L. E. Baranova, Yu. P. Chuburin, On quasi-levels of the discret two-particle Schrödinger operator with a decreasing small potential, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 1, 35–46

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.91.87.62

April 26, 2023, 15:28:57

УДК 517.958 : 513.145.6

Л. Е. Баранова, Ю. П. Чубурин

КВАЗИУРОВНИ ДВУХЧАСТИЧНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С МАЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Исследуются собственные значения и резонансы двухчастичного дискретного оператора Шредингера с малым убывающим потенциалом.

Ключевые слова: дискретный оператор Шредингера, малый потенциал, собственное значение, квазиуровень.

Введение

Рассматривается дискретный оператор Шредингера $H = H_0 + V(n - m)$, действующий в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$, $d \in \mathbb{N}$. Здесь H_0 определяется для $\psi(n, m) \in l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ формулой

$$(H_0\psi)(n, m) = \sum_{|(n', m') - (n, m)|=1} \psi(n', m'), \quad n, m, n', m' \in \mathbb{Z}^{2d},$$

где

$$|(\nu, \mu)| = \sum_{j=1}^d (|\nu_j| + |\mu_j|), \quad \nu, \mu \in \mathbb{Z}^d$$

($\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ и так далее), а ненулевая вещественная функция $V(n)$, определенная на $\mathbb{Z}^d$ ($V(n - m)$ — потенциал парного взаимодействия), удовлетворяет оценке

$$|V(n)| \leq C e^{-a|n|}, \quad (0.1)$$

где $C, a > 0$. В случае потенциала с (малым) параметром $\varepsilon > 0$ используем обозначение $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V(n - m)$.

Операторы подобного вида изучались ранее, в частности, исследовались свойства собственных значений и резонансов N -частичного дискретного оператора Шредингера в терминах некоторого «резольвентного» определителя Фредгольма [1], свойства собственных значений двухчастичного кластерного оператора [2]; получены результаты, относящиеся

к собственным значениям двухчастичного оператора Шредингера на решетке для потенциалов нулевого радиуса действия [3]–[5].

В данной работе изучаются собственные значения и резонансы оператора $H_\varepsilon(k)$, полученного разложением H_ε в соответствующем прямом интеграле пространств (k — квазиимпульс, см. об этом ниже).

Аналогичные результаты в непрерывном случае были получены в работах [6]–[8]. Заметим, что замене координат в непрерывном случае, выделяющей движение центра масс, в дискретном случае соответствует разложение оператора в прямом интеграле пространств.

Возможная область применения рассматриваемых в данной статье операторов — это, например, теория спиновых волн [9, 10].

Оператор H коммутирует с операторами сдвига в $l^2(\mathbb{Z}^{2d})$ вида

$$\psi(n, m) \rightarrow \psi(n + \nu, m + \nu), \nu \in \mathbb{Z}^d,$$

поэтому его можно «послойно» разложить в прямом интеграле пространств [6]

$$\int_{\mathbb{T}^d}^{\oplus} l^2(\mathbb{Z}^d) dk = l^2(\mathbb{Z}^d) \otimes L^2(\mathbb{T}^d),$$

где $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi)^d$ — d -мерный тор. (Случай импульсного представления см., например, в работе [1]). Действительно, введем в рассмотрение унитарный оператор

$$U : l^2(\mathbb{Z}^{2d}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}) \otimes l^2(\mathbb{T}^d),$$

$$(U\psi)(n, k) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} e^{-i\langle k, \nu \rangle} \psi(n + \nu, \nu).$$

(через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}$.) Величина $k \in \mathbb{T}^d$ называется квазиимпульсом. Далее будем пользоваться обозначениями $\widehat{\psi}(n, k) = (U\psi)(n, k)$.

