Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. B. Ryashko, A. A. Sysolyatina, Analysis of stochastic dynamics in discrete-time macroeconomic Kaldor model, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, Volume 25, Issue 1, 60–70

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.162.27.143

April 26, 2023, 03:42:48

УДК 517.925, 519.216

© Л. Б. Ряшко, А. А. Сысолятина

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В ДИСКРЕТНОЙ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАЛДОРА

В статье рассматривается дискретная макроэкономическая модель Калдора со случайными возмущениями. Показано, что в детерминированном варианте у модели существуют различные режимы динамики: равновесия, циклы, инвариантные кривые, хаос. Дается параметрическое описание интервалов структурной устойчивости возможных режимов и соответствующих бифуркаций. Под действием стохастических возмущений вокруг детерминированных аттракторов формируются стационарные вероятностные распределения случайных состояний. Для описания разброса случайных состояний вокруг равновесий и циклов используется техника функций стохастической чувствительности и метод доверительных эллипсов. Исследована зависимость стохастической чувствительности от параметров системы. В статье обсуждаются эффекты, связанные с индуцированными шумом переходами между сосуществующими аттракторами модели.

Ключевые слова: дискретная модель Калдора, бизнес-циклы, случайные возмущения, функция стохастической чувствительности, индуцированные шумом переходы, доверительные эллипсы.

Введение

Данная работа посвящена изучению дискретной двумерной макроэкономической модели бизнес-циклов. Исходная модель с непрерывным временем была предложена Н. Калдором [1], где в качестве причин циклического развития экономики были указаны эндогенные факторы, задаваемые специфическими функциями инвестиций и сбережений. Н. Калдор исходил из того, что в коротком периоде объем инвестиций нелинейно зависит от величины реального национального дохода [2]. Модель в этих работах представляет собой первую эндогенную модель делового цикла. Математический анализ этой экономической модели впервые был проведен в работах Чанга, Смита [3] и Вэриана [4]. Модификации этой модели исследовались в [5].

Дискретная модель Калдора была предложена в работе [6], где были выявлены весьма разнообразные режимы детерминированной динамики и их бифуркации. Целью данной работы является систематическое параметрическое описание аттракторов детерминированной модели и их реакции на случайные возмущения.

Анализ воздействия случайных возмущений на аттракторы дискретных динамических систем привлекает внимание многих исследователей [7–9]. Строгое математическое описание динамики вероятностных распределений в дискретных системах со случайными возмущениями дается уравнением Перрона–Фробениуса [10]

Точное аналитическое решение этого функционального уравнения удалось пока получить лишь для весьма частных одномерных примеров. В этих обстоятельствах конструктивным выходом является разработка подходящих асимптотик и аппроксимаций. Для аппроксимации стохастических аттракторов дискретных нелинейных динамических систем в работах [11, 12] был предложен подход, использующий технику функций стохастической чувствительности.

В данной работе эта техника применяется к исследованию стохастической дискретной модели Калдора.

В разделе 1 дается параметрическое описание разных режимов динамики исходной детерминированной модели. Раздел 2 посвящен исследованию стохастической модели. Для анализа разброса случайных состояний вокруг равновесий и циклов используется техника функций стохастической чувствительности и метод доверительных эллипсов. В разделе 3 обсуждаются индуцированные шумом переходы между аттракторами модели.

§ 1. Аттракторы детерминированной системы

Рассматривается макроэкономическая дискретная модель Калдора

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= y_t + \alpha (I(y_t, k_t) - S(y_t)), \\ k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t + I(y_t, k_t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь y — национальный доход, k — капитал, а функции инвестиций $I(y, k)$ и сбережений $S(y)$ имеют вид [6]:

$$I(y, k) = -\gamma k + \arctan(y - \mu) + \sigma \mu \left(1 + \frac{\gamma}{\delta}\right), \quad S(y) = \sigma y.$$

Первое уравнение в системе (1) описывает динамику дохода, который увеличивается, когда инвестиции превышают сбережения, и уменьшается, когда инвестиции становятся меньше сбережений. Второе уравнение описывает рост фондового капитала. В системе есть параметр α , который определяет скорость регулирования агрегированного рынка капитала и потребительских товаров. Остальные параметры системы таковы: δ — норма амортизации основных фондов капитала, $0 < \delta < 1$; σ — склонность к сбережению, $0 < \sigma < 1$; γ — стоимость регулирования капитала до требуемого уровня, $\gamma > 0$; μ — ожидаемый уровень дохода, $\mu > 0$.

