I. N. Banshchikova, S. N. Popova, On the spectral set of a linear discrete system with stable Lyapunov exponents, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, Volume 26, Issue 1, 15–26

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm160102>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.85.73.92

April 26, 2023, 09:28:38

УДК 517.929.2

© *И. Н. Банщикова, С. Н. Попова*

О СПЕКТРАЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С УСТОЙЧИВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ¹

Пусть зафиксирован некоторый класс возмущений матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ дискретной линейной однородной системы вида

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с вполне ограниченной на $\mathbb{Z}$ матрицей $A(\cdot)$. Спектральным множеством этой системы, отвечающим заданному классу возмущений, называем совокупность полных спектров показателей Ляпунова возмущенных систем, когда возмущения пробегает весь заданный класс. Основное внимание в работе уделено классу $\mathcal{R}$ возмущенных систем вида

$$y(m+1) = A(m)R(m)x(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

с вполне ограниченными на $\mathbb{Z}$ матрицами $R(\cdot)$, и его подклассам $\mathcal{R}_\delta$ с матрицами $R(\cdot)$, удовлетворяющими оценке $\sup_{m \in \mathbb{Z}} \|R(m) - E\| < \delta$, где $\delta > 0$. Доказано, что если показатели Ляпунова исходной системы устойчивы, то спектральное множество $\lambda(\mathcal{R})$, отвечающее классу $\mathcal{R}$, совпадает с множеством всех упорядоченных по возрастанию наборов из n чисел, при этом для каждого $\Delta > 0$ существует такое $\ell = \ell(\Delta) > 0$, что для любого $\delta < \Delta$ спектральное множество $\lambda(\mathcal{R}_{\ell\delta})$ содержит в себе δ -окрестность полного спектра показателей Ляпунова невозмущенной системы.

Ключевые слова: линейная система с дискретным временем, показатели Ляпунова, возмущения коэффициентов.

DOI: 10.20537/vm160102

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с фиксированным ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_n$ и стандартной нормой $\|\cdot\|$. Через $M_n(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной нормой, т.е. операторной нормой, индуцируемой в $M_n(\mathbb{R})$ евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$; $E \in M_n(\mathbb{R})$ — единичная матрица. Множество всех упорядоченных по возрастанию наборов из n вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}_{\leq}^n$. Для фиксированного набора $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$ и произвольного $\delta > 0$ через $O_\delta(\mu)$ обозначим совокупность всех таких наборов $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$, что $\max_{j=1, \dots, n} |\nu_j - \mu_j| < \delta$. Таким образом, $O_\delta(\mu)$ — это δ -окрестность набора μ во множестве $\mathbb{R}_{\leq}^n$.

Основным объектом исследований является линейная однородная система с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m), \tag{1}$$

где аргумент m пробегает множество $\mathbb{Z}_{m_0}$ целых значений, не меньших фиксированного $m_0 \in \mathbb{Z}$; неизвестная функция x принимает значения в $\mathbb{R}^n$; коэффициент $A(m)$ при каждом m принадлежит пространству $M_n(\mathbb{R})$. Всюду ниже будем предполагать, что функция $A(\cdot)$ *вполне ограничена* [1], то есть при каждом m существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое a , что

$$\sup_{m \geq m_0} (\|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\|) \leq a.$$

Заметим, что при всех m выполнены неравенства

$$\|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\| \geq \|A(m)\| + \|A(m)\|^{-1} \geq 2,$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00346).

поэтому $a \geq 2$.

Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (1) определим его *показатель Ляпунова* равенством

$$\lambda[x] \doteq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \|x(m)\|$$

и обозначим через Λ *спектр показателей Ляпунова* системы (1), то есть множество всех $\lambda \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с показателем λ . Известно [2, с. 51–52], что множество Λ состоит не более, чем из n различных чисел и расположено на отрезке $[-\ln a, \ln a]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_p\}$, где $\Lambda_1 < \dots < \Lambda_p$, $p \leq n$. Показатель Ляпунова тривиального решения системы (1) полагаем равным $-\infty$.

Для каждого $j \in \{1, \dots, p\}$ рассмотрим множество E_j всех решений системы (1), показатели которых не превосходят Λ_j . Множество E_0 считаем состоящим из тривиального решения системы (1). Тогда [2, с. 54] каждое из множеств E_j является линейным подпространством, имеют место строгие вложения $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_p$ и неравенства

$$0 = \dim E_0 < \dim E_1 < \dots < \dim E_p = n.$$

Положим

$$n_j = \dim E_j - \dim E_{j-1}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Назовем n_j *кратностью* показателя Λ_j . Заметим, что $n_1 + \dots + n_p = n$. Набор n чисел $\Lambda_1, \dots, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p, \dots, \Lambda_p$, где каждое Λ_j повторяется n_j раз, называется *полным спектром показателей Ляпунова* системы (1). В дальнейшем будем обозначать его

$$\lambda(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)),$$

считая при этом, что $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$. Таким образом, $\lambda(A) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$.

Нас будет интересовать вопрос о поведении полного спектра показателей Ляпунова системы (1) под действием различных возмущений ее коэффициентов.

Определение 1. Пусть зафиксирован некоторый класс возмущений матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ системы (1). *Спектральным множеством* системы (1), отвечающим заданному классу возмущений, будем называть совокупность полных спектров показателей Ляпунова возмущенных систем, когда возмущения пробегает весь заданный класс.