Найдем оператор UH_0U^{-1} . Имеем

$$\begin{aligned} (UH_0U^{-1}\widehat{\psi})(n, k) &= (1 + e^{-ik_1})\widehat{\psi}(n + (1, 0, \dots, 0), k) + \\ &+ (1 + e^{ik_1})\widehat{\psi}(n - (1, 0, \dots, 0), k) + \dots + (1 + e^{-ik_d})\widehat{\psi}(n + (0, \dots, 0, 1), k) + \\ &+ (1 + e^{ik_d})\widehat{\psi}(n - (0, \dots, 0, 1), k) = H_0(k)\widehat{\psi}(n, k). \end{aligned} \quad (0.2)$$

Таким образом, оператор UH_0U^{-1} расщепляется в семейство операторов $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}$, действующих в $l^2(\mathbb{Z}^d)$, отличающихся от обычного конечно-разностного оператора коэффициентами, зависящими от k .

Очевидно, что $UV(n-m)U^{-1} = V(n)$, поэтому и оператор H унитарно эквивалентен семейству операторов $H(k) = H_0(k) + V(n)$, действующих при фиксированном $k \in \mathbb{T}^d$ в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^d)$.

Спектр (существенный спектр) оператора A будем обозначать через $\sigma(A)$ ($\sigma_{ess}(A)$).

Обозначим через

$$F : l^2(\mathbb{Z}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^d),$$

$$(F\psi)(p) = \tilde{\psi}(p) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \psi(n) e^{-i\langle n, p \rangle}$$

оператор преобразования Фурье. Оператор $\tilde{H}_0(k) = FH_0(k)F^{-1}$ представляет собой оператор умножения на функцию

$$\sum_{j=1}^d \left((1 + e^{-ik_j}) e^{ip_j} + (1 + e^{ik_j}) e^{-ip_j} \right) = 4 \sum_{j=1}^d \cos\left(\frac{k_j}{2}\right) \cos\left(p_j - \frac{k_j}{2}\right).$$

Отсюда

$$\sigma(H_0(k)) = (\sigma(\tilde{H}_0(k))) = \left[-4 \sum_{j=1}^d \cos \frac{k_j}{2}, 4 \sum_{j=1}^d \cos \frac{k_j}{2} \right].$$

Введем обозначения $R_0(k, \lambda) = (H_0(k) - \lambda)^{-1}$, $R(k, \lambda) = (H(k) - \lambda)^{-1}$, $\tilde{R}_0(k, \lambda) = (\tilde{H}_0(k) - \lambda)^{-1}$.

Имеем

$$\begin{aligned} (R_0(k, \lambda)\psi)(n) &= (F^{-1}\tilde{R}_0(k, \lambda)F\psi)(n) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{i\langle n-m, p \rangle} dp}{4 \sum_{j=1}^d \cos\left(\frac{k_j}{2}\right) \cos\left(p_j - \frac{k_j}{2}\right) - \lambda} \psi(m), \end{aligned}$$

откуда находим выражение для функции Грина (ядра резольвенты) оператора $H_0(k)$:

$$G_0(n-m, k, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{i\langle n-m, p \rangle}}{4 \sum_{j=1}^d \cos\left(\frac{k_j}{2}\right) \cos\left(p_j - \frac{k_j}{2}\right) - \lambda}. \quad (0.3)$$

Очевидно, что $G_0(n-m, k, i) \in l^2(\mathbb{Z}^d)$. Отсюда и из неравенства (0.1) следует, что $V(n)$ представляет собой относительно компактное возмущение оператора $H_0(k)$ и, таким образом, согласно [6],

$$\sigma_{ess}(H_0(k)) = \sigma(H_0(k)) = \left[-4 \sum_{j=1}^d \cos \frac{k_j}{2}, 4 \sum_{j=1}^d \cos \frac{k_j}{2} \right].$$

В дальнейшем предполагаем, что $k_j \neq -\pi$, $j = 1, \dots, d$ (в случае, если $k_j = -\pi$ для $j = j_1, \dots, j_m$, то слагаемые с этими номерами в выражении, полученном в (0.2) для оператора $H_0(k)$, обращаются в нуль, и оператор действует лишь по $d - m$ координатам).

§ 1. Квазиуровни в случае двух одномерных частиц

В этом разделе предполагаем, что $d = 1$.

