E. A. Astashov, On the classification of singularities that are equivariant simple with respect to representations of cyclic groups, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, Volume 26, Issue 2, 155–159

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm160201>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 44.207.124.84

April 26, 2023, 15:56:28

УДК 512.761.5

© *Е. А. Астахов***О КЛАССИФИКАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ, ЭКВИВАРИАНТНО ПРОСТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП¹**

Рассматривается задача классификации ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно различных представлений конечной циклической группы $\mathbb{Z}_m$, $m \geq 3$, на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$, с точностью до эквивариантных автоморфизмов $\mathbb{C}^n$. В случае согласованных скалярных действий группы доказано, что при $n \geq 2$ эквивариантно простых ростков не существует. Этот результат обобщается на случаи, когда действие группы по нескольким переменным в $\mathbb{C}^n$ совпадает с действием группы в $\mathbb{C}$. Кроме того, доказано, что в случае несогласованных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}$ всякий эквивариантно простой росток эквивалентен одному из ростков A_{3k+1} , $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Ключевые слова: классификация особенностей, простые особенности, действие группы, эквивариантные функции.

DOI: 10.20537/vm160201

Введение

Настоящая работа посвящена классификации ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно различных представлений конечной циклической группы $G = \mathbb{Z}_m$ на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$, с точностью до эквивариантных автоморфизмов $\mathbb{C}^n$.

Перечислим некоторые работы, в которых рассматривались частные случаи этой задачи.

В работе [1] дается хорошо известная классификация простых особенностей в неэквивариантном случае (то есть в случае, когда оба действия группы G тривиальны).

В работе [2] дается классификация простых особенностей на многообразии с краем. Эта классификация эквивалентна классификации простых особенностей, инвариантных относительно действия группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ по первой координате:

$$(-1) \cdot (z_1, z_2, \dots, z_n) = (-z_1, z_2, \dots, z_n).$$

В работе [3, раздел 3] дается классификация простых нечетных особенностей, то есть особенностей, эквивариантно простых относительно нетривиальных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. В частности, доказано, что при $n \geq 3$ таких особенностей не существует вовсе.

Основной результат настоящей работы состоит в следующем: в случае согласованных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_m$ на $\mathbb{C}^n$ при $m \geq 3$ и $n \geq 2$ эквивариантно простых ростков не существует (теорема 1). Этот результат обобщается на случаи, когда действие группы по нескольким переменным в $\mathbb{C}^n$ совпадает с действием группы в $\mathbb{C}$ (теорема 2). Кроме того, доказано, что в случае несогласованных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}$ всякий эквивариантно простой росток эквивалентен одному из ростков A_{3k+1} , $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (теорема 3).

§ 1. Основные определения и обозначения

Пусть заданы представления произвольной абелевой группы G на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. Функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называется *инвариантной* относительно первого из этих представлений, если для любых $\lambda \in G$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $f(\lambda \cdot \mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$. Функция $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называется *эквивариантной* относительно пары заданных представлений, если для любых $\lambda \in G$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00409.

имеет место равенство $g(\lambda \cdot \mathbf{z}) = \lambda \cdot g(\mathbf{z})$. (Символом « $\cdot$ » обозначаются соответствующие действия элемента группы на элемент пространства $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}$.) Эти понятия естественным образом переносятся на ростки функций, а также на ростки диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$.

Обозначим через $\mathcal{O}_n^G$ кольцо инвариантных ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, через $\mathcal{O}_n^{GG}$ — множество эквивариантных ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, а через $\mathcal{D}_n^{GG}$ — кольцо эквивариантных ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$. Множество $\mathcal{O}_n^{GG}$ имеет структуру модуля над кольцом $\mathcal{O}_n^G$. Кольцо $\mathcal{D}_n^{GG}$ действует на множестве $\mathcal{O}_n^{GG}$.

Эквивариантный росток функции $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^n$ назовем *эквивариантно простым* относительно заданных представлений группы G , если при всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$ достаточно малая окрестность некоторой (а значит, и любой) точки его орбиты в пространстве r -струй эквивариантных ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ пересекается лишь с конечным числом других орбит и это число остается ограниченным при $r \rightarrow \infty$.