Сначала рассмотрим возмущенную систему в виде

$$y(m+1) = (A(m) + Q(m))y(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Систему (2) будем называть *аддитивно возмущенной* по отношению к системе (1), а сами возмущения $Q(\cdot)$ — *аддитивными*. Чтобы возмущенная система (2) обладала полным спектром показателей Ляпунова, состоящим из n чисел, достаточно потребовать от аддитивного возмущения $Q(\cdot)$ полной ограниченности матрицы $A(\cdot) + Q(\cdot)$. По этой причине введем понятие допустимого аддитивного возмущения.

Определение 2. Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ будем называть *допустимым* для системы (1), если матрица $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{Z}_{m_0}$.

Лемма 1. Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ допустимо для системы (1) в том и только в том случае, когда существует такая вполне ограниченная матрица $R: \mathbb{Z}_{m_0} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, что

$$Q(m) = A(m)R(m) - A(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ допустимо для (1). Положим

$$R(m) = A^{-1}(m)(A(m) + Q(m)), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Тогда равенство (3) выполнено, а из полной ограниченности матриц $A(\cdot)$ и $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вытекает полная ограниченность $R(\cdot)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $R(\cdot)$ вполне ограничена. Определим матрицу $Q(\cdot)$ равенством (3). Тогда

$$A(m) + Q(m) = A(m)R(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad (4)$$

и полная ограниченность матрицы $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вытекает из полной ограниченности $A(\cdot)$ и $R(\cdot)$. Лемма доказана.

Равенство (4) позволяет записать возмущенную по отношению к (1) систему в виде

$$y(m+1) = A(m)R(m)y(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Матрицу $R(\cdot)$ в этом случае называем *мультипликативным возмущением* системы (1), а саму систему (5) — *мультипликативно возмущенной* по отношению к системе (1). Если матрица $A(\cdot)R(\cdot)$ вполне ограничена, то полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (5) состоит из n чисел. Так как по условию матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена, то приходим к следующему определению.

Определение 3. Мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ будем называть *допустимым*, если матрица $R(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{Z}_{m_0}$.

Из леммы 1 и определений 2 и 3 вытекает следствие.

Следствие 1. Множество $\mathcal{Q}$ всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида (2) совпадает со множеством $\mathcal{R}$ всех допустимо мультипликативно возмущенных систем вида (5).

Теперь рассмотрим подмножества множеств $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$. Для произвольного $\delta > 0$ обозначим через $\mathcal{Q}_\delta$ множество всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида (2), возмущения $Q(\cdot)$ которых удовлетворяют неравенству $\sup_{m \geq m_0} \|Q(m)\| < \delta$, а через $\mathcal{R}_\delta$ — множество всех допустимо мультипликативно возмущенных систем вида (5), возмущения $R(\cdot)$ которых удовлетворяют неравенству $\sup_{m \geq m_0} \|R(m) - E\| < \delta$.

Лемма 2. Для каждого $\delta > 0$ справедливы включения $\mathcal{Q}_\delta \subset \mathcal{R}_{\delta\delta}$, $\mathcal{R}_\delta \subset \mathcal{Q}_{\delta\delta}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала первое включение. Пусть допустимое аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ таково, что $\sup_{m \geq m_0} \|Q(m)\| < \delta$. Тогда система (2) с матрицей коэффициентов $A(\cdot) + Q(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{Q}_\delta$. Положим

$$R(m) = E + A^{-1}(m)Q(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Тогда из леммы 1 следует, что $R(\cdot)$ — допустимое мультипликативное возмущение, причем $R(m) - E = A^{-1}(m)Q(m)$, поэтому $\sup_{m \geq m_0} \|R(m) - E\| < \delta\delta$. Это означает, что система (5) с матрицей коэффициентов $A(\cdot)R(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_{\delta\delta}$. Но при всех m справедливы равенства $A(m)R(m) = A(m) + Q(m)$, откуда вытекает доказываемое включение.

Теперь докажем второе включение. Пусть допустимое мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ таково, что $\sup_{m \geq m_0} \|R(m) - E\| < \delta$. Тогда система (5) с матрицей коэффициентов $A(\cdot)R(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_\delta$. Определим матрицу $Q(\cdot)$ равенством (3). Тогда из леммы 1 следует, что $Q(\cdot)$ — допустимое аддитивное возмущение, причем

$$\sup_{m \geq m_0} \|Q(m)\| \leq \sup_{m \geq m_0} (\|A(m)\| \|R(m) - E\|) < \delta\delta.$$

Это означает, что система (2) с матрицей коэффициентов $A(\cdot) + Q(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{Q}_{a\delta}$. Но при всех m справедливы равенства $A(m)R(m) = A(m) + Q(m)$, что и доказывает лемму.

Для произвольного допустимого аддитивного возмущения $Q(\cdot)$ обозначим через

$$\lambda(A + Q) = (\lambda_1(A + Q), \dots, \lambda_n(A + Q)) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$$

полный спектр показателей Ляпунова системы (2). Спектральное множество системы (1), отвечающее классу всевозможных допустимых для этой системы аддитивных возмущений, будем обозначать $\lambda(\mathcal{Q})$. Аналогично для произвольного $\delta > 0$ положим $\lambda(\mathcal{Q}_\delta)$ — спектральное множество системы (1), отвечающее классу допустимых аддитивных возмущений $Q(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\sup_{m \geq m_0} \|Q(m)\| < \delta$.