Обозначим через $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ функцию Жуковского, а через

$$z = g(w) = w - \sqrt{w^2 - 1} \quad (1.1)$$

обратную к ней. Функция $g(w)$ является двузначной, она отображает область $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ на внутренность или внешность единичного круга в $\mathbb{C}$, в зависимости от выбора знака корня. Листы соответствующей римановой поверхности M соединяются вдоль промежутка $(-1, 1)$, а точки ± 1 являются точками ветвления. Заметим, что первый лист, на котором по определению $g(w) < 1$, отвечает аналитическому продолжению арифметического значения корня в формуле (1.1) для $w > 1$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$G_0(n, k, \lambda) = -\frac{e^{ikn/2}}{\sqrt{\lambda^2 - 16 \cos^2(k/2)}} \left(g\left(\frac{\lambda}{4 \cos(k/2)}\right) \right)^{|n|}. \quad (1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $a = 1 + e^{-ik}$. Функция G_0 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} (H_0(k) - \lambda)G_0(n, k, \lambda) = \\ = aG_0(n+1, k, \lambda) + \bar{a}G_0(n-1, k, \lambda) - \lambda G_0(n, k, \lambda) = \delta_{n0}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Ищем G_0 в виде

$$G_0(n, k, \lambda) = Cq^{|n|}, \quad (1.4)$$

где C , q не зависят от n . Из (1.3) и (1.4) получаем для $n > 0$

$$q = \frac{|a|}{a} \left(\frac{\lambda}{2|a|} - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2|a|}\right)^2 - 1} \right) = \frac{|a|}{a} g\left(\frac{\lambda}{2|a|}\right) = e^{ik/2} g\left(\frac{\lambda}{4 \cos(k/2)}\right)$$

и аналогично для $n < 0$

$$q = \frac{|a|}{a} g\left(\frac{\lambda}{2|a|}\right) = e^{-ik/2} g\left(\frac{\lambda}{4 \cos k/2}\right).$$

Константу C в (1.4) найдем, записав уравнение (1.3) для $n = 0$:

$$C = \left(2|a|g\left(\frac{\lambda}{2|a|}\right) - \lambda \right)^{-1} = \left(-\sqrt{\lambda^2 - 16 \cos^2 \frac{k}{2}} \right)^{-1}. \quad (1.5)$$

Из формул (1.4) и (1.5) вытекает формула (1.2). Заметим, что при выборе ветви корня, для которого $|g(w)| < 1$, функция $G_0(n, k, \lambda)$ экспоненциально убывает при $n \rightarrow \infty$, являясь в этом случае ядром ограниченного оператора в $l^2(\mathbb{Z})$ (резольвенты). $\square$

В дальнейшем для изучения резонансов функции Грина G_0 будем также использовать в случае, когда λ находится на втором «нефизическом» листе римановой поверхности M , на котором функция $g(\lambda/4 \cos(k/2))$, и, следовательно, $G_0(n, k, \lambda)$ экспоненциально возрастает при $n \rightarrow \infty$.

Введем в окрестности граничных точек $\pm 4 \cos(k/2)$ существенного спектра оператора $H(k)$ вместо λ новую переменную

$$\varkappa = \mp i \sqrt{\lambda^2 - 16 \cos^2 \frac{k}{2}}, \quad (1.6)$$

тогда

$$\lambda = \pm \sqrt{16 \cos^2 \frac{k}{2} - \varkappa^2} = \pm i \sqrt{\varkappa^2 - 16 \cos^2 \frac{k}{2}}. \quad (1.7)$$

Здесь и далее все верхние и нижние знаки соответствуют друг другу. Корень в (1.6) предполагается двухзначным, его риманова поверхность совпадает с M . Как легко видеть, изменению λ на двух листах римановой поверхности в окрестностях каждой из точек $\pm 4 \cos(k/2)$ отвечает изменение $\varkappa$ в окрестности нуля комплексной плоскости. При переходе значений корня

$$\sqrt{\lambda^2 - 16 \cos^2 \frac{k}{2}} = \pm i \varkappa \quad (1.8)$$

через интервал $(-4 \cos(k/2), 4 \cos(k/2))$ (этот интервал является существенным спектром оператора $H_0(k)$ без граничных точек), значения функции $g(\lambda/4 \cos(k/2))$ переходят через окружность с центром в нуле и радиусом единица (см. [11]), а ее аргумент соответственно с листа на лист римановой поверхности M . В выражении (1.7) выбирается ветвь корня, соответствующая его арифметическому значению.

