I. N. Banshchikova, An example of a linear discrete system with unstable Lyapunov exponents, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, Volume 26, Issue 2, 169–176

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm160203>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.234.197.8

April 26, 2023, 12:14:08

УДК 517.929.2

© *И. Н. Банщикова*

ПРИМЕР ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С НЕУСТОЙЧИВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА ¹

Рассматривается дискретная линейная однородная система

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с вполне ограниченной матрицей $A(\cdot)$ и полным спектром показателей Ляпунова $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$. Показатели Ляпунова системы (1) называются устойчивыми, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой вполне ограниченной на $\mathbb{N}$ $n \times n$ -матрицы $R(\cdot)$, удовлетворяющей оценке $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta$, для полного спектра показателей Ляпунова $\lambda_1(AR) \leq \dots \leq \lambda_n(AR)$ возмущенной системы

$$z(m+1) = A(m)R(m)z(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

справедливо неравенство $\max_{j=1, \dots, n} |\lambda_j(A) - \lambda_j(AR)| < \varepsilon$. В работе построен пример системы вида (1) с неустойчивыми показателями Ляпунова.

Ключевые слова: линейная система с дискретным временем, показатели Ляпунова, возмущения коэффициентов.

DOI: 10.20537/vm160203

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с фиксированным ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_n$ и стандартной нормой $\|\cdot\|$. Через $\mathbb{R}^{n \times n}$ будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной нормой, т.е. операторной нормой, индуцируемой в $\mathbb{R}^{n \times n}$ евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$; $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. Для произвольной функции $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ положим $\|F\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|F(m)\|$.

Множество всех упорядоченных по возрастанию наборов из n вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}_{\leq}^n$. Для произвольного набора $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ положим

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\mu) \doteq \left\{ \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}_{\leq}^n : |\mu_j - \nu_j| < \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots, n \right\},$$

то есть $\mathcal{O}_\varepsilon(\mu)$ — это ε -окрестность набора μ во множестве $\mathbb{R}_{\leq}^n$.

Основным объектом исследований является линейная однородная система с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Будем предполагать, что матрица коэффициентов $A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ системы (1) *вполне ограничена* [1], то есть при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое $c > 0$, что

$$\|A\|_\infty + \|A^{-1}\|_\infty \leq c.$$

Заметим, что

$$\|A\|_\infty + \|A^{-1}\|_\infty \geq \|A(1)\| + \|A^{-1}(1)\| \geq \|A(1)\| + \|A(1)\|^{-1} \geq 2,$$

поэтому $c \geq 2$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00346).

Пусть $X(m, s)$ — матрица Коши системы (1), то есть такое отображение $X : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, что для каждого решения $x(\cdot)$ этой системы имеет место равенство

$$x(m) = X(m, s)x(s) \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}.$$

Тогда [2, с. 13–14]

$$X(m, s) = \begin{cases} \prod_{l=s}^{m-1} A(l) & \text{при } m > s, \\ E & \text{при } m = s, \\ X^{-1}(s, m) & \text{при } m < s. \end{cases}$$

Здесь и всюду ниже полагаем $\prod_{l=s}^{m-1} A(l) = A(m-1)A(m-2) \cdots A(s)$, то есть матрицы перемножаются в порядке убывания индекса.

Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (1) определим его *показатель Ляпунова* равенством

$$\lambda[x] \doteq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \|x(m)\|$$

и обозначим через Λ *спектр показателей Ляпунова* системы (1), то есть множество всех $\lambda \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с показателем λ . Известно [2, с. 51–52], что множество Λ состоит не более чем из n различных чисел и расположено на отрезке $[-\ln c, \ln c]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_p\}$, где $\Lambda_1 < \dots < \Lambda_p$, $p \leq n$. Показатель Ляпунова тривиального решения системы (1) полагаем равным $-\infty$.

