Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. N. Butakova, E. M. Sycheva, Wave diffraction on the surface of viscous liquid flowing around a circular cylinder, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, Volume 25, Issue 1, 101–106

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.237.59.107

April 26, 2023, 17:51:56

УДК 532.591

© Н. Н. Бутакова, Е. М. Сычева

**ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
ПРИ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА**

Рассматривается движение жидкости, вызванное взаимодействием набегающей гравитационной волны, распространяющейся по свободной поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости, с круговым цилиндром, имеющим вертикальные образующие. Нелинейная краевая задача, описывающая такое движение, сведена к задаче для вертикальной компоненты вектора скорости, которая представляется в виде суммы потенциальной и вихревой составляющей. Получено решение данной задачи для случая колебаний малой амплитуды. Проведено сравнение поля скоростей для вязкой и идеальной жидкости.

Ключевые слова: дифракция, вязкость, волновые движения жидкости.

Опорными элементами ряда морских гидротехнических сооружений служат сваи в виде вертикальных круговых цилиндров. К таким сооружениям относятся, например, причалы, эстакады, морские платформы и другие сооружения сквозного типа. Оградительные сооружения, предназначенные для защиты акватории порта от волнения, нередко являются сооружениями с вертикальной гранью. Поэтому вопросы о взаимодействии набегающих волн с такими преградами и об определении волнового режима на огражденных акваториях представляют не только теоретический, но и практический интерес.

Ряд задач, относящихся к этой проблеме, уже нашел отражение в литературе. Так, например, М. Д. Хаскиндом [1] представлено и проанализировано решение задачи о дифракции волн на поверхности идеальной жидкости вертикальными круговым и эллиптическим цилиндрами. Им также предложен способ расчета взаимодействия волн с вертикальными преградами произвольного сечения, сводящийся к построению функций излучения при колебаниях контура поперечного сечения преграды.

В области, занятой жидкостью, выполняются уравнение неразрывности и уравнения движения:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla P + \rho \mathbf{g},$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, P — давление, μ — динамический коэффициент вязкости, $\mathbf{g}$ — вектор силы тяжести. Данная работа посвящена изучению движения жидкости, вызванному взаимодействием набегающей гравитационной волны, распространяющейся на поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости, с круговым цилиндром бесконечной глубины

При заглублении скорость жидкости должна затухать, т. е. выполняется условие

$$\mathbf{v} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

На свободной поверхности $z = \xi(t, x, y)$ задаются кинематическое условие [2]

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

и динамические условия [3]

$$e_{ij} t_i n_j = 0, \quad P - 2\mu e_{ij} n_i n_j = P_a,$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad v_1 = u, \quad v_2 = v, \quad v_3 = w, \\ x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

здесь P_a — постоянное атмосферное давление.

На поверхности цилиндра S в случае вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (x, y, z) \in S.$$

Будем рассматривать колебания с амплитудой весьма малой по сравнению с длиной волны. Тогда система уравнений и граничных условий примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1)$$

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{p}{\rho} - g\xi - 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad z = 0, \quad (2)$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (x, y, z) \in S, \quad (3)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (4)$$

где $p = P + \rho g z - P_a$ — динамическое давление, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости.

Решение задачи необходимо искать в виде суммы потенциальной и вихревой составляющей. Исходя из этого, представим скорость в виде [4]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 = \nabla \varphi, \quad \mathbf{v}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{\Psi},$$

где φ — потенциал, $\mathbf{\Psi}$ — векторная функция тока.

Тогда, применяя к уравнениям (1) операции div и rot , их можно свести к системе уравнений:

$$\Delta \varphi = 0, \quad p = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{\Psi} = 0.$$

Применяя операции дифференцирования к уравнениям для функции φ и компонент векторной функции $\mathbf{\Psi}$, получим уравнения для вертикальной составляющей скорости $w = w_1 + w_2$ ($w_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $w_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}$):

$$\Delta w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} - \nu \Delta w_2 = 0. \quad (5)$$

Граничные условия (2) с помощью операций дифференцирования и уравнений (1) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} - \nu \left(3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} - g \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad z = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad z = 0. \quad (7)$$

Из условия (3) получим

$$w = 0, \quad (x, y, z) \in S, \quad (8)$$

а из условия затухания волнового движения при заглублении (4) —

$$w \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (9)$$

Таким образом, исходная волновая задача сведена к задаче для вертикальной составляющей скорости (5)–(9).