Два эквивариантных ростка $f, g: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с критической точкой $0 \in \mathbb{C}^n$ назовем $\mathcal{R}^{GG}$ -эквивалентными, если существует эквивариантный росток диффеоморфизма $\Phi: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, для которого $g = f \circ \Phi$ (обозначение: $f \sim_{\mathcal{R}^{GG}} g$). Через $\mathcal{D}_n^{GG} g$ будем обозначать орбиту элемента g при действии группы эквивариантных диффеоморфизмов $\mathcal{D}_n^{GG}$ на множестве $\mathcal{O}_n^{GG}$.

Все вышеупомянутые понятия, очевидно, зависят не только от самой группы G , но и от ее действий на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$, хотя обозначения никакой информации о действиях группы в себе не содержат; о каких действиях идет речь, будет в каждом случае ясно из контекста.

§ 2. Скалярные действия группы $\mathbb{Z}_m$, $m \geq 3$

Пусть группа $G = \mathbb{Z}_m$ действует на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$ скалярно:

$$\sigma \cdot (z_1, \dots, z_n) = \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z_1, \dots, \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z_n \right); \quad \sigma \cdot z = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z \quad (2.1)$$

($\sigma \in \mathbb{Z}_m$ — каноническая образующая; $z_i \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$).

При $m = 2$ классификация особенностей, эквивариантно простых относительно представлений (2.1), дается в работе [3, раздел 3]. В остальных случаях имеет место следующий результат.

Теорема 1. *При $m \geq 3$ и $n = 1$ росток g является эквивариантно простым относительно представлений (2.1) тогда и только тогда, когда он $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m \mathbb{Z}_m}$ -эквивалентен одному из следующих ростков:*

$$A_{mk}: x \mapsto x^{mk+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

При $m \geq 3$ и $n \geq 2$ не существует ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно представлений (2.1).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. В этом случае любой росток, эквивариантно относительно представлений (2.1), представим в виде линейной комбинации мономов $\sum_{s \geq s_0} a_s x^{ms+1}$ и $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m \mathbb{Z}_m}$ -эквивалентен своему младшему моному x^{ms_0+1} . При этом достаточно малая окрестность орбиты такого ростка в пространстве r -струй эквивариантных ростков $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ при $r \geq ms_0 + 1$ пересекается лишь с конечным числом других орбит, а именно с орбитами ростков x^{ms+1} , где $1 \leq s < s_0$. Кроме того, различные ростки вида (2.2) попарно $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m \mathbb{Z}_m}$ -неэквивалентны, поскольку имеют разную кратность критической точки в нуле. Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Теперь рассмотрим случай $n \geq 2$. Моном $z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ эквивариантен относительно представлений (2.1) тогда и только тогда, когда $k_1 + \dots + k_n \equiv 1 \pmod m$. Отсюда, в частности, следует, что m -струя эквивариантно простого ростка будет нулевой. Но классификация форм степени 4 и выше при $n \geq 2$ содержит модули (их доставляет, например, двойное отношение четырех точек на проективной прямой). Отсюда следует второе утверждение теоремы. $\square$

§ 3. Нескалярные действия группы $\mathbb{Z}_m$, $m \geq 3$

Теорема 1 допускает обобщение на некоторые случаи нескалярного действия группы $\mathbb{Z}_m$. А именно, пусть группа $\mathbb{Z}_m$, $m \geq 3$, действует на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$ по формулам

$$\begin{aligned}\sigma \cdot (z_1, \dots, z_n) &= \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z_1, \dots, \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z_j, \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)^{p_1} z_{j+1}, \dots, \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)^{p_{n-j}} z_n \right), \\ \sigma \cdot z &= \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right) z,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где $\sigma \in \mathbb{Z}_m$ — каноническая образующая, $z_i \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$; $2 \leq j \leq n$; $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i \not\equiv 1 \pmod{m}$. Тогда имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Не существует ростков функций $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно представлений (3.1).*

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство второго утверждения теоремы 1. В этом случае модули при классификации эквивариантных ростков с особенностью в нуле возникают из-за того, что такие ростки не содержат мономов степени ниже $m + 1$ от переменных $z_1, \dots, z_j$.