Координаты $\bar{y}$, $\bar{k}$ равновесия детерминированной модели (1) удовлетворяют системе:

$$\begin{aligned} y &= \mu + \frac{1}{\sigma(1 + \frac{\gamma}{\delta})} \arctan(y - \mu), \\ k &= \frac{\sigma}{\delta} y. \end{aligned} \quad (2)$$

В случае когда $\sigma > \frac{\delta}{\delta + \gamma}$, система имеет единственное положение равновесия $P\left(\mu, \sigma \frac{\mu}{\delta}\right)$. При $\sigma < \frac{\delta}{\delta + \gamma}$ система имеет три равновесия. Существование в системе единственного устойчивого положения равновесия P соответствует ситуации, когда национальный доход y_t стремится к ожидаемому уровню μ . В случае же трех положений равновесия национальный доход не может достичь ожидаемого уровня, так как положение равновесия P является неустойчивым. При этом появляются два других положения равновесия, симметричные относительно точки P .

В данной работе подробно исследуется случай, когда система (1) имеет единственное положение равновесия P . В уравнениях динамической системы зафиксированы параметры $\sigma = 0.8$, $\gamma = 0.6$, $\delta = 0.2$, $\mu = 10$. Оставшийся параметр α , задающий скорость адаптации, будет определять характер реализующегося в системе режима.

Устойчивость равновесий определяется из неравенств $|\lambda_{1,2}| < 1$, где λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы Якоби

$$F = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\sigma + \frac{\alpha}{1 + (y - \mu)^2} & -\alpha\gamma \\ \frac{1}{1 + (y - \mu)^2} & 1 - \delta - \gamma \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Зависимость аттракторов детерминированной системы (1) от параметра α представлена на рисунке 1. Здесь серым цветом показаны k — координаты точек, лежащих на аттракторах, а черным — значения старшего показателя Ляпунова Λ . Справа дан увеличенный фрагмент, относящийся к интервалу $2.5 < \alpha < 2.8$. Для хаотических аттракторов $\Lambda > 0$.

На интервале $0 < \alpha < 4.5$ данная система имеет как регулярные, так и хаотические аттракторы. Здесь можно выделить несколько характерных зон.

В зоне $0 < \alpha < 0.31$ система имеет единственное равновесие (устойчивый узел, рис. 2, а).

В зоне $0.31 < \alpha < 1.24$ это равновесие становится устойчивым фокусом (рис. 2, б). В точке $\alpha = 1.24$ происходит бифуркация Неймарка–Сакера [13, 14].

В зонах $1.24 < \alpha < 1.98$, $2.02 < \alpha < 2.35$, $2.355 < \alpha < 2.51$ наблюдаются замкнутые инвариантные кривые. По мере возрастания параметра α замкнутые кривые разрушаются и

Рис. 1. Аттракторы детерминированной системы (серый) и показатель Ляпунова (черный) при:
(а) $0 < \alpha < 4.5$; (б) $2.5 < \alpha < 2.8$

превращаются в дискретные циклы, которые в свою очередь трансформируются в инвариантные кривые (рис. 2, в).

В зоне $1.98 < \alpha < 2.02$ наблюдается устойчивый шестицикл, при $2.35 < \alpha < 2.355$ — два сосуществующих пятицикла. В зоне $2.65 < \alpha < 2.75$ (см. рис. 1 справа) система имеет два сосуществующих аттрактора. Один из этих аттракторов — устойчивый четырехцикл, а второй меняет свой характер по мере возрастания параметра. Это может быть кратный цикл или хаотическая кривая (рис. 2, г), которая отличается от замкнутой инвариантной кривой наличием «ушек» (рис. 2, д). В зависимости от положения начальной точки, решения притягиваются к тому или иному аттрактору.

В зоне $2.8 < \alpha < 3.335$ система имеет четырехцикл (см. рис. 1). При прохождении точки бифуркации $\alpha = 3.335$ траектория расщепляется на два устойчивых сосуществующих четырехцикла (рис. 2, е). После прохождения следующей точки бифуркации четырехциклы раздваиваются и образуют два сосуществующих восьмицикла (рис. 2, ж), которые в свою очередь удваиваются. В зоне $3.725 < \alpha < 3.74$ наблюдаются два сосуществующих шестнадцатцикла.