Далее, пусть

$$\lambda(AR) = (\lambda_1(AR), \dots, \lambda_n(AR)) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$$

— полный спектр показателей Ляпунова системы (5) для произвольного допустимого мультипликативного возмущения $R(\cdot)$. Спектральное множество системы (1), отвечающее классу всевозможных мультипликативных возмущений, обозначаем $\lambda(\mathcal{R})$, а для произвольного $\delta > 0$ положим $\lambda(\mathcal{R}_\delta)$ — спектральное множество системы (1), отвечающее классу допустимых мультипликативных возмущений $R(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\sup_{m \geq m_0} \|R(m) - E\| < \delta$.

Тогда из следствия 1 и леммы 2 получаем такое утверждение.

Следствие 2. *Множества $\lambda(\mathcal{Q})$ и $\lambda(\mathcal{R})$ совпадают. Для каждого $\delta > 0$ имеют место включения $\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \subset \lambda(\mathcal{R}_{a\delta})$, $\lambda(\mathcal{R}_\delta) \subset \lambda(\mathcal{Q}_{a\delta})$.*

Наша задача — исследовать спектральные множества $\lambda(\mathcal{R})$ и $\lambda(\mathcal{R}_\delta)$. В этой статье поставленная задача решается для случая, когда показатели Ляпунова системы (1) устойчивы.

Определение 4. Показатели Ляпунова системы (1) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой аддитивно возмущенной системы вида (2) из множества $\mathcal{Q}_\delta$ выполнены неравенства

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(A + Q)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

то есть имеет место включение $\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \subset O_\varepsilon(\lambda(A))$.

Определение 4 представляет собой непосредственный перенос на линейные системы с дискретным временем аналогичного определения для линейных систем с непрерывным временем (см., например, [3, с. 72]).

Из леммы 2 вытекает, что определение 4 эквивалентно следующему определению.

Определение 5. Показатели Ляпунова системы (1) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой мультипликативно возмущенной системы вида (5) из множества $\mathcal{R}_\delta$ выполнены неравенства

$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

то есть имеет место включение $\lambda(\mathcal{R}_\delta) \subset O_\varepsilon(\lambda(A))$.

Пусть $X(m, s)$ — матрица Коши системы (1), то есть такое отображение $X : \mathbb{Z}_{m_0} \times \mathbb{Z}_{m_0} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, что для каждого решения $x(\cdot)$ этой системы имеет место равенство

$$x(m) = X(m, s)x(s) \quad \text{для всех } m \in \mathbb{Z}_{m_0}, s \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Тогда [2, с. 13–14]

$$X(m, s) = \begin{cases} \prod_{l=s}^{m-1} A(l) & \text{при } m > s, \\ E & \text{при } m = s, \\ X^{-1}(s, m) & \text{при } m < s. \end{cases}$$

Здесь и всюду ниже полагаем $\prod_{l=s}^{m-1} A(l) = A(m-1)A(m-2) \cdot \dots \cdot A(s)$, то есть матрицы перемножаются в порядке убывания индекса.

По аналогии с системами с непрерывным временем, введем понятия центральных показателей системы (1). Эти показатели играют ключевую роль в поведении показателей Ляпунова при возмущениях коэффициентов системы (1).

Определение 6. *Верхним центральным показателем* (Винограда) системы (1) будем называть величину

$$\Omega(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=m_0+1}^m \ln \|X(jT, (j-1)T)\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=m_0+1}^m \ln \left\| \prod_{l=(j-1)T}^{jT-1} A(l) \right\|,$$

младшим центральным показателем (Миллионщикова) — величину

$$\varpi(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{lT} \sum_{j=m_0+1}^m \ln \|X((j-1)T, jT)\|^{-1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=m_0+1}^m \ln \left\| \left(\prod_{l=(j-1)T}^{jT-1} A(l) \right)^{-1} \right\|^{-1}.$$

Величины T и m здесь считаем пробегающими $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_{m_0}$ соответственно.

Замечание 1. Понятие верхнего центрального показателя для систем с непрерывным временем было введено Р. Э. Виноградом в работе [4], а понятие младшего центрального показателя — В. М. Миллионщиковым в работе [5].

Определение 7. *Преобразованием Ляпунова* системы (1) называется линейное преобразование вида

$$z = L(m)x, \quad (6)$$

где матрица $L : \mathbb{Z}_{m_0} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ вполне ограничена. Матрица $L(\cdot)$ при этом называется *матрицей Ляпунова*.

Замечание 2. Преобразование (6) переводит систему (1) в систему

$$z(m+1) = L(m+1)x(m+1) = L(m+1)A(m)x(m) = L(m+1)A(m)L^{-1}(m)z(m) \quad (7)$$

с вполне ограниченной матрицей коэффициентов, сохраняя при этом такие асимптотические (при $m \rightarrow \infty$) характеристики системы, как полный спектр показателей Ляпунова, центральные показатели, свойство устойчивости и т.п.

Можно доказать, что для линейных систем с дискретным временем имеет место следующий критерий устойчивости показателей Ляпунова. Для систем с непрерывным временем он был установлен В. М. Миллионщиковым в работе [6] и Б. Ф. Быловым, Н. А. Изобовым в работе [7].