Введем обозначение

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\pm}(n, k, \varkappa) &= G_0\left(n, k, \sqrt{\varkappa^2 - 16 \cos^2 \frac{k}{2}}\right) = \\ &= \mp \frac{e^{ikn/2} \cdot e^{\mp i\pi|n|/2}}{i\varkappa} \left(g(\varkappa/4 \cos(k/2))\right)^{|n|}.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Положим далее

$$\tilde{G}_{\pm}^{reg}(n, k, \varkappa) = \mp \frac{e^{ikn/2} \cdot e^{\mp i\pi|n|/2}}{i\varkappa} \left(\left(g(\varkappa/4 \cos k/2)\right)^{|n|} - (g(0))^{|n|} \right) \quad (1.10)$$

(здесь $g(0) = -i$).

Следуя [12], будем пользоваться обозначениями (только для V) $\sqrt{V} = \sqrt{|V|} \operatorname{sgn} V$. Обозначим через $A_{\pm}(k, \varkappa)$ оператор с ядром

$$\sqrt{|V(n)|} \tilde{G}_{\pm}^{reg}(n - m, k, \varkappa) \sqrt{V(m)}. \quad (1.11)$$

Лемма 2. Операторнозначная функция $A_{\pm}(k, \varkappa)$ представляет собой аналитическую функцию аргумента $\varkappa$ в некоторой окрестности нуля со значениями в множестве операторов Гильберта–Шмидта.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать аналитичность ядра (1.11) как функции со значениями в $l^2(\mathbb{Z}^2)$. Оценим, пользуясь (0.1), норму выражения (1.11) в $l^2(\mathbb{Z}^2)$

$$\begin{aligned}&\sqrt{|V(n)|} \tilde{G}_{\pm}^{reg}(n - m, k, \varkappa) \sqrt{V(m)} \leq \\ &\leq C \sum_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2} e^{-a(|n|+|m|)} \left[\frac{(g(\varkappa/4 \cos(k/2)))^{|n-m|} - (g(0))^{|n-m|}}{\varkappa} \right].\end{aligned}\quad (1.12)$$

Имеем

$$\frac{(g(z))^{|n|} - (g(0))^{|n|}}{z} = \frac{|n|}{z} \int_{[0, z]} (g(\zeta))^{|n|-1} g'(\zeta) d\zeta = -\frac{|n|}{z} \int_{[0, z]} \frac{(g(\zeta))^{|n|}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}.$$

Следовательно, для z из δ -окрестности нуля, где $\delta < 1$,

$$\left| \frac{(g(z))^{|n|} - (g(0))^{|n|}}{z} \right| \leq C|n| \sup_{|\zeta| \leq \delta} |g(\zeta)|^{|n|} \leq C|n| e^{\varepsilon|n|} \leq C' e^{2\varepsilon|n|},$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало для достаточно малых δ . Пусть $2\varepsilon < a$, тогда ряд в (1.12) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$C' \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} e^{-(a-2\varepsilon)(|n|+|m|)}$$

равномерно по $\varkappa$ из δ -окрестности нуля.