Замечание 1. Утверждения теорем 1 и 2 останутся верными, если в формулах (2.1) и (3.1) всюду заменить $\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$ на $\exp\left(\frac{2\pi i k}{m}\right)$, где $\text{НОД}(k, m) = 1$: такое изменение действий группы соответствует замене канонической образующей группы $\mathbb{Z}_m$ на любую другую образующую этой группы.

§ 4. Еще один случай скалярного действия группы $\mathbb{Z}_3$

Пусть группа $G = \mathbb{Z}_3$ действует на $\mathbb{C}^2$ и на $\mathbb{C}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma \cdot (x, y) &= \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) x, \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) y \right); \quad \sigma \cdot z = \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) z \\ (\sigma \in \mathbb{Z}_3 \text{ — каноническая образующая}; \quad x, y, z \in \mathbb{C}).\end{aligned}\tag{4.1}$$

В этом случае классификация эквивариантно простых особенностей дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть $g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток с особенностью в нуле, эквивариантный относительно представлений (4.1). Росток g является эквивариантно простым относительно этих представлений тогда и только тогда, когда он $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3 \mathbb{Z}_3}$ -эквивалентен одному из следующих ростков:*

$$A_{3k+1} : (x, y) \mapsto x^{3k+2} + y^2, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.\tag{4.2}$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами (s, t) . Моному $x^{s_0} y^{t_0}$ будем сопоставлять точку (s_0, t_0) в этом пространстве. Точки (s, t) , соответствующие при таком сопоставлении мономам ростков $g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантных относительно представлений (4.1), лежат на прямых вида $s + t = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Заметим, что эквивариантно простой росток g обязательно должен содержать мономы, для которых соответствующие точки лежат на прямой $s + t = 2$. В самом деле, если росток не содержит таких мономов, то его 4-струя — нулевая. Но тогда росток не может быть эквивариантно простым, поскольку классификация форм степени 5 от двух переменных содержит модули.

Предположим сначала, что эквивариантно простой росток g содержит по крайней мере два монома, для которых соответствующие точки лежат на прямой $s + t = 2$, либо что его 2-струя

содержит только моном xy . Тогда с помощью линейных замен координат в $\mathbb{C}^2$ (которые эквивариантны относительно представлений (4.1)) 2-струю ростка можно привести к виду $x^2 + y^2$. По теореме о конечной определенности (см. [4, раздел 2]), такой росток будет $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$ -эквивалентен своей 2-струе.

Предположим теперь, что 2-струя эквивариантно простого ростка g содержит ровно один моном степени 2, причем только от одной переменной (без ограничения общности можно считать, что это моном y^2). Рассмотрим в $\mathbb{R}_{(s,t)}^2$ прямую $s + t = 2$, проходящую через точки $(0, 2)$ и $(2, 0)$. Будем поворачивать эту прямую против часовой стрелки вокруг точки $(0, 2)$ до тех пор, пока на ней не появятся другие точки, соответствующие мономам ростка g . Это может быть либо точка вида $(3k + 2, 0)$, $k \in \mathbb{N}$, либо точка вида $(3l + 1, 1)$, $l \in \mathbb{N}$ (в последнем случае на той же прямой будет лежать и точка $(6l + 2, 0)$, также соответствующая эквивариантному моному). В обоих случаях с помощью эквивариантной замены координат в $\mathbb{C}^2$ можно добиться того, что из мономов, соответствующих точкам на прямой, росток g будет содержать только мономы y^2 и x^{3k+2} , причем с единичными коэффициентами (во втором случае нужно взять $k = 2l$). Тогда, по теореме о конечной определенности, росток g будет $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$ -эквивалентен ростку $y^2 + x^{3k+2}$. Если же при повороте прямой вплоть до горизонтального положения мы не встретим точек, соответствующих мономам ростка g , то этот росток будет иметь вид $y^2 \cdot f(x, y)$, где f — многочлен с ненулевым свободным членом, инвариантный относительно первого из представлений (4.1). Тогда с помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y\sqrt{f(x, y)}$ росток g приводится к виду $\tilde{y}^2$. Но малая окрестность такого ростка в пространстве r -струй эквивариантных ростков будет пересекаться со всеми орбитами ростков $y^2 + x^{3k+2}$, где $k \leq \frac{r-2}{3}$, и количество таких орбит будет неограниченно возрастать при $r \rightarrow \infty$. Значит, в этом случае росток g не будет эквивариантно простым.