Волновое движение жидкости для свободной волны, не искаженной препятствием, описывается следующими функциями [5]:

$$\begin{aligned} u &= \cos \alpha \left(ikAe^{kz} - lCe^{lz} \right) e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \\ v &= \sin \alpha \left(ikAe^{kz} - lCe^{lz} \right) e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \\ w &= \left(kAe^{kz} + ikCe^{lz} \right) e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \\ p &= -\rho\omega Ae^{kz} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \quad \xi = \frac{ikA - lC}{\omega} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \omega t}, \end{aligned}$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны, $l^2 = k^2 + \frac{\omega}{\nu}$, $C = \frac{2i\nu k^2 A}{\omega + 2\nu k^2}$, α — направление распространения волны, отсчитываемое от оси x в горизонтальной плоскости, а ω — комплексная частота, для которой получено дисперсионное уравнение

$$(\omega + 2\nu k^2)^2 + gk = 4\nu^2 k^4 \sqrt{\frac{\omega}{\nu k^2} + l}.$$

Далее будем рассматривать дифракцию набегающей волны круговым цилиндром с вертикальными образующими. Функции w_1 и w_2 будем искать в виде

$$w_1 = kAe^{kz + \omega t} \tilde{F}(x, y), \quad w_2 = ikCe^{lz + \omega t} \tilde{F}(x, y).$$

Выражения для функций u , v , p и ξ через $\tilde{F}$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= -k \cos^2 \alpha \left(kAe^{kz} + ilCe^{lz} \right) e^{\omega t} \int \tilde{F}(x, y) dx, \\ v &= -k \sin^2 \alpha \left(kAe^{kz} + ilCe^{lz} \right) e^{\omega t} \int \tilde{F}(x, y) dy, \\ p &= -\rho\omega Ae^{kz} e^{\omega t} \tilde{F}(x, y), \quad \xi = \frac{ikA - lC}{\omega} e^{\omega t} \tilde{F}(x, y). \end{aligned}$$

Из уравнений (5) вытекает следующее уравнение Гельмгольца для функции $\tilde{F}$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2} + k^2 \tilde{F} = 0.$$

Условия (6), (7) и (9) при таком представлении для w_1 и w_2 выполняются, а из условия (8) следует условие для $\tilde{F}$:

$$\tilde{F} = 0, \quad (x, y) \in L,$$

где L — контур сечения препятствия горизонтальной плоскостью.

Функцию $\tilde{F}$ можно представить в виде

$$\tilde{F} = F_\infty + F,$$

где первое слагаемое $F_\infty = e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)}$ соответствует набегающей волне, а второе характеризует возмущенное движение жидкости.

Уравнение Гельмгольца для определения функции F и условие на контуре L в полярных координатах принимают вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F = 0, \quad (10)$$

$$e^{ikR \cos(\theta - \alpha)} + F(R, \theta) = 0, \quad (11)$$

где R — радиус цилиндра.

Функция F как решение уравнения Гельмгольца должна также удовлетворять условию излучения в форме [6]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (F_r - ikF) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} F = 0.$$

Решение уравнения (10) будем искать с помощью метода разделения переменных, представив неизвестную функцию в виде

$$F(r, \theta) = X(r) Y(\theta).$$

Подставив последнее выражение в уравнение и проведя разделение переменных, получим уравнения

$$r^2 X_{rr} + r X_r + (k^2 r^2 - m) X = 0, \\ Y_{\theta\theta} + \lambda Y = 0,$$

где m — константа разделения.

Решение второго уравнения, удовлетворяющее условию периодичности по θ и условию симметрии относительно α , имеет вид:

$$Y = \cos n(\theta - \alpha),$$

где $n = \sqrt{m}$ — целое число.

Рис. 1. Проекция поля скоростей на плоскость XY в случае вязкой жидкости

Рис. 2. Проекция поля скоростей на плоскость XZ в случае вязкой жидкости

Условию излучения удовлетворяет функция Ханкеля первого рода:

$$X = H_n^{(1)}(kr), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда функция F примет вид:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr) \cos n(\theta - \alpha).$$

Коэффициенты C_n определим из условия (11). Для этого используем разложение [7]

$$e^{ikR \cos(\theta - \alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kR) \cos n(\theta - \alpha),$$

где $J_n(kr)$ — функция Бесселя первого рода, $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geq 1. \end{cases}$

Рис. 3. Проекция поля скоростей на плоскость XY в случае идеальной жидкости.