По мере прохождения бифуркационных значений картина усложняется, затем цикл теряет устойчивость и следует область хаоса (рис. 2, з). Аттракторы в этом случае начинают выглядеть как множества, состоящие из сплошных интервалов. В этой зоне видны и просветы, в которых можно наблюдать кратные циклы. На интервале $4.1 < \alpha < 4.3$ система имеет два сосуществующих цикла кратности три (рис. 2, и) с последующим удвоением периода.

§ 2. Стохастические аттракторы

Рассмотрим стохастическую систему

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= y_t + \alpha(-\gamma k_t + \arctan(y_t - \mu) + \sigma\mu(1 + \frac{\gamma}{\delta}) - \sigma y_t) + \varepsilon_1 \xi_{1,t}, \\ k_{t+1} &= (1 - \delta)k_t - \gamma k_t + \arctan(y_t - \mu) + \sigma\mu(1 + \frac{\gamma}{\delta}) + \varepsilon_2 \xi_{2,t}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\xi_{1,t}$, $\xi_{2,t}$ — последовательности независимых гауссовых случайных величин с параметрами $E\xi_{1,t} = E\xi_{2,t} = 0$, $E\xi_{1,t}^2 = E\xi_{2,t}^2 = 1$, $E\xi_{1,t}\xi_{2,t} = 0$, а ε_i — интенсивности шумов. Аттракторы стохастической системы при различной интенсивности $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ внешнего воздействия изображены на рисунке 3.

В присутствии стохастических возмущений случайные траектории системы (4) покидают детерминированные аттракторы, формируя стационарные распределения. В присутствии шума тонкая структура детерминированных аттракторов размывается.

Рис. 2. Аттракторы детерминированной системы при значении параметра: (а) $\alpha = 0.25$ — устойчивый узел; (б) $\alpha = 1$ — устойчивый фокус; (в) $\alpha = 1.4, \alpha = 1.7, \alpha = 2, \alpha = 2.3$ — непрерывные и дискретный циклы; (г, д) $\alpha = 2.7$ — сосуществующие четырехцикл и хаос; (е) $\alpha = 3$ — два сосуществующих устойчивых четырехцикла; (ж) $\alpha = 3.5$ — два сосуществующих восьмицикла; (з) $\alpha = 4$ — хаос; (и) $\alpha = 4.2$ — два сосуществующих трехцикла

Как видно из рисунка 3, разброс случайных состояний неоднороден. Характер разброса случайных состояний зависит от параметров системы. На рисунке 3, б наблюдается различие в разбросе случайных состояний вокруг точки равновесия, а также вокруг точек четырехцикла. В случае единственного положения равновесия дисперсия рассеивания на концах интервала структурной устойчивости увеличивается, а при приближении к середине — уменьшается. В случае четырехцикла средние ветки размываются сильнее крайних. Детальный анализ указанных особенностей зависимости разброса траекторий для различных точек аттрактора от параметра α может быть проведен с помощью техники функции стохастической чувствительности (см. Приложение).

На рисунке 4, а представлены графики элементов матрицы

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

стохастической чувствительности для равновесия P системы (1) в зависимости от параметра α .

Рис. 3. Аттракторы стохастической системы при различной интенсивности случайных возмущений:
(а) $\varepsilon = 0.001$; (б) $\varepsilon = 0.01$; (в) $\varepsilon = 0.05$

Собственные числа $\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)$ матрицы W изображены на рисунке 4, б.

Рис. 4. (а) элементы матрицы стохастической чувствительности W ; (б) собственные числа матрицы W

Как видно из рисунка 4, стохастическая чувствительность равновесия P на концах интервала структурной устойчивости неограниченно возрастает. Следует подчеркнуть различие в изменении собственных значений λ_i на этом интервале.

При увеличении интенсивности шума разброс случайных состояний системы вокруг равновесия P увеличивается. На рисунке 5 изображены случайные состояния системы и эллипсы рассеивания для различных значений параметра α . Можно проследить следующую закономерность: при увеличении разницы между величинами собственных чисел матрицы стохастической

чувствительности (рис. 4, б) зона рассеивания состояний системы становится более растянутой.

Рис. 5. Случайные состояния и эллипсы рассеивания вблизи равновесия при $P = 0.95$, $\varepsilon = 0.1$:
(а) $\alpha = 0.1$; (б) $\alpha = 0.5$; (в) $\alpha = 1.2$

Рассмотрим теперь стохастическое воздействие на четырехцикл в зоне $2.65 < \alpha < 3.335$. В данном случае, в силу симметрии расположения четырех состояний цикла (см. рис. 2, з) для соответствующих матриц стохастической чувствительности выполняются равенства $W_1 = W_3$, $W_2 = W_4$. На рисунках 6, а, в для матриц W_1, W_2 представлены графики элементов зависимости от параметра α . Собственные числа λ_1, λ_2 матриц W_1, W_2 изображены на рисунках 6, б, г.