Теорема 1. *Показатели Ляпунова системы (1) устойчивы тогда и только тогда, когда существует преобразование Ляпунова (6), приводящее систему (1) к системе*

$$z(m+1) = D(m)z(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (8)$$

с блочно-диагональной матрицей $D(m) = \text{diag}(D_1(m), \dots, D_p(m))$, обладающей следующими свойствами:

- 1) для каждого $j \in \{1, \dots, p\}$ матрица $D_j(m)$ нижняя треугольная размерами $n_j \times n_j$;
- 2) имеют место равенства $\Omega(D_j) = \varpi(D_j) = \Lambda_j$, $j = 1, \dots, p$;
- 3) блоки $D_1(\cdot), \dots, D_p(\cdot)$ интегрально отделены, то есть существуют такие $\alpha > 1$ и $\gamma > 0$, что при всех $m > s$ и $j \in \{1, \dots, p-1\}$ справедливы неравенства

$$\left\| \left(\prod_{l=s}^{m-1} D_{j+1}(l) \right)^{-1} \right\|^{-1} \geq \gamma \alpha^{m-s} \left\| \prod_{l=s}^{m-1} D_j(l) \right\|.$$

Замечание 3. Из свойства 2) теоремы 1 вытекает (см. [6, 7]), что диагональные элементы $d_{ii}(m)$ матрицы $D(m)$ таковы, что при всех $j \in \{1, \dots, p\}$ и $i \in n_j$

$$\overline{d_{ii}} \doteq \overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} m^{-1} \sum_{l=m_0}^{m-1} \ln |d_{ii}(l)| = \Lambda_j;$$

запись $i \in n_j$ здесь и ниже означает, что $i \in \{n_0 + \dots + n_{j-1} + 1, \dots, n_0 + \dots + n_j\}$, где $n_0 \doteq 0$.

Нас будет интересовать поведение решений нижних треугольных систем. Докажем сначала одно утверждение, касающееся скалярного линейного неоднородного уравнения

$$\varphi(m+1) = a(m)\varphi(m) + g(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

где функция $a : \mathbb{Z}_{m_0} \rightarrow \mathbb{R}$ вполне ограничена. Положим $h(m) = \prod_{l=m_0}^{m-1} a(l)$ при $m > m_0$ и $h(m_0) = 1$.

Утверждение 1. *Общее решение уравнения (9) имеет вид*

$$\varphi(m; C) = h(m) \left(C + \sum_{s=m_0}^{m-1} h^{-1}(s+1)g(s) \right), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad C \in \mathbb{R};$$

здесь считаем, что $\sum_{s=m_0}^{m-1} h^{-1}(s+1)g(s) = 0$ при $m = m_0$.

Доказательство. Очевидно, что общее решение линейного однородного уравнения

$$\varphi(m+1) = a(m)\varphi(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

имеет вид $\varphi_0(m; C) = h(m)C$, $m \in \mathbb{Z}_{m_0}$, $C \in \mathbb{R}$. Общее решение уравнения (9) есть сумма общего решения уравнения (10) и частного решения уравнения (9). Для поиска частного решения уравнения (9) воспользуемся методом вариации произвольной постоянной — это решение будем искать в виде $\varphi(m) = h(m)C(m)$, где $C : \mathbb{Z}_{m_0} \rightarrow \mathbb{R}$ — неизвестная функция. Пусть $C(m_0) = 0$. Докажем индукцией по $m > m_0$, что

$$C(m) = \sum_{s=m_0}^{m-1} h^{-1}(s+1)g(s). \quad (11)$$

Действительно, $\varphi(m_0) = 0$, $\varphi(m_0+1) = h(m_0+1)C(m_0+1)$ и, в силу (9), $\varphi(m_0+1) = a(m_0)\varphi(m_0) + g(m_0) = g(m_0)$, поэтому $C(m_0+1) = h^{-1}(m_0+1)g(m_0)$, то есть равенство (11) при $m = m_0 + 1$ выполнено.

Пусть равенство (11) установлено при некотором $m > m_0$. Докажем его для $m+1$. Так как $\varphi(m+1) = h(m+1)C(m+1) = a(m)\varphi(m) + g(m) = a(m)h(m)C(m) + g(m) = h(m+1)C(m) + g(m)$,

то

$$C(m+1) = C(m) + h^{-1}(m+1)g(m) = \sum_{s=m_0}^m h^{-1}(s+1)g(s).$$

Утверждение доказано.

Следствие 3. *Для каждого решения $\varphi(\cdot)$ уравнения (9) имеет место равенство*

$$\varphi(m) = h(m) \left(\varphi(m_0) + \sum_{s=m_0}^{m-1} h^{-1}(s+1)g(s) \right), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Рассмотрим теперь линейную однородную систему с дискретным временем

$$y(m+1) = F(m)y(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad y \in \mathbb{R}^k, \quad (12)$$

с вполне ограниченной на $\mathbb{Z}_{m_0}$ нижней треугольной матрицей $F(m) = \{f_{ij}(m)\}_{i,j=1}^k$. Положим

$$h_i(m) = \prod_{l=m_0}^{m-1} f_{ii}(l) \text{ при } m > m_0 \text{ и } h_i(m_0) = 1.$$

Системе (12) поставим в соответствие систему

$$\varphi(m+1) = \widehat{F}(m)\varphi(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^k, \quad (13)$$

матрица $\widehat{F}$ которой имеет вид

$$\widehat{F}(m) = \begin{pmatrix} |f_{11}(m)| & 0 & \dots & 0 \\ 1 & |f_{22}(m)| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & |f_{kk}(m)| \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим также мультипликативно возмущенную по отношению к (12) систему

$$z(m+1) = F(m) \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_k}) z(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad z \in \mathbb{R}^k. \quad (14)$$

Лемма 3. Пусть $j \in \{1, \dots, k\}$ фиксировано, $\varphi(\cdot) = \operatorname{col}(\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_k(\cdot))$ — решение системы (13) с начальным условием $\varphi(m_0) = e_j$. Тогда для произвольного набора чисел $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_k$ координаты решения $z(\cdot) = \operatorname{col}(z_1(\cdot), \dots, z_k(\cdot))$ системы (14) с начальным условием $z(m_0) = e_j$ удовлетворяют оценкам

$$|z_i(m)| \leq \alpha^{i-j} e^{\mu_j(m-m_0)} \varphi_i(m), \quad i \in \{1, \dots, k\}, \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad (15)$$

где $\alpha \doteq \sup\{1; |f_{ij}(m)|, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}\}$.