Для каждого $j \in \{1, \dots, p\}$ рассмотрим множество E_j всех решений системы (1), показатели которых не превосходят Λ_j . Множество E_0 считаем состоящим из тривиального решения системы (1). Тогда [2, с. 54] каждое из множеств E_j является линейным подпространством, имеют место строгие вложения $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_p$ и неравенства

$$0 = \dim E_0 < \dim E_1 < \dots < \dim E_p = n.$$

Положим

$$n_j = \dim E_j - \dim E_{j-1}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Назовем n_j *кратностью* показателя Λ_j . Отметим, что $n_1 + \dots + n_p = n$. Набор n чисел $\Lambda_1, \dots, \Lambda_1, \dots, \Lambda_p, \dots, \Lambda_p$, где каждое Λ_j повторяется n_j раз, называется *полным спектром показателей Ляпунова* [2, с. 57] системы (1). В дальнейшем будем обозначать его

$$\lambda(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)),$$

считая при этом, что $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$. Таким образом, $\lambda(A) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$.

Для системы (1) рассмотрим возмущенную систему

$$z(m+1) = A(m)R(m)z(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Матрицу $R(\cdot)$ будем называть *мультипликативным возмущением* системы (1), а саму систему (2) — *мультипликативно возмущенной* по отношению к системе (1). Нас будет интересовать вопрос о поведении показателей Ляпунова системы (2) под действием возмущений $R(\cdot)$. Отметим, что если матрица $A(\cdot)R(\cdot)$ этой системы вполне ограничена, то ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из n чисел. Так как по условию матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена, то приходим к следующему определению.

Определение 1 (см. [3]). Мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ будем называть *допустимым*, если матрица $R(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Множество всех допустимых мультипликативных возмущений системы (1) будем обозначать $\mathcal{R}$. Подмножество множества $\mathcal{R}$, состоящее из возмущений, удовлетворяющих оценке $\|R(\cdot) - E\|_\infty < \delta$ с произвольным $\delta > 0$, обозначим $\mathcal{R}_\delta$.

Пусть $\lambda(AR) = (\lambda_1(AR), \dots, \lambda_n(AR)) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$ — полный спектр показателей Ляпунова допустимо мультипликативно возмущенной системы (2).

Определение 2 (см. [3]). Показатели Ляпунова системы (1) называются *устойчивыми*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого возмущения $R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta$ выполнено включение $\lambda(AR) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A))$.

Отметим, что введенное понятие является переносом на системы с дискретным временем аналогичного понятия для систем с непрерывным временем [5, 6], но для систем с непрерывным временем рассматриваются аддитивные возмущения матрицы коэффициентов системы. Если аддитивный подход применить к системе (1), то получим следующие определения.

Определение 3 (см. [3]). Система

$$z(m+1) = (A(m) + Q(m))z(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

называется *аддитивно возмущенной* по отношению к системе (1). Матрица $Q(\cdot)$ при этом называется *аддитивным возмущением* системы (1). Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ называется *допустимым* для системы (1), если матрица $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Полный спектр показателей Ляпунова произвольной допустимо аддитивно возмущенной системы (3) обозначаем

$$\lambda(A + Q) = (\lambda_1(A + Q), \dots, \lambda_n(A + Q)) \in \mathbb{R}_{\leq}^n.$$

Пусть $\mathcal{Q}$ — множество всех допустимых для системы (1) аддитивных возмущений; $\mathcal{Q}_\delta$ — подмножество множества $\mathcal{Q}$, состоящее из возмущений $Q(\cdot)$, для которых $\|Q\|_\infty < \delta$.

Определение 4 (см. [3, 4]). Показатели Ляпунова системы (1) называются *устойчивыми*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого возмущения $Q(\cdot) \in \mathcal{Q}_\delta$ выполнено включение $\lambda(A + Q) \in \mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A))$.

Теорема 1. *Определения 2 и 4 эквивалентны.*

Доказательство вытекает из [3, лемма 2].

Эффект неустойчивости показателей Ляпунова при малых аддитивных возмущениях матрицы коэффициентов линейной системы с непрерывным временем был установлен О. Перроном в работе [7] (см. также [6, с. 23–24], [8, с. 194–195]). Ниже на основании примера Перрона системы с непрерывным временем и неустойчивыми показателями Ляпунова сконструирован соответствующий пример системы с дискретным временем, при этом возмущение матрицы коэффициентов системы (1) построено мультипликативным.