Таким образом, любой росток $g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простой относительно представлений (4.1), $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$ -эквивалентен одному из ростков (4.2). Каждый из ростков (4.2) сам является эквивариантно простым: его малая окрестность в пространстве r -струй эквивариантных ростков при $r \geq 3k + 2$ пересекает лишь конечное число орбит (это орбиты ростков A_{3l+2} , $0 \leq l \leq k$). Отметим также, что ростки A_{3k+2} с различными k попарно неэквивалентны: это следует, например, из того, что у них отличается число Милнора (см., например, [5]). $\square$

Замечание 2. Аналогичный результат имеет место для представлений

$$\sigma \cdot (x, y) = \left(\exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) x, \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right) y \right); \quad \sigma \cdot z = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) z$$

$$(\sigma \in \mathbb{Z}_3 \text{ — каноническая образующая, } x, y, z \in \mathbb{C}).$$

Этот результат получается из предыдущего выбором другой образующей в группе $\mathbb{Z}_3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. № 4. С. 3–25.
2. Арнольд В.И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // УМН. 1978. Т. 33. № 5. С. 91–105.
3. Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions // Journal of Geometry and Physics. 2013. Vol. 71. P. 58–72.
4. Bruce J.W., Kirk N.P., du Plessis A.A. Complete transversals and the classification of singularities // Nonlinearity. 1997. Vol. 10. P. 253–275.
5. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009. 672 с.

Асташов Евгений Александрович, аспирант, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119991, Россия, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1.
E-mail: ast-ea@yandex.ru

E. A. Astashov

On the classification of singularities that are equivariant simple with respect to representations of cyclic groups

Keywords: classification of singularities, simple singularities, group action, equivariant functions.

MSC: 14B05

We consider the problem of classification of function germs $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ that are equivariant simple with respect to various representations of a finite cyclic group $\mathbb{Z}_m$, $m \geq 3$, on $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{C}$ up to equivariant automorphisms of $\mathbb{C}^n$. In the case of matching scalar actions of the group it is shown that for $n \geq 2$ there exist no equivariant simple function germs. This result is generalized to the cases where the group action in several variables in $\mathbb{C}^n$ coincides with the action of the group on $\mathbb{C}$. In addition, it is shown that in the case of non-matching scalar actions of $\mathbb{Z}_3$ on $\mathbb{C}^2$ and on $\mathbb{C}$ any equivariant simple function germ is equivalent to one of the germs A_{3k+1} , $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

REFERENCES

1. Arnol'd V.I. Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k , D_k , E_k and Lagrangian singularities, *Funct. Anal. Appl.*, 1972, vol. 6, no. 4, pp. 254–272.
2. Arnol'd V.I. Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k , C_k , and F_4 and singularities of evolutes, *Russian Mathematical Surveys*, 1978, vol. 33, no. 5, pp. 99–116.
3. Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions, *Journal of Geometry and Physics*, 2013, vol. 71, pp. 58–72.
4. Bruce J.W., Kirk N.P., du Plessis A.A. Complete transversals and the classification of singularities, *Nonlinearity*, 1997, vol. 10, pp. 253–275.
5. Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N. *Singularities of differentiable maps, Volumes I–II*, Boston: Birkhauser, 1985–1988 (Monographs Math., vol. 82–83).

Received 12.05.2016

Astashov Evgenii Aleksandrovich, Post-Graduate Student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, GSP-1, Moscow, 119991, Russia.
E-mail: ast-ea@yandex.ru