Доказательство. Зафиксируем $j \in \{1, \dots, k\}$. Найдем координаты $\varphi_i(\cdot)$ решения $\varphi(\cdot)$ системы (13), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(m_0) = e_j$.

При всех $i \in \{1, \dots, j-1\}$: $\varphi_i(m) \equiv 0$. Координата $\varphi_j(\cdot)$ является решением задачи Коши $\varphi_j(m+1) = |f_{jj}(m)|\varphi_j(m)$, $\varphi_j(m_0) = 1$, поэтому $\varphi_j(m) = |h_j(m)|$, $m \in \mathbb{Z}_{m_0}$. А при $i > j$ координата $\varphi_i(\cdot)$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению

$$\varphi_i(m+1) = |f_{ii}(m)|\varphi_i(m) + \sum_{l=j}^{i-1} \varphi_l(m)$$

и начальному условию $\varphi_i(m_0) = 0$, поэтому, в силу следствия 3, справедливо равенство

$$\varphi_i(m) = |h_i(m)| \sum_{s=m_0}^{m-1} |h_i^{-1}(s+1)| \sum_{l=j}^{i-1} \varphi_l(s), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Теперь будем доказывать оценки (15).

1) При $i \in \{1, \dots, j-1\}$: $|z_i(m)| = \varphi_i(m) \equiv 0$, и (15) выполнено.

2) Функция $z_j(\cdot)$ является решением задачи Коши $z_j(m+1) = f_{jj}(m)e^{\mu_j}z_j(m)$, $z_j(m_0) = 1$, поэтому

$$z_j(m) = \prod_{l=m_0}^{m-1} f_{jj}(l)e^{\mu_j} = h_j(m)e^{\mu_j(m-m_0)}, \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0},$$

$$|z_j(m)| = |h_j(m)|e^{\mu_j(m-m_0)} = \varphi_j(m)e^{\mu_j(m-m_0)},$$

и оценка (15) при $i = j$ обращается в точное равенство.

3) Пусть неравенство (15) доказано при всех $i \in \{j, \dots, p-1\}$, где $p \in \{j+1, \dots, k\}$. Докажем его для $i = p$. Функция $z_p(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$z_p(m+1) = f_{pp}(m)e^{\mu_p}z_p(m) + \sum_{l=j}^{p-1} f_{pl}(m)e^{\mu_l}z_l(m), \quad z_p(m_0) = 0,$$

поэтому, в силу следствия 3,

$$z_p(m) = h_p(m)e^{\mu_p(m-m_0)} \sum_{s=m_0}^{m-1} h_p^{-1}(s+1)e^{-\mu_p(s+1-m_0)} \sum_{l=j}^{p-1} f_{pl}(s)e^{\mu_l}z_l(s),$$

откуда

$$\begin{aligned} |z_p(m)| &\leq |h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)} \sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{-\mu_p(s+1-m_0)} \sum_{l=j}^{p-1} |f_{pl}(s)|e^{\mu_l}|z_l(s)| \leq \\ &\leq |h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)} \sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{-\mu_p(s+1-m_0)} \alpha \sum_{l=j}^{p-1} e^{\mu_l} \alpha^{l-j} e^{\mu_j(s-m_0)} \varphi_l(s) \leq \\ &\leq |h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)} \sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{-\mu_p(s+1-m_0)} \alpha \cdot \alpha^{p-1-j} e^{\mu_j} e^{\mu_j(s-m_0)} \sum_{l=j}^{p-1} \varphi_l(s) = \\ &= \alpha^{p-j} |h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)} \sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{(\mu_j-\mu_p)(s+1-m_0)} \sum_{l=j}^{p-1} \varphi_l(s) \leq \\ &\leq \alpha^{p-j} |h_p(m)|e^{\mu_p(m-m_0)} e^{(\mu_j-\mu_p)(m-m_0)} \sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)| \sum_{l=j}^{p-1} \varphi_l(s) = \\ &= \alpha^{p-j} |h_p(m)|e^{\mu_j(m-m_0)} \sum_{s=m_0}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)| \sum_{l=j}^{p-1} \varphi_l(s) = \alpha^{p-j} e^{\mu_j(m-m_0)} \varphi_p(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть $F_0(\cdot) = \text{diag}(f_{11}(\cdot), \dots, f_{kk}(\cdot))$ — матрица диагонального приближения для матрицы $F(\cdot)$ системы (12). Заметим, что

$$\begin{aligned} \Omega(F_0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=m_0+1}^m \ln \left\| \prod_{l=(j-1)T}^{jT-1} F_0(l) \right\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=m_0+1}^m \max_{i=1, \dots, k} \sum_{l=(j-1)T}^{jT-1} \ln |f_{ii}(l)|, \\ \overline{\omega}(F_0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=m_0+1}^m \ln \left\| \left(\prod_{l=(j-1)T}^{jT-1} F_0(l) \right)^{-1} \right\|^{-1} = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=m_0+1}^m \min_{i=1, \dots, k} \sum_{l=(j-1)T}^{jT-1} \ln |f_{ii}(l)|. \end{aligned}$$

Аналогично случаю систем с непрерывным временем [8, с. 120–121], можно доказать, что центральные показатели треугольных систем и систем их диагонального приближения совпадают, поэтому в нашем случае $\Omega(F) = \Omega(\widehat{F}) = \Omega(F_0)$, $\overline{\omega}(F) = \overline{\omega}(\widehat{F}) = \overline{\omega}(F_0)$.