Пример 1. Рассмотрим систему второго порядка

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

с матрицей коэффициентов

$$A(m) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & e^{(m+1) \sin \ln(m+1) - m \sin \ln m - 2a} \end{pmatrix},$$

где параметр a принадлежит интервалу $(0, 1)$.

Рассмотрим решения $x^1(\cdot)$ и $x^2(\cdot)$ системы (4), удовлетворяющие начальным условиям

$$x^j(1) = e_j, \quad j = 1, 2.$$

Тогда при всех $m > 1$

$$x^1(m) = X(m, 1)e_1 = \prod_{l=1}^{m-1} A(l)e_1 = \prod_{l=1}^{m-1} e^{-a}e_1 = \begin{pmatrix} e^{-a(m-1)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2(m) = X(m, 1)e_2 = \prod_{l=1}^{m-1} A(l)e_2 = \prod_{l=1}^{m-1} e^{(l+1)\sin \ln(l+1) - l\sin \ln l - 2a}e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{m\sin \ln m - 2a(m-1)} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя характеристические показатели Ляпунова решений $x^1(\cdot)$ и $x^2(\cdot)$, получим

$$\lambda[x^1] = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \left| e^{-a(m-1)} \right| = -a,$$

$$\begin{aligned} \lambda[x^2] &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \ln \left| e^{m\sin \ln m - 2a(m-1)} \right| = \\ &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{m\sin \ln m - 2a(m-1)}{m} = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sin \ln m + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-2a(m-1)}{m} = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sin \ln m - 2a. \end{aligned}$$

Для вычисления $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sin \ln m$ рассмотрим последовательности $t_k = e^{(2k+1/2)\pi}$ и $m_k = [t_k] + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &\geq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sin \ln m \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sin \ln m_k = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sin(\ln t_k + \ln(m_k/t_k)) = \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(\sin \ln t_k \cos \ln(m_k/t_k) + \cos \ln t_k \sin \ln(m_k/t_k) \right) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \cos \ln(m_k/t_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \ln(m_k/t_k) = \cos \ln \left(\lim_{k \rightarrow \infty} m_k/t_k \right) = \cos \ln 1 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sin \ln m = 1$, и $\lambda[x^2] = 1 - 2a$.

Из условия $a < 1$ вытекает, что $\lambda[x^1] < \lambda[x^2]$, поэтому полный спектр показателей Ляпунова системы (4) состоит из чисел

$$\lambda_1(A) = \lambda[x^1] = -a, \quad \lambda_2(A) = \lambda[x^2] = 1 - 2a.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(t) = e^{-t \sin \ln t}, \quad t \geq 1.$$

Тогда матрицу $A(\cdot)$ системы (4) можно записать в виде

$$A(m) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(m)e^{-2a}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем произвольное $\gamma > 0$ и рассмотрим мультипликативное возмущение

$$R(m) = \{r_{ij}(m)\}_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma \frac{e^{-am}}{\varphi(m)} \int_m^{m+1} \varphi(\tau) d\tau & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Докажем, что оно является допустимым. Для этого рассмотрим свойства функции

$$f(t) = t \sin \ln t, \quad t \geq 1.$$

Так как

$$|f'(t)| = |\sin \ln t + \cos \ln t| = |\sqrt{2} \sin(\ln t + \pi/4)| \leq \sqrt{2}, \quad t \geq 1,$$

то для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\hat{\tau} \in [m, m+1]$, в силу теоремы Лагранжа, выполнено неравенство

$$|f(m) - f(\hat{\tau})| = |m \sin \ln m - \hat{\tau} \sin \ln \hat{\tau}| \leq \max_{t \in [m, m+1]} |f'(t)| \cdot |m - \hat{\tau}| \leq \sqrt{2}.$$