Рис. 4. Проекция поля скоростей на плоскость XZ в случае идеальной жидкости.

Тогда получим

$$C_n = -\varepsilon_n i^n \frac{J_{n-1}(kR) - J_{n+1}(kR)}{H_{n-1}^{(1)}(kR) - H_{n+1}^{(1)}(kR)}.$$

В случае малого значения числа kR (длина волны много больше радиуса цилиндра) условие на контуре L можно записать в виде

$$F_r = -ik \cos(\theta - \alpha), \quad r = R.$$

Тогда функция $\tilde{F}$, определяющая суммарное волновое поле, равна

$$\tilde{F} = e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} + \frac{ikR^2}{r} \cos(\theta - \alpha).$$

Для сравнения решений, полученных для идеальной и вязкой жидкости, на рисунках 1–4 приведены проекции поля скоростей вблизи свободной поверхности на горизонтальную плоскость XY и на вертикальную XZ при $R = 0.2$ м, $A = 0.1$, $\lambda = 1$ м, $\alpha = \pi/4$. Из рисунков видно, что учет силы вязкого трения между частицами не влияет на проекции скоростей на плоскость XY . Это следует из того, что вид функции $F(x, y)$ в обоих случаях совпадает. В то же время, для вязкой жидкости в проекции поля скоростей на плоскость XZ наблюдается нарушение симметрии в отличие от случая идеальной жидкости, что объясняется действием вязких касательных напряжений на свободной поверхности вязкой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. 328 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 793 с.
4. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Моделирование волновых движений вязкой жидкости // Вестник Тюменского государственного университета. 2009. № 6. С. 144–151.
5. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
6. Кочин Н.Е. Собрание сочинений. Том 2. М.: Изд-во АН СССР, 1949. 305 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Бутакова Нина Николаевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет, 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10.

E-mail: nnbutakova@utmn.ru

Сычева Елена Михайловна, магистрант, кафедра математического моделирования, Тюменский государственный университет, 625003, Россия, г. Тюмень, ул. Семакова, 10.

E-mail: sychovaelena92@gmail.com

N. N. Butakova, E. M. Sycheva

Wave diffraction on the surface of viscous liquid flowing around a circular cylinder

Keywords: diffraction, viscosity, wave motion of liquid.

MSC: 76D33

The motion of fluid due to the interaction of an incident gravitational wave spreading on the surface of viscous incompressible fluid with a circular cylinder having vertical elements is considered. A nonlinear boundary-value problem is reduced to determining the vertical component of a velocity vector represented by a sum of potential and rotational parts. The problem is solved for the small-amplitude oscillations. The comparison of the velocity field between the ideal and viscous liquids is made.

REFERENCES

1. Haskind M.D. *Gidrodinamicheskaya teoriya kachki korablya* (The hydrodynamic theory of rolling ship), Moscow: Nauka, 1973, 328 p.
2. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika, Chast' 2* (Theoretical hydromechanics, vol. 2), Moscow: Fizmatgiz, 1963, 728 p.
3. Batchelor G.K. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti* (An introduction to fluid dynamics), Moscow: Mir, 1973, 793 p.
4. Barinov V.A., Basinskii K.Yu. Modelling of wave movements of the viscous liquid, *Vestn. Tyumen. Gos. Univ.*, 2009, no. 6, pp. 144–151.
5. Levich V.G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* (Physicochemical hydrodynamics), Moscow: Fizmatgiz, 1959, 700 p.
6. Kochin N.E. *Sobranie sochinenii, Tom 2* (Collected works, vol. 2), Moscow: Academy of Sciences of USSR, 1949, 305 p.
7. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* (Tables of integrals, sums, series and products), Moscow: Fizmatgiz, 1963, 1100 p.

Received 31.01.2015

Butakova Nina Nikolaevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Modeling, Tyumen State University, ul. Semakova, 10, Tyumen, 625003, Russia.

E-mail: nnbutakova@utmn.ru

Sycheva Elena Mikhailovna, Master student, Department of Mathematical Modeling, Tyumen State University, ul. Semakova, 10, Tyumen, 625003, Russia.

E-mail: sychovaelena92@gmail.com