Аналитичность $l^2(\mathbb{Z}^2)$ -значной функции (1.11) вытекает из векторно-значного аналога теоремы Вейерштрасса: данная функция является равномерным по $\varkappa$ из δ -окрестности нуля пределом при $N \rightarrow \infty$ в смысле нормы в $l^2(\mathbb{Z}^2)$ аналитических матриц

$$\theta(N - |n|)(\theta(N - |m|)\sqrt{|V(n)|}(\tilde{G}_{\pm}^{reg}(n - m, k, \varkappa)\sqrt{V(m)},$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. $\square$

Обозначим через $\tilde{R}_0^{\pm}(k, \kappa)$, $\tilde{R}^{\pm}(k, \kappa)$, резольвенты операторов $H_0(k)$, $H(k)$ соответственно после замены (1.7). Имеем, согласно (1.12), (1.13) равенство

$$\sqrt{|V|}\tilde{R}_0^{\pm}(k, \varkappa)\sqrt{V} = \mp \frac{(\cdot, \tilde{\varphi}_{\pm})\varphi_{\pm}}{i\varkappa} + A_{\pm}(k, \varkappa), \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_+(n) &= \sqrt{|V(n)|}e^{i(k/2-\pi)n}, \quad \tilde{\varphi}_+(n) = \sqrt{V(n)}e^{i(k/2-\pi)n} \\ \varphi_-(n) &= \sqrt{|V(n)|}e^{ikn/2}, \quad \tilde{\varphi}_-(n) = \sqrt{V(n)}e^{ikn/2}, \end{aligned}$$

резольвенту в (1.13) продолжаем по $\varkappa$ на «нефизический» лист функции Грина. Вследствие леммы 2 операторнозначная функция (1.13) мероморфна по $\varkappa$ в окрестности нуля. В силу резольвентного тождества

$$(1 + \sqrt{|V|}\tilde{R}_0^{\pm}(k, \varkappa)\sqrt{V})^{-1} = 1 - \sqrt{|V|}\tilde{R}_0^{\pm}(k, \varkappa)\sqrt{V}$$

и мероморфной теоремы Фредгольма [6] это справедливо и для операторнозначной функции $\sqrt{|V|}\tilde{R}^{\pm}(k, \varkappa)\sqrt{V}$. При этом полюса данной функции находятся в точках $\varkappa$, для которых $\ker(1 + \sqrt{|V|}\tilde{R}_0^{\pm}(k, \varkappa)\sqrt{V}) \neq \{0\}$, то есть существует ненулевое решение уравнения

$$\varphi = -\sqrt{|V|}\tilde{R}_0^{\pm}(k, \varkappa)\sqrt{V}\varphi \quad (1.14)$$

в $l^2(\mathbb{Z}^2)$ (см. [13]). Соответствующие $\lambda = \pm i\sqrt{\varkappa^2 - 16\cos^2(k/2)}$ являются или собственными значениями оператора $H(k)$ (на первом листе это вытекает из (1.14), поскольку функция

$$\psi = -\tilde{R}_0^{\pm}(k, \varkappa)\sqrt{V}\varphi = -(\tilde{R}_0^{\pm}(k, \varkappa)V\psi$$

принадлежит $l^2(\mathbb{Z})$ и следовательно, является собственным вектором, отвечающим λ), или резонансами (на втором листе); те и другие вместе назовем *квазиуровнями* оператора $H(k)$.

Кратностью квазиуровня будем называть

$$\dim \ker(1 + \sqrt{|V|} \tilde{R}_0^\pm(k, \kappa) \sqrt{|V|}).$$

Все вышесказанное, разумеется, относится и к оператору $H_\varepsilon(k)$.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$\bar{V} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V(n) \neq 0.$$

Тогда в некоторых окрестностях точек $\pm 4 \cos(k/2)$ для всех достаточно малых ε существует ровно по одному квазиуровню $\lambda = \lambda_\varepsilon$ кратности единица оператора $H_\varepsilon(k)$, для которых справедлива формула

$$\lambda_\varepsilon = \pm \left(4 \cos(k/2) + \frac{\varepsilon^2 \bar{V}^2}{8(\cos(k/2))} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (1.15)$$

При этом, квазиуровень, расположенный вблизи точки $4 \cos(k/2)$ (соответственно $-4 \cos(k/2)$), является при $V > 0$ собственным значением (соответственно резонансом), а при $V < 0$ — резонансом (соответственно собственным значением).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В уравнениях (1.13) и (1.14) заменим V на εV . Имеем

$$\varphi = \pm \varepsilon \frac{(\varphi, \tilde{\varphi}_\pm) \varphi_\pm}{i\kappa} - \varepsilon A_\pm(k, \kappa) \varphi. \quad (1.16)$$

Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $\|\varepsilon A_\pm(k, \kappa)\| < 1$ для всех κ из малой окрестности нуля. Для таких ε положим $\theta = (1 + \varepsilon A_\pm(k, \kappa)) \varphi$ и перепишем (1.16) следующим образом:

$$\theta = \pm \varepsilon \frac{\left((1 + \varepsilon A_\pm(k, \kappa))^{-1} \theta, \tilde{\varphi}_\pm \right) \varphi_\pm}{i\kappa}. \quad (1.17)$$

Отсюда получаем, что эквивалентным условием существования решения уравнения (1.16) является выполнение равенства

$$\kappa = \mp i \varepsilon \left((1 + \varepsilon A_\pm(k, \kappa))^{-1} \varphi, \tilde{\varphi}_\pm \right). \quad (1.18)$$

Выберем достаточно малое $\delta > 0$. Решение $\varkappa$ алгебраического уравнения (1.18) в круге $\{|\varkappa| \leq \delta\}$ существует и единственно для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при любом выборе знака (то есть для λ вблизи любой из точек $\pm 4 \cos(k/2)$). Это вытекает из теоремы Руше или из принципа сжимающих отображений по лемме 2. При этом согласно (1.18)

$$\varkappa = \mp i\varepsilon(\varphi_{\pm}, \tilde{\varphi}_{\pm}) + O(\varepsilon^2) = \mp i\varepsilon \bar{V} + O(\varepsilon^2), \quad (1.19)$$

причем оценка $|O(\varepsilon)| \leq C\varepsilon^2$ равномерна по $\varkappa$. Для соответствующих λ имеем в силу (1.8) и (1.19)

$$\begin{aligned} \lambda &= \pm \sqrt{16 \cos^2(k/2) + \varepsilon^2 \bar{V}^2} + O(\varepsilon^3) = \\ &= \pm \left(4 \cos(k/2) + \frac{\varepsilon^2 \bar{V}^2}{8 \cos(k/2)} \right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Далее, вследствие (1.8) и (1.19) имеем $\sqrt{\lambda^2 - 16 \cos^2(k/2)} = \varepsilon \bar{V} + O(\varepsilon^2)$, где корень двухзначен. Выражая его через (аналитически продолженный) арифметический корень вблизи точек $\pm 4 \cos(k/2)$, получаем следующее равенство на первом листе римановой поверхности M :

$$\pm \sqrt{\lambda^2 - 16 \cos^2(k/2)} = \varepsilon \bar{V} + O(\varepsilon^2).$$

Это следует из того, что для арифметического корня значения равны $|\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}| < 1$ при $\lambda > 1$ и $|\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}| < 1$ при $\lambda < -1$. Поэтому если $\bar{V} > 0$, то вблизи точки $4 \cos(k/2)$ при малых ε находится собственное значение, а вблизи $-4 \cos(k/2)$ — резонанс, а если $\bar{V} < 0$, то наоборот.

Утверждение о кратности вытекает из того, что согласно (1.17), $\theta = C\varphi_{\pm}$, $C = \text{const}$. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что оценка $|O(\varepsilon^3)| \leq C\varepsilon^3$, где $O(\varepsilon^3)$ взято из (1.15), равномерна по k' из окрестности k .

З а м е ч а н и е 2. Беря $k = 0$, очевидно получаем аналогичное теореме 1 утверждение для обычного конечно-разностного оператора.

§ 2. Случай $d > 1$

Рассмотрим вначале случай $d = 2$.

Имеем $V(n_0) \neq 0$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{Z}^2$. Положим $\xi_0 = \{\delta_{n_0, n}\} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$, где δ_{ij} — символ Кронекера, и пусть $\lambda_{\sigma} = -(4 \cos(k_1/2) + 4 \cos(k_2/2)) - \sigma$, $\sigma > 0$. Обозначим через $A(k, \lambda)$ оператор с ядром $\sqrt{|V(n)|} G_0(n - m, k, \lambda) \sqrt{|V(m)|}$.