Рис. 6. Стохастическая чувствительность четырехцикла: элементы матрицы стохастической чувствительности W (слева) и собственные числа матрицы W (справа): (а, б) для первого и третьего состояний; (в, г) для второго и четвертого состояний

На рисунке 7 изображены случайные состояния системы и эллипсы рассеивания.

Заметим, что увеличение параметра α сопровождается ростом стохастической чувствительности и, как следствие, увеличением разброса случайных состояний. Как видим, результаты расчетов с помощью техники функции стохастической чувствительности и метода доверительных эллипсов хорошо согласуются с данными прямого численного моделирования.

Рис. 7. Случайные состояния и эллипсы рассеивания в случае четырехцикла при $P = 0.95$, $\varepsilon = 0.1$:
(a) $\alpha = 2.8$; (б) $\alpha = 3.2$

§ 3. Индуцированные шумом переходы

Случай сосуществования двух аттракторов имеет особый интерес. Действительно, здесь при увеличении шума возникает возможность случайных переходов от одного аттрактора к другому.

Рассмотрим значение параметра $\alpha = 2.7$, при котором сосуществуют устойчивый четырехцикл и хаотическая кривая (рис. 2, з). Так, например, для начальных значений $(y_0, k_0) = (11.371, 43.158)$ решение сходится к устойчивому четырехциклу, а для $(y_0, k_0) = (10.001, 40.001)$ — к хаотической кривой. При добавлении случайных возмущений возможны переходы между бассейнами притяжения четырехцикла и хаотической траектории. Изменение интенсивности вносимого шума меняет разброс случайных состояний (рис. 8) вокруг аттракторов.

Рис. 8. Аттракторы детерминированной системы (черный) и случайные состояния системы (серый) при $\alpha = 2.7$, $0 < \varepsilon < 0.1$: (a) $(y_0, k_0) = (11.371, 43.158)$; (б) $(y_0, k_0) = (10.001, 40.001)$

На рисунке 8, а для различных значений интенсивности шума точками показаны k -координаты решения стохастической системы, стартующей с детерминированного четырехцикла. При малых шумах случайные состояния концентрируются вблизи точек детерминированного четырехцикла. При увеличении шума дисперсия увеличивается, случайные состояния покидают бассейн притяжения четырехцикла и продолжают свое движение уже вблизи хаотического аттрактора.

На рисунке 8, б показаны решения, стартующие с хаотического аттрактора. Здесь при малых шумах случайные состояния концентрируются вблизи точек этого детерминированного

аттрактора. При увеличении шума дисперсия увеличивается, случайные состояния переходят в бассейн притяжения четырехцикла. Дальнейший рост интенсивности шума порождает обратные переходы четырехцикл–хаотический аттрактор и так далее. В результате система, переключаясь между этими аттракторами, демонстрирует триггерный режим. На рисунке 9 изображены аттракторы детерминированной системы и случайные состояния системы при различных начальных значениях.

Рис. 9. Аттракторы детерминированной системы (черный) и случайные состояния системы (серый) при $\alpha = 2.7$: (а, б) $(y_0, k_0) = (11.371, 43.158)$; (в, г) $(y_0, k_0) = (10.001, 40.001)$

Заметим, что в случае когда исходное состояние системы принадлежит бассейну притяжения четырехцикла, дальнейшее ее поведение легко предсказуемо — базовые переменные (доход и капитал) выходят на фиксированный периодический режим. Если исходное состояние системы принадлежит бассейну притяжения хаотической кривой, то динамику системы сложно предугадать из-за высокой чувствительности к начальным условиям. Под действием шума возможен переход из хаотического режима к регулярному. Аппарат функции стохастической чувствительности позволяет найти пороговые значения шума и установить важные закономерности в колебаниях экономических переменных, важные для построения долгосрочных прогнозов.

§ 4. Приложение

Рассмотрим стохастическую дискретную систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (6)$$

где x — n -вектор, $f(x)$ — достаточно гладкая n -мерная вектор-функция, $\sigma(x)$ — $n \times m$ -матрица, ξ_t — m -мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами $E\xi_t = 0$, $E\xi_t\xi_t^\top = I$, $E\xi_t\xi_k^\top = 0$ ($t \neq k$), ε — скалярный параметр интенсивности шума.