Теорема 2. Пусть матрица $F(\cdot)$ системы (12) такова, что $\Omega(F_0) = \overline{\omega}(F_0) = \lambda$. Тогда для любого набора чисел $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_k$ полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (14) состоит из чисел $\lambda + \mu_k \leq \dots \leq \lambda + \mu_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы следует, что показатели Ляпунова системы (12) устойчивы, а ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из k чисел λ . Такими же свойствами обладает и система (13). Отсюда вытекает, что показатель Ляпунова всякого нетривиального решения системы (13) равен числу λ . Кроме того, для всех $i \in \{1, \dots, k\}$

$$\overline{f_{ii}} \doteq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \sum_{l=m_0}^{m-1} \ln |f_{ii}(l)| = \lambda.$$

Зафиксируем произвольное $j \in \{1, \dots, k\}$ и рассмотрим решения $z(\cdot) = \text{col}(z_1(\cdot), \dots, z_k(\cdot))$ и $\varphi(\cdot) = \text{col}(\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_k(\cdot))$ систем (14) и (13) соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $z(m_0) = \varphi(m_0) = e_j$. Тогда при всех $i \in \{1, \dots, k\}$ справедливы неравенства $\lambda[\varphi_i] \leq \lambda[\varphi] = \lambda$. Найдем показатель Ляпунова функции $z(\cdot)$. Из леммы 3 получаем, что при всех $i \in \{1, \dots, k\}$ имеют место оценки (15), поэтому

$$\lambda[z_i] = \lambda[|z_i|] = \lambda[e^{\mu_j(m-m_0)}] + \lambda[\varphi_i] \leq \mu_j + \lambda,$$

при этом

$$\begin{aligned} \lambda[z_j] &= \lambda[e^{\mu_j(m-m_0)}] + \lambda[\varphi_j] = \mu_j + \lambda[|h_j(m)|] = \\ &= \mu_j + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln |h_j(m)| = \mu_j + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \prod_{l=m_0}^{m-1} |f_{jj}(l)| = \mu_j + \overline{f_{jj}} = \mu_j + \lambda. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda[z] = \max_{i=1, \dots, k} \lambda[z_i] = \lambda + \mu_j.$$

Построим фундаментальную систему решений $Z(\cdot) = \{z^1(\cdot), \dots, z^k(\cdot)\}$ системы (14), такую, что $z^j(m_0) = e_j$, $j = 1, \dots, k$. Тогда $\lambda[z^j] = \lambda + \mu_j$, причем этот показатель реализуется j -й координатой решения $z^j(\cdot)$. Докажем, что $Z(\cdot)$ несжимаема [2, с. 55], то есть для любой нетривиальной линейной комбинации $\sum_{j=1}^k \gamma_j z^j(\cdot)$ входящих в $Z(\cdot)$ решений имеет место равенство

$$\lambda\left[\sum_{j=1}^k \gamma_j z^j\right] = \max_{j: \gamma_j \neq 0} \lambda[z^j].$$

Пусть $\gamma = \text{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{R}^k$ — произвольный ненулевой вектор, и $l \in \{1, \dots, k\}$ — наименьший индекс, для которого $\gamma_l \neq 0$. Рассмотрим

$$z(m) = Z(m)\gamma = \sum_{j=1}^k \gamma_j z^j(m) = \sum_{j=l}^k \gamma_j z^j(m).$$

Тогда

$$\lambda[z] \leq \max_{j=l, \dots, k} \lambda[z^j] = \lambda + \mu_l.$$

С другой стороны, фундаментальная матрица $Z(\cdot)$ нижняя треугольная (см. доказательство леммы 3), поэтому l -я координата $z_l^j(\cdot)$ решения $z^j(\cdot)$ равна тождественно нулю при всех $j > l$, и для l -й координаты функции $z(\cdot)$ справедливо равенство

$$z_l(m) = \sum_{j=l}^k \gamma_j z_l^j(m) = \gamma_l z_l^l(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.$$

Тогда $\lambda[z] \geq \lambda[z_l] = \lambda[z_l^l] = \lambda + \mu_l$. Следовательно,

$$\lambda[z] = \lambda + \mu_l = \max_{j: \gamma_j \neq 0} \lambda[z^j].$$

Итак, фундаментальная система решений $Z(\cdot)$ несжимаема. Но тогда в силу теоремы Ляпунова о нормальности [2, с. 55–56] фундаментальная система $Z(\cdot)$ нормальна [2, с. 53], а потому реализует полный спектр показателей Ляпунова системы (14). Следовательно, полный спектр этой системы состоит из чисел $\lambda + \mu_k, \dots, \lambda + \mu_1$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть показатели Ляпунова системы (1) устойчивы. Тогда спектральное множество $\lambda(\mathcal{R})$ системы (1) при всевозможных допустимых мультипликативных возмущениях ее коэффициентов совпадает со множеством $\mathbb{R}_{\leq}^n$ всех упорядоченных по возрастанию наборов из n чисел, при этом для каждого $\Delta > 0$ найдется такое $\ell = \ell(\Delta) > 0$, что для любого $\delta \in (0, \Delta)$ имеет место включение $O_\delta(\lambda(A)) \subset \lambda(\mathcal{R}_{\ell\delta})$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 построим преобразование Ляпунова (6), приводящее систему (1) к виду (8). Из (7) и (8) следует, что