Лемма 3. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (A(k, \lambda_\sigma) \xi_0, \xi_0) = \pm \infty,$$

где знак $\pm$ совпадает с $\operatorname{sgn} V(n_0)$.

Доказательство. Положим $p_j^{(0)} = (k_j/2 + \pi) \bmod(2\pi)$, $j = 1, 2$ и $p_0 = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) \in \mathbb{T}^2$ (в этой точке знаменатель в выражении (0.3) равен $-(4 \cos(k_1/2) + 4 \cos(k_2/2)) - \lambda$). Выберем достаточно малое $r > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (A(k, \lambda_\sigma) \xi_0, \xi_0) &= \frac{V(n_0)}{(2\pi)^2} \int_{\{|p-p_0| \leq r\}} \frac{dp}{2 \sum_{j=1}^2 \cos(k_j/2) \cos(p_j - k_j/2) - \lambda_\sigma} + \\ &+ \frac{V(n_0)}{(2\pi)^2} \int_{\{|p-p_0| \geq r\}} \frac{dp}{2 \sum_{j=1}^2 \cos(k_j/2) \cos(p_j - k_j/2) - \lambda_\sigma} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Второе слагаемое в скобках равномерно ограничено по $\sigma > 0$. Первое слагаемое после замены $\varkappa = p - p_0$ и использования формулы Тейлора примет вид

$$\begin{aligned} &\int_{\{|x| \leq r\}} \frac{dx}{4 \sum_{j=1}^2 \cos(k_j/2) (-1 + \varkappa_j^2/2) + O(|x|^4) - \lambda_\sigma} \geq \\ &\geq C \int_{\{|y| \leq r'\}} \frac{dy}{|y|^2 + \sigma} - C \int_{\{|y| \leq r'\}} \frac{O(|y|^4) dy}{(|y|^2 + \sigma)(|y|^2 + O(|y|^4)\sigma)}. \end{aligned}$$

Здесь $r' > 0$ выбрано достаточно малым, $C > 0$. После перехода к полярным координатам видно, что первое слагаемое в полученном выражении стремится к бесконечности при $\sigma \rightarrow 0$, а второе ограничено равномерно по $\sigma > 0$. Вместе с (2.1) это доказывает лемму. $\square$

Теорема 2. *Предположим, что $d = 2$ и функция $V(n)$ не меняет знак. Тогда оператор $H_\varepsilon(k)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет хотя бы одно собственное значение λ_ε .*

Причем имеют место оценки: $\lambda_\varepsilon < -4(\cos(k_1/2) + \cos(k_2/2))$ в случае $V(n) \leq 0$ и $\lambda_\varepsilon > 4(\cos(k_1/2) + \cos(k_2/2))$ в случае $V(n) \geq 0$.

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай, если $V(n) \leq 0$. Оператор $A(k, \lambda)$ для $\lambda < -4(\cos(k_1/2) + \cos(k_2/2))$, очевидно, является самосопряженным оператором Гильберта–Шмидта. Пусть

$\varepsilon > 0$, тогда в силу леммы 3 для достаточно малого $\sigma > 0$ существует отрицательное собственное значение μ оператора $A(k, \lambda_\sigma)$ такое, что $|\mu| > 1/\varepsilon$. Имеем

$$\varepsilon \sqrt{|V|} R_0(k, \lambda_\sigma) \sqrt{V} \varphi = -|\mu| \varepsilon \varphi,$$

где $\varphi \in l^2(\mathbb{Z}^2)$ — собственный вектор оператора $A(k, \lambda_\sigma)$, отвечающий μ . Ненулевой вектор

$$\psi = -\frac{\varepsilon}{|\mu| \varepsilon} R_0(k, \lambda_\sigma) \sqrt{V} \varphi = -\frac{\varepsilon}{|\mu| \varepsilon} R_0(k, \lambda_\sigma) V \psi$$

удовлетворяет уравнению Шредингера

$$(H_0(k) + \frac{\varepsilon}{|\mu| \varepsilon} V - \lambda_\sigma) \psi = 0.$$

