, для метрических функций теорема не верна.

Замечание 2. В общем случае известно, что группа G с компактно-открытой топологией является группой Ли [6].

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n)$, заданную в евклидовом пространстве, где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — постоянные. Поверхности уровня этой функции порождают слоение F , состоящее из параллельных плоскостей. Отображение $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$, где $\lambda \neq 0$ — константа, является диффеоморфизмом слоеного многообразия (R^n, F) . Введем новую декартову систему координат $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ такую, что поверхности уровня этой функции задаются уравнениями $y_n = \text{const}$. Диффеоморфизм $\varphi: R^n \rightarrow R^n$, определенный формулой $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \lambda y_n)$ является изометрией слоеного многообразия (R^n, F) , но не является изометрией евклидова пространства.

Пример 2. Функция

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n$$

не является метрической. Поверхности уровня порождают слоение F , состоящее из параболоидов. Изометриями этого слоения являются только параллельные переносы вида $\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \lambda)$, которые являются изометриями евклидова пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамура И. Топология слоений. М.: Мир, 1979. 317 с.
2. Narmanov A., Sharipov A. On the group of foliation isometries // Methods of Functional Analysis and Topology. 2009. Vol. 15. P. 195–200.
3. Narmanov A., Kaypnazarova G. Metric functions on Riemannian manifolds // Uzbek. Math. J. 2010. № 2. P. 113–120.

4. Tondeur Ph. *Foliations on Riemannian manifolds*. New York: Springer-Verlag, 1988.
5. O'Neil B. The fundamental equations of a submersion // *Michigan Mathematical Journal*. 1966. Vol. 13. P. 459–469.
6. Myers S.B., Steenrod N. The group of isometries of a Riemannian manifold // *Ann. of Math.* 1939. Vol. 40. P. 400–416.

Поступила в редакцию 05.02.2014

Шарипов Анваржон Солиевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра геометрии, Национальный университет Узбекистана, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4.
E-mail: asharipov@inbox.ru

A. S. Sharipov

On the group of isometries of foliated manifold

Keywords: Riemannian manifold, foliation, isometric mapping, foliated manifold, the group of isometries, metric function.

Mathematical Subject Classifications: 53C12, 53C22

The question of the group of isometries of a Riemannian manifold is the main problem of the classical Riemannian geometry. Let G denote the group of isometries of a Riemannian manifold M of dimension n with a Riemannian metric g . It is known that the group G with the compact-open topology is a Lie group. This paper discusses the question of the existence of isometric maps of the foliated manifold (M, F) . We denote the group of all isometries of the foliated Riemannian manifold (M, F) by G_F . Studying the structure of the group G_F of the foliated manifold (M, F) is a new and interesting problem. First, this problem is considered in the paper of A. Y. Narmanov and the author, where it was shown that the group G_F with a compact-open topology is a topological group. We consider the question of the structure of the group G_F , where $M = \mathbb{R}^n$ and F is foliation generated by the connected components of the level surfaces of the smooth function $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. It is proved that the group of isometries of foliated Euclidean space is a subgroup of the isometry group of Euclidean space, if the foliation is generated by the level surfaces of a smooth function, which is not a metric.

REFERENCES

1. Tamura I. *Topology of foliations: an introduction*, American Mathematical Society, 1992, 193 p.
2. Narmanov A., Sharipov A. On the group of foliation isometries, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2009, vol. 15, pp. 195–200.
3. Narmanov A., Kaypnazarova G. Metric functions on Riemannian manifolds, *Uzbek. Math. J.*, 2010, no. 2, pp. 113–120.
4. Tondeur Ph. *Foliations on Riemannian manifolds*, New York: Springer-Verlag, 1988.
5. O'Neil B. The fundamental equations of a submersion, *Michigan Mathematical Journal*, 1966, vol. 13, pp. 459–469.
6. Myers S.B., Steenrod N. The group of isometries of a Riemannian manifold, *Ann. of Math.*, 1939, vol. 40, pp. 400–416.

Received 05.02.2014

Sharipov Anvarzhon Solievich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Geometry, National University of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
E-mail: asharipov@inbox.ru