Под действием шума вокруг аттракторов (равновесий и циклов) соответствующей детерминированной системы формируется стационарное вероятностное распределение. При малых шумах, для аппроксимации этого распределения вблизи аттракторов, в работе [12] предложен метод функции стохастической чувствительности.

Стохастическая чувствительность равновесия. Пусть детерминированная система имеет экспоненциально устойчивое равновесие $\bar{x} = f(\bar{x})$. Тогда матрица W стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$ является решением матричного уравнения [15]

$$W = FW F^\top + Q, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad Q = \sigma(\bar{x})\sigma^\top(\bar{x}). \quad (7)$$

С помощью этой матрицы W для стационарной плотности $p(x, \varepsilon)$ можно записать следующую аппроксимацию:

$$p(x, \varepsilon) \approx K \exp \left(-\frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{\varepsilon^2} \right).$$

Матрица W характеризует отклик системы на малые случайные возмущения и играет роль коэффициента стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$. Для ковариационной матрицы D случайных состояний вокруг равновесия $\bar{x}$ справедлива оценка: $D \approx \varepsilon^2 W$. Таким образом, зная матрицу стохастической чувствительности для вероятностного описания разброса случайных состояний, мы можем построить доверительные эллипсы.

Стохастическая чувствительность цикла. Пусть детерминированная система имеет экспоненциально устойчивый k -цикл $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$. Состояния этого цикла связаны соотношениями

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

Стохастическая чувствительность цикла в системе (6) задается последовательностью матриц $W_1, \dots, W_k$, где W_i — стохастическая чувствительность состояния $\bar{x}_i$.

Матрицы $W_1, \dots, W_k$ характеризуют отклик точек $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ цикла на малые случайные возмущения. Матрица W_1 является решением уравнения [12]

$$W_1 = BW_1B^\top + Q, \quad (8)$$

а остальные матрицы $W_2, \dots, W_k$ находятся рекуррентно:

$$W_{i+1} = F_i W_i F_i^\top + Q_i, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (9)$$

Здесь

$$F_i = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i), \quad Q_i = \sigma(\bar{x}_i)\sigma^\top(\bar{x}_i), \quad B = F_k \cdot \dots \cdot F_2 F_1, \\ Q = Q_k + F_k Q_{k-1} F_k^\top + \dots + F_k \cdot \dots \cdot F_2 Q_1 F_2^\top \cdot \dots \cdot F_k^\top.$$

Матрицы стохастической чувствительности могут быть использованы для построения доверительных эллипсов [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kaldor N. A model of the trade cycle // The Economics Journal. 1940. Vol. 50. № 197. P. 78–92.
2. Kaldor N. A model of economic growth // The Economic Journal. 1957. Vol. 67. № 268. P. 391–624.
3. Chang W.W., Smyth D.J. The existence and persistence of cycles in a non-linear model: Kaldor's 1940 model reexamined // The Review Economics Studies. 1971. Vol. 38. № 1. P. 37–44.
4. Varian H.R. Catastrophe theory and the business cycle // Economic Inquiry. 1979. Vol. 17. № 1. P. 14–28.

5. Gabisch G., Lorenz H.-W. Business cycle theory: a survey of methods and concepts. Second edition. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 248 p.
6. Bischi G.I., Dieci R., Rodano G., Saltari E. Multiple attractors and global bifurcations in a Kaldor-type business cycle model // Journal of Evolutionary Economics. 2001. № 11. P. 527–554.
7. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
8. Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A. Fluctuation and simple chaotic dynamics // Phys. Rep. 1982. Vol. 92. № 2. P. 45–82.
9. Lasota A., Mackey M.C. Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics. Second edition. New York: Springer-Verlag, 1994. Vol. 97. 474 p.
10. Аникин В.М., Голубенцев А.Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М.: Физматлит, 2007. 328 с.
11. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б., Цветков И.Н. Стохастическая чувствительность равновесий и циклов одномерных дискретных отображений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17. № 6. С. 74–85.
12. Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis. 2010. Vol. 17. P. 501–515.
13. Sacker R.J. On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. Report IMM–NYU 333. New York University, 1964.
14. Kuznetsov Yu.A. Elements of applied bifurcation theory. 3rd ed. New York: Springer, 2004. Vol. 112. 632 p.
15. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // Chaos. 2011. Vol. 21. № 21. P. 047514.
16. Bashkirtseva I., Ryashko L., Slepukhina E. Noise-induced oscillation bistability and transition to chaos in FitzHugh–Nagumo model // Fluctuation and Noise Letters. 2014. Vol. 13. № 1. P. 1450004.