При увеличении параметра $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\mu| \varepsilon} < \varepsilon$ до $\varepsilon' = \varepsilon$ собственное значение λ_σ оператора Шредингера $H_{\varepsilon'}(k)$ монотонно убывает (см. [6], раздел 3), что и доказывает теорему. $\square$

Теорема 3. Оператор $H_\varepsilon(k)$ в случае $d \geq 3$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ не имеет собственных значений вне промежутка

$$\sigma_{ess}(H_\varepsilon(k)) = \left[-4 \sum_{j=1}^2 \cos(k_j/2), 4 \sum_{j=1}^2 \cos(k_j/2) \right].$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим левую границу существенного спектра. С помощью выкладок, подобных приведенным в доказательстве леммы 3, получаем оценку

$$\begin{aligned} |G_0(n-m, k, \lambda_\sigma)| &\leq C_1 + C_2 \int_{\{|y| \leq r'\}} \frac{dy}{|y|^2 + \sigma} = \\ &= C_1 + C_3 \int_0^{r'} \frac{\rho^{d-1} d\rho}{\rho^2 + \sigma} \leq C < \infty \end{aligned}$$

для некоторых $C_j, C > 0$, $j = 1, 2, 3$ равномерно по $n, m \in \mathbb{Z}^d$ и $\sigma > 0$. Следовательно, $\|\sqrt{|V|} R_0(k, \lambda_\sigma) \sqrt{V}\| \leq C'$ равномерно по $\sigma > 0$ и уравнение

$$(1 + \varepsilon \sqrt{|V|} R_0(k, \lambda) \sqrt{V}) \psi = 0,$$

а вместе с ним и уравнение Шредингера $H_\varepsilon(k) \psi = \lambda \psi$ не имеет ненулевых решений для $\lambda < -4 \sum_{j=1}^2 \cos(k_j/2)$ при всех достаточно малых ε . $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лакаев С. Н. Связанные состояния и резонансы N -частичного дискретного оператора Шредингера // ТМФ. 1992. Т. 91. С. 51–65.
2. Маматов Ш. С., Минлос Р. А. Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора // ТМФ. 1989. Т. 79. С. 163–179.
3. Faria da Viegа A., Ioritti L., O'Carroll M. Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonians // Physical Review E. 2002. Vol. 66. P. 016130-1–016130-9.
4. Абдулаев Ж. И., Лакаев С. Н. Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера // ТМФ. 2003. Т. 136. С. 231–245.
5. Абдулаев Ж. И. Собственные значения двухчастичного оператора Шредингера на двумерной решетке // Uzbek. Math. J. 2005. № 1. С. 3–11.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4: Теория операторов. М.: Мир, 1977.
7. Чубурин Ю. П. О малых возмущениях оператора Шредингера с периодическим потенциалом // ТМФ. 1997. Т. 110. С. 443–453.
8. Chuburin Yu. P. On levels of a weakly perturbed periodic Schrödinger operator // Commun. Math. Phys. 2004. Т. 249.
9. Wolfram T., Callaway J. Spin-wave impurity states in ferromagnets // Physical Review. 1963. Vol. 130, № 6. P. 2207–2217.
10. Изюмов Ю. А. Скрыбин Ю. Н. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. М.: Наука, 1987.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
12. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 3: Теория рассеяния. М.: Мир, 1977.
13. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1: Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

Поступила в редакцию 01.10.07

L. E. Baranova, Yu. P. Chuburin

On quasi-levels of the discret two-particle Schrödinger operator with a decreasing small potential

We investigate resonances and eigenvalues of the discret two-particle Schrödinger operator with a decreasing small potential.

Баранова Людмила Евгеньевна
Ижевский государственный
технический университет,
426069, Россия, г. Ижевск,
ул. Студенческая, 7 (корп. 1)
E-mail: baranova_le@mail.ru

Чубурин Юрий Павлович
Физико-технический
институт УрО РАН,
426000, Россия, г. Ижевск,
ул. Кирова, 132
E-mail: chuburin@otf.pti.udm.ru