Воспользуемся полученным результатом для оценки величины $\frac{1}{\varphi(m)} \int_m^{m+1} \varphi(\tau) d\tau$. В силу теоремы о среднем для определенного интеграла найдется $\hat{\tau} \in [m, m+1]$ такое, что

$$\int_m^{m+1} \varphi(\tau) d\tau = \varphi(\hat{\tau}),$$

поэтому

$$\frac{1}{\varphi(m)} \int_m^{m+1} \varphi(\tau) d\tau = \frac{\varphi(\hat{\tau})}{\varphi(m)} = e^{m \sin \ln m - \hat{\tau} \sin \ln \hat{\tau}} = e^{f(m) - f(\hat{\tau})} \leq e^{|f(m) - f(\hat{\tau})|} \leq e^{\sqrt{2}}.$$

Из неравенства, связывающего спектральную и максимальную столбцовую норму матрицы [9, с. 378], получаем

$$\begin{aligned} \|R(m)\| &\leq \sqrt{2}(1 + |r_{21}(m)|) = \sqrt{2} \left(1 + \gamma \frac{e^{-am}}{\varphi(m)} \int_m^{m+1} \varphi(\tau) d\tau \right) \leq \\ &\leq \sqrt{2}(1 + \gamma e^{-am} e^{\sqrt{2}}) \leq \sqrt{2}(1 + \gamma e^{\sqrt{2}}), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\|R^{-1}(m)\| = \|R(m)\|$. Следовательно, выбранная функция $R(\cdot)$ является вполне ограниченной и поэтому принадлежит множеству $\mathcal{R}$ допустимых мультипликативных возмущений.

Далее,

$$\|R(m) - E\| = \gamma \frac{e^{-am}}{\varphi(m)} \int_m^{m+1} \varphi(\tau) d\tau \leq \gamma e^{-am} e^{\sqrt{2}} \leq \gamma e^{-a+\sqrt{2}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что если $\gamma < \delta e^{a-\sqrt{2}}$, то $\|R(\cdot) - E\|_\infty < \delta$, то есть $R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta$.

Рассмотрим допустимо мультипликативную возмущенную по отношению к (4) систему

$$y(m+1) = A(m)R(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Матрица коэффициентов этой системы имеет вид

$$A(m)R(m) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-am-2a}}{\varphi(m+1)} \int_m^{m+1} \varphi(\tau) d\tau & \frac{\varphi(m)e^{-2a}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y(m, s)$ — матрица Коши системы (6). Тогда для каждого решения $y(\cdot)$ этой системы и произвольного $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} y(m+1) &= Y(m+1, 1)y(1) = \prod_{l=1}^m A(l)R(l)y(1) = \\ &= A(m)R(m)A(m-1)R(m-1) \dots A(2)R(2)A(1)R(1)y(1) = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-am-2a}}{\varphi(m+1)} \int_m^{m+1} \varphi(\tau) d\tau & \frac{\varphi(m)e^{-2a}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-a(m-1)-2a}}{\varphi(m)} \int_{m-1}^m \varphi(\tau) d\tau & \frac{\varphi(m-1)e^{-2a}}{\varphi(m)} \end{pmatrix} \dots \end{aligned}$$

$$\dots \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-a-2a}}{\varphi(2)} \int_1^2 \varphi(\tau) d\tau & \frac{\varphi(1)e^{-2a}}{\varphi(2)} \end{pmatrix} y(1) = \begin{pmatrix} e^{-ma} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-(2m+1)a}}{\varphi(m+1)} \int_1^{m+1} \varphi(\tau) d\tau & \frac{e^{-2ma}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix} y(1).$$

Следовательно, решения системы (6) с начальными условиями $y^1(1) = e_1$, $y^2(1) = e_2$ имеют вид

$$y^1(m) = \begin{pmatrix} y_1^1(m) \\ y_2^1(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-a(m-1)} \\ \gamma \frac{e^{-(2m-1)a}}{\varphi(m)} \int_1^m \varphi(\tau) d\tau \end{pmatrix}, \quad y^2(m) = \begin{pmatrix} y_1^2(m) \\ y_2^2(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-2(m-1)a}}{\varphi(m)} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $y^2(m) \equiv x^2(m)$, поэтому

$$\lambda[y^2] = \lambda[x^2] = 1 - 2a.$$

Найдем показатель Ляпунова решения $y^1(\cdot)$. С этой целью рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \frac{e^{-2at}}{\varphi(t)} \int_1^t \varphi(\tau) d\tau, \quad t \geq 1.$$