Поступила в редакцию 15.01.2015

Ряшко Лев Борисович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математической физики, Институт математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: lev.ryashko@urfu.ru

Сысолятина Анна Аркадьевна, аспирант, ассистент, кафедра эконометрики и статистики, Высшая школа экономики и менеджмента, Уральский федеральный университет, 620083, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

E-mail: anna.sysolyatina@urfu.ru

L. B. Ryashko, A. A. Sysolyatina

Analysis of stochastic dynamics in discrete-time macroeconomic Kaldor model

Keywords: discrete Kaldor model, business cycles, random perturbations, stochastic sensitivity function, noise-induced transitions, confidence ellipses.

MSC: 39A28, 93E03

The article deals with discrete Kaldor macroeconomic model under the random disturbances. It is shown that in the deterministic version of the model, there are different regimes of dynamics: equilibria, cycles, invariant curves, and chaos. A parametric description of the intervals of structural stability is given for these regimes and the corresponding bifurcations. Under the influence of stochastic perturbations around the deterministic attractors, the stationary probability distributions of random states are formed. To describe the dispersion of random states around equilibria and cycles, the stochastic sensitivity functions technique and the method of confidence ellipses are used. A dependence of the stochastic sensitivity of the system from parameters is studied. The phenomena generated by noise-induced transitions between coexisting attractors are discussed.

REFERENCES

1. Kaldor N. A model of the trade cycle, *The Economics Journal*, 1940, vol. 50, no. 197, pp. 78–92.
2. Kaldor N. A model of economic growth, *The Economic Journal*, 1957, vol. 67, no. 268, pp. 391–624.
3. Chang W.W., Smyth D.J. The existence and persistence of cycles in a non-linear model: Kaldor's 1940 model reexamined, *The Review Economics Studies*, 1971, vol. 38, no. 1, pp. 37–44.
4. Varian H.R. Catastrophe theory and the business cycle, *Economic Inquiry*, 1979, vol. 17, no. 1, pp. 14–28.
5. Gabisch G., Lorenz H.-W. *Business cycle theory: a survey of methods and concepts*, Berlin: Springer-Verlag, 1989, 248 p.
6. Bischi G.I., Dieci R., Rodano G., Saltari E. Multiple attractors and global bifurcations in a Kaldor-type business cycle mode, *Journal of Evolutionary Economics*, 2001, no. 11, pp. 527–554.
7. Neimark Yu.I., Landa P.S. *Stokhasticheskie i khaoticheskie kolebaniya* (Stochastic and chaotic oscillations), Moscow: Nauka, 1987, 424 p.
8. Crutchfield J.P., Farmer J.D., Huberman B.A. Fluctuation and simple chaotic dynamics, *Phys. Rep.*, 1982, vol. 92, no. 2, pp. 45–82.
9. Lasota A., Mackey M.C. *Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamic*, New York: Springer-Verlag, 1994, vol. 97, 474 p.
10. Anikin V.M., Golubentsev A.F. *Analiticheskie modeli determinirovannogo khaosa* (Analytical models of deterministic chaos), Moscow: Fizmatlit, 2007, 328 p.
11. Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I. Stochastic sensitivity equilibria and cycles of one-dimensional discrete mappings, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Prikl. Nelinejn. Din.*, 2009, vol. 17, no. 6, pp. 74–85 (in Russian).
12. Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, 2010, vol. 17, pp. 501–515.
13. Sacker R. On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations, *Report IMM–NYU 333*, New York University, 1964.
14. Kuznetsov Yu.A. *Elements of applied bifurcation theory*, New York: Springer, 2004, vol. 112, 632 p.
15. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect, *Chaos*, 2011, vol. 21, no. 21, pp. 047514.
16. Bashkirtseva I., Ryashko L., Slepukhina E. Noise-induced oscillation bistability and transition to chaos in FitzHugh–Nagumo model, *Fluctuation and Noise Letters*, 2014, vol. 13, no. 1, pp. 1450004.

Received 15.01.2015

Ryashko Lev Borisovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Physics, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.

E-mail: lev.ryashko@urfu.ru

Sysolyatina Anna Arkad'evna, Post-graduate student, Department of Econometrics and Statistics, Graduate School of Economics and Management, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620083, Russia.

E-mail: anna.sysolyatina@urfu.ru