$$D(m) = L(m+1)A(m)L^{-1}(m). \quad (16)$$

Пусть $\Delta > 0$ фиксировано. Выберем произвольное $\delta \in (0, \Delta)$ и произвольный набор чисел $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in O_\delta(\lambda(A))$ и обозначим $\mu_j = \nu_j - \lambda_j(A)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $|\mu_j| < \delta$ при всех j . Зафиксируем $i \in \{1, \dots, p\}$. Для каждого $i \in n_j$ имеет место равенство $\mu_j = \nu_j - \lambda_i(A)$, поэтому числа μ_j , $j \in n_i$, упорядочены по возрастанию. Упорядочим их по убыванию и полученный набор чисел обозначим η_j , $j \in n_i$. Пусть H_i — диагональная $n_i \times n_i$ -матрица, диагональные элементы которой совпадают с e^{η_j} , $j \in n_i$. Тогда матрица $H \doteq \text{diag}(e^{\eta_1}, \dots, e^{\eta_n})$ совпадает с блочно-диагональной матрицей $\text{diag}(H_1, \dots, H_p)$. Рассмотрим мультипликативно возмущенную по отношению к (8) систему

$$\psi(m+1) = D(m)H\psi(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}, \quad \psi \in \mathbb{R}^n. \quad (17)$$

Это система с блочно-диагональной матрицей, диагональные блоки которой — нижние треугольные матрицы $D_i(m)H_i$, $i = 1, \dots, p$. Рассмотрим фундаментальную систему решений $\Psi(\cdot) = \{\psi^1(\cdot), \dots, \psi^n(\cdot)\}$ системы (17), такую, что $\Psi(m_0) = E$. Так как матрица системы (17) блочно-нижнетреугольная, то такую же структуру имеет и $\Psi(\cdot)$. Из доказательства теоремы 2 следует, что $\lambda[\psi^j] = \eta_j + \lambda_i(A) \doteq \beta_j$, $j \in n_i$, $i \in \{1, \dots, p\}$. Заметим, что набор чисел $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ совпадает с набором $\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$, но второй набор упорядочен по возрастанию. Кроме того, для каждого $i \in \{1, \dots, p\}$ набор $\{\beta_j\}_{j \in n_i}$ совпадает с набором $\{\nu_j\}_{j \in n_i}$, но первый упорядочен по убыванию, а второй по возрастанию. Отсюда следует, что $\max_{j \in n_{i-1}} \beta_j \leq \min_{j \in n_i} \beta_j$ при всех $i \in \{2, \dots, p\}$.

Докажем несжимаемость $\Psi(\cdot)$. Из нее будет следовать нормальность $\Psi(\cdot)$ и то, что полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (17) состоит из чисел $\nu_1 \leq \dots \leq \nu_n$.

Действительно, рассмотрим произвольную нетривиальную линейную комбинацию входящих в $\Psi(\cdot)$ решений: $\psi(\cdot) = \sum_{j=1}^n \gamma_j \psi^j(\cdot)$. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ — произвольно, причем $k \in n_i$.

Обозначим $I_k \doteq \{j \in n_i : j \leq k\}$. Так как $\Psi(\cdot)$ блочно-нижнетреугольная, то для k -й координаты решения $\psi(\cdot)$ имеем равенство $\psi_k(\cdot) = \sum_{j \in I_k} \gamma_j \psi_k^j(\cdot)$, откуда $\lambda[\psi_k] \leq \max_{j \in I_k} \lambda[\psi_k^j] \leq \max_{j \in I_k} \lambda[\psi^j]$.

Пусть $s \in \{1, \dots, n\}$ — наибольший индекс, для которого $\gamma_s \neq 0$, и пусть $s \in n_{i_0}$. Найдем наименьший индекс $l \in n_{i_0}$, для которого $\gamma_l \neq 0$. Тогда $\max_{j: \gamma_j \neq 0} \lambda[\psi^j] = \beta_l$. Для доказательства несжимаемости $\Psi(\cdot)$ надо установить, что $\lambda[\psi] = \beta_l$. В самом деле, $\lambda[\psi_k] \leq \max_{j \in n_{i_0-1}} \beta_j \leq \beta_l$ при

всех $k \in \{1, \dots, l-1\}$. Для координаты $\psi_l(\cdot)$ справедливы равенства $\psi_l(\cdot) = \sum_{j \in I_l} \gamma_j \psi_l^j(\cdot) = \gamma_l \psi_l^l(\cdot)$, поэтому $\lambda[\psi_l] = \lambda[\gamma_l \psi_l^l] = \lambda[\psi_l^l] = \beta_l$. Наконец, при $k \in \{l+1, \dots, s\}$: $\lambda[\psi_k] \leq \max_{j \in I_k: \gamma_j \neq 0} \lambda[\psi^j] = \beta_l$.

Следовательно, $\lambda[\psi] = \max_{k=1, \dots, n} \lambda[\psi_k] = \beta_l$. Таким образом, фундаментальная система решений $\Psi(\cdot)$ несжимаема, и полный спектр системы (17) состоит из чисел $\nu_1 \leq \dots \leq \nu_n$.