Вновь возьмем последовательности

$$t_k \doteq e^{(2k+1/2)\pi}, \quad m_k \doteq [t_k] + 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\varphi(t_k) = e^{-t_k \sin \ln t_k} = e^{-t_k}.$$

Отметим, что $\varphi(\tau) > 0$ при всех $\tau \geq 1$ и $[t_k e^{-\pi}, t_k e^{-2\pi/3}] \subset [1, t_k] \subset [1, m_k]$, поэтому

$$\int_1^{m_k} \varphi(\tau) d\tau > \int_1^{t_k} \varphi(\tau) d\tau > \int_{t_k e^{-\pi}}^{t_k e^{-2\pi/3}} \varphi(\tau) d\tau \geq t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi} \right) \min_{\tau \in [t_k e^{-\pi}, t_k e^{-2\pi/3}]} \varphi(\tau).$$

Найдем минимальное значение функции $\varphi(\cdot)$ на отрезке

$$J_k \doteq [t_k e^{-\pi}, t_k e^{-2\pi/3}] = [e^{(2k-1/2)\pi}, e^{(2k-1/6)\pi}].$$

Так как

$$\varphi'(t) = -e^{-t \sin \ln t} (\sin \ln t + \cos \ln t) = -\sqrt{2} e^{-t \sin \ln t} \sin(\ln t + \pi/4), \quad (7)$$

то отрезок J_k содержит единственную критическую точку $e^{(2k-1/4)\pi}$ функции $\varphi(\cdot)$, в которой производная функции меняет знак с «+» на «-». Следовательно, минимальное значение функции достигается на одном из концов отрезка J_k . Сравнивая значения функции $\varphi(\cdot)$ на концах отрезка, получаем, что это минимальное значение достигается в левом конце $\tau_k \doteq e^{(2k-1/2)\pi}$, при этом

$$\min_{t \in J_k} \varphi(t) = \varphi(\tau_k) = e^{\tau_k} = e^{t_k e^{-\pi}}.$$

Тогда

$$\int_1^{m_k} \varphi(\tau) d\tau > t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi} \right) e^{t_k e^{-\pi}}.$$

Из равенства (7) получаем, что функция $\varphi(\cdot)$ убывает на отрезке $[e^{(2k-1/4)\pi}, e^{(2k+3/4)\pi}]$, который содержит в себе отрезок $[t_k, m_k]$, поэтому $\varphi(t_k) > \varphi(m_k)$. Кроме того, $m_k \leq t_k + 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi(m_k) &= \frac{e^{-2am_k}}{\varphi(m_k)} \int_1^{m_k} \varphi(\tau) d\tau > \frac{e^{-2a(t_k+1)}}{\varphi(t_k)} \int_1^{m_k} \varphi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{e^{-2a(t_k+1)}}{e^{-t_k}} \int_1^{m_k} \varphi(\tau) d\tau > e^{-2a} e^{(1-2a)t_k} t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi} \right) e^{t_k e^{-\pi}} = \end{aligned}$$

$$= e^{-2a} t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi} \right) e^{(1-2a+e^{-\pi})t_k}.$$

Тогда

$$y_2^1(m_k) = \gamma e^a \psi(m_k) > \gamma e^{-a} t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi} \right) e^{(1-2a+e^{-\pi})t_k},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \lambda[y^1] &\geq \lambda[y_2^1] \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} m_k^{-1} \ln |y_2^1(m_k)| \geq \\ &\geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln t_k + (1 - 2a + e^{-\pi})t_k}{m_k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln t_k + (1 - 2a + e^{-\pi})t_k}{t_k} \cdot \frac{t_k}{m_k} = 1 - 2a + e^{-\pi}. \end{aligned}$$

Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(AR)$ возмущенной системы (6) состоит из чисел

$$\lambda_1(AR) = \lambda[y^2] = 1 - 2a, \quad \lambda_2(AR) = \lambda[y^1] \geq 1 - 2a + e^{-\pi},$$

а спектр $\lambda(A)$ невозмущенной системы (4) — из чисел

$$\lambda_1(A) = \lambda[x^1] = -a, \quad \lambda_2(A) = \lambda[x^2] = 1 - 2a.$$

Возьмем $\varepsilon = (1 - a)/2 > 0$. Для любого $\delta > 0$ найдется допустимое мультипликативное возмущение $R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta$ вида (5), где $\gamma < \delta e^{a-\sqrt{2}}$, такое, что

$$|\lambda_1(AR) - \lambda_1(A)| = \lambda_1(AR) - \lambda_1(A) = 1 - 2a + a = 1 - a > \varepsilon.$$

Следовательно, $\lambda(AR) \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A))$. Это означает, что показатели Ляпунова системы (4) неустойчивы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
3. Банщикова И.Н., Попова С.Н. О спектральном множестве дискретной системы с устойчивыми показателями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 15–26.
4. Czornik A. Perturbation theory for Lyapunov exponents of discrete linear systems. Kraków: AGH University of Science and Technology Press, 2012. 110 p.
5. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1974. Т. 12. С. 71–146.
6. Изобов Н.А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006. 319 с.
7. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Z., 1930. Bd. 31. S. 748–766.
8. Адрианова Л.Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 1992. 240 с.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

Поступила в редакцию 01.05.2016

Банщикова Ирина Николаевна, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1;
ассистент, кафедра высшей математики, Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, 426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 11.
E-mail: banshnikova.irina@mail.ru

I. N. Banshchikova**An example of a linear discrete system with unstable Lyapunov exponents***Keywords:* discrete time-varying linear system, Lyapunov exponents, perturbations of coefficients.

MSC: 39A06, 39A30

We consider a discrete time-varying linear system

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

where $A(\cdot)$ is completely bounded on $\mathbb{N}$, i.e., $\sup_{m \in \mathbb{N}} (\|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\|) < \infty$. Let $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ be the Lyapunov spectrum of the system (1). It is called stable if for any $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta > 0$ such that for every completely bounded $n \times n$ -matrix $R(\cdot)$, $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta$, the inequality

$$\max_{j=1, \dots, n} |\lambda_j(A) - \lambda_j(AR)| < \varepsilon$$

holds. We construct an example of the system (1) with unstable Lyapunov spectrum.

REFERENCES

1. Demidovich V.B. On a criterion of stability for difference equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian).
2. Gaishun I.V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Discrete-time systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001, 400 p.
3. Banshchikova I.N., Popova S.N. On the spectral set of a linear discrete system with stable Lyapunov exponents, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'ut. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 15–26 (in Russian).
4. Czornik A. *Perturbation theory for Lyapunov exponents of discrete linear systems*, Kraków: AGH University of Science and Technology Press, 2012, 110 p.
5. Izobov N.A. Linear systems of ordinary differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, issue 1, pp. 46–96.
6. Izobov N.A. *Vvedenie v teoriyu pokazatelei Lyapunova* (Introduction to the theory of Lyapunov exponents), Minsk: Belarusian State University, 2006, 319 p.
7. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, *Math. Z.*, 1930, bd. 31, s. 748–766 (in German).
8. Adrianova L.Ya. *Vvedenie v teoriyu lineinykh sistem differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of linear systems of differential equations), St. Petersburg: Saint Petersburg State University, 1992, 240 p.
9. Horn R.A., Johnson C.R. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1986. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.

Received 01.05.2016

Banshchikova Irina Nikolaevna, Post-Graduate Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia;
 Assistant Lecturer, Department of Higher Mathematics, Izhevsk State Agricultural Academy, ul. Studencheskaya, 11, Izhevsk, 426069, Russia.
 E-mail: banshhikova.irina@mail.ru