К системе (17) применим обратное преобразование Ляпунова $\psi = L(m)y$. Тогда, с учетом равенства (16),

$$y(m+1) = L^{-1}(m+1)\psi(m+1) = L^{-1}(m+1)D(m)H\psi(m) =$$

$$\begin{aligned}
&= L^{-1}(m+1)L(m+1)A(m)L^{-1}(m)H\psi(m) = \\
&= A(m)L^{-1}(m)H\psi(m) = A(m)L^{-1}(m)HL(m)y(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}.
\end{aligned}$$

Положим

$$R(m) = L^{-1}(m)HL(m), \quad m \in \mathbb{Z}_{m_0}. \quad (18)$$

Из полной ограниченности матрицы Ляпунова $L(\cdot)$ и невырожденности H вытекает полная ограниченность матрицы $R(\cdot)$. Таким образом, имеем допустимо мультипликативно возмущенную по отношению к (1) систему вида (5). Так как преобразование Ляпунова сохраняет полный спектр, то показатели Ляпунова построенной системы (5) — это набор чисел $\nu_1 \leq \dots \leq \nu_n$.

Пусть $l \doteq \sup_{m \geq m_0} (\|L(m)\| + \|L^{-1}(m)\|)$. Обозначим $\ell = \ell(\Delta) = l^2(e^\Delta - 1)/\Delta$. Докажем, что построенная мультипликативно возмущенная система (5) принадлежит классу $\mathcal{R}_{\ell\delta}$. Действительно, из равенства (18) получаем, что $R(m) - E = L^{-1}(m)(H - E)L(m)$, поэтому $\sup_{m \geq m_0} \|R(m) - E\| \leq l^2 \|H - E\|$. Далее, $\|H - E\| = \max_{j=1, \dots, n} |e^{\eta_j} - 1| = \max_{j=1, \dots, n} |e^{\mu_j} - 1| \leq \max_{j=1, \dots, n} (e^{|\mu_j|} - 1) < e^\delta - 1$. Заметим, что функция $f(t) = (e^t - 1)/t$ строго возрастает на множестве $t > 0$. Поэтому для каждого $\delta \in (0, \Delta)$ имеем неравенство $(e^\delta - 1)/\delta < (e^\Delta - 1)/\Delta$, откуда $e^\delta - 1 < \frac{e^\Delta - 1}{\Delta} \delta$. Следовательно,

$$\sup_{m \geq m_0} \|R(m) - E\| < l^2 \frac{e^\Delta - 1}{\Delta} \delta = \ell \delta.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
3. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1974. Т. 12. С. 71–146.
4. Виноград Р.Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Математический сборник. 1957. Т. 42. № 2. С. 207–222.
5. Миллионщиков В.М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирский математический журнал. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
6. Миллионщиков В.М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1775–1784.
7. Былов Б.Ф., Изобов Н.А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1794–1803.
8. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.

Поступила в редакцию 01.02.2016

Банщикова Ирина Николаевна, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
ассистент, кафедра высшей математики, Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 11.
E-mail: banshnikova.irina@mail.ru

Попова Светлана Николаевна, д. ф.-м. н., зав. кафедрой дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
ведущий научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ps@uni.udm.ru

I. N. Banshchikova, S. N. Popova

On the spectral set of a linear discrete system with stable Lyapunov exponents

Keywords: discrete time-varying linear system, Lyapunov exponents, perturbations of coefficients.

MSC: 39A06, 39A30

Let us fix a certain class of perturbations of the coefficient matrix $A(\cdot)$ for a discrete time-varying linear system

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where $A(\cdot)$ is completely bounded on $\mathbb{Z}$, i. e., $\sup_{m \in \mathbb{Z}} (\|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\|) < \infty$. The spectral set of this system, corresponding to a given class of perturbations, is a collection of all Lyapunov spectra (with multiplicities) for perturbed systems, when the perturbations range over this class all. The main attention is paid to the class $\mathcal{R}$ of perturbed systems

$$y(m+1) = A(m)R(m)y(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

where $R(\cdot)$ is completely bounded on $\mathbb{Z}$, as well as its subclasses $\mathcal{R}_\delta$, where $\sup_{m \in \mathbb{Z}} \|R(m) - E\| < \delta$, $\delta > 0$. For an original system with stable Lyapunov exponents, we prove that the spectral set $\lambda(\mathcal{R})$ of class $\mathcal{R}$ coincides with the set of all ordered ascending sets of n numbers. Moreover, for any $\Delta > 0$ there exists an $\ell = \ell(\Delta) > 0$ such that for any $\delta < \Delta$ the spectral set $\lambda(\mathcal{R}_{\ell\delta})$ contains the δ -neighborhood of the Lyapunov spectrum of the unperturbed system.

REFERENCES

1. Demidovich V.B. On a criterion of stability for difference equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian).
2. Gaishun I.V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Discrete-time systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001, 400 p.
3. Izobov N.A. Linear systems of ordinary differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, issue 1, pp. 46–96.
4. Vinograd R.E. On the central characteristic exponent of a system of differential equations, *Mat. Sb. (N. S.)*, 1957, vol. 42, no. 2, pp. 207–222 (in Russian).
5. Millionshchikov V.M. Proof of attainability of central exponents of linear systems, *Sib. Mat. Zh.*, 1969, vol. 10, no. 1, pp. 99–104 (in Russian).
6. Millionshchikov V.M. Robust properties of linear systems of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1775–1784 (in Russian).
7. Bylov B.F., Izobov N.A. Necessary and sufficient conditions for stability of characteristic exponents of linear system, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1794–1803 (in Russian).
8. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova* (Theory of Lyapunov exponents), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.

Received 01.02.2016

Banshchikova Irina Nikolaevna, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Assistant Lecturer, Department of Higher Mathematics, Izhevsk State Agricultural Academy, ul. Studencheskaya, 11, Izhevsk, 426069, Russia.
E-mail: banshchikova.irina@mail.ru

Popova Svetlana Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
Leading Researcher, Department of Dynamical Systems, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia.
E-mail: ps@uni.udm.ru