Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

G. G. Islamov, Yu. V. Kogan, The difference-differential problem of control by diffusion process, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 1, 121–126

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.208.226.222

April 26, 2023, 16:42:12

УДК 519.633

Г. Г. Исламов, Ю. В. Коган

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ДИФФУЗИИ

Для дифференциально-разностной задачи управления процессом диффузии получен принцип максимума, позволяющий определить такие моменты включения и выключения максимальной мощности источника вещества, при которых внутри параллелепипеда устанавливается допустимый уровень его концентрации при наблюдаемом уровне концентрации этого вещества на границе параллелепипеда.

Ключевые слова: дифференциально-разностная задача, уравнение диффузии, принцип максимума, моменты переключения.

Постановка проблемы

Рассмотрим в течение времени T процесс диффузии вещества в параллелепипеде $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ конкретной среды с коэффициентами пористости $c(x)$ и диффузии $d(x)$. Предполагается, что плотность источников выбросов вещества меняется по закону $F(x, t) = b(x)w(t)$, где управляемая величина $w(t)$ характеризует процент использования максимальной мощности $b(x)$ источника вещества в точке x . Как известно, концентрация $u(x, t)$ вещества во внутренней точке $(x, t) \in G \times (0, T)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению диффузии

$$c(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \text{Div}(d(x) \text{grad } u(x, t)) + F(x, t). \quad (1)$$

Допустим, что датчики на сторонах параллелепипеда G фиксируют изменение концентрации с течением времени:

$$u(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \partial G. \quad (2)$$

Задачу управления концентрацией вещества $u(x, t)$ в рассматриваемом объёме G поставим следующим образом. Требуется построить такое кусочно-постоянное допустимое управление $w(t)$ ($0 \leq w(t) \leq 1$, $t \in (0, T)$), при котором уравнение (1) имеет гладкое решение $u(x, t)$, удовлетворяющее граничному условию (2) и дополнительному ограничению вида

$$u(x, t) \leq \beta(x, t) \quad (3)$$

внутри области $(x, t) \in G \times (0, T)$. Здесь функция $\beta(x, t)$ задаёт предельное допустимое значение концентрации вещества в момент времени t во внутренней точке x параллелепипеда G . Заметим, что мы не фиксируем начальную концентрацию $u(x, 0)$. Как раз её необходимо задать таким образом, чтобы с помощью управления $w(t)$ из заданного диапазона $[0, 1]$ можно было обеспечить допустимую концентрацию (3) при возникающей на границе ∂G параллелепипеда G концентрации (2).

Дискретизация задачи по пространственной переменной

Поставленная задача порождает дифференциально-разностный аналог задачи управления диффузией, описание которой приводится ниже. Введём удобные для этого описания соглашения и обозначения. Если индекс i принимает значения $1, 2, \dots, n$, то будем писать $i = \overline{1, n}$. Пусть $N = (N_1, \dots, N_n)$ есть целочисленный вектор с положительными компонентами. Пусть, далее, мультииндексная переменная $J = (j_1, \dots, j_n)$ ограничена условием $j_k = \overline{0, N_k}, k = \overline{1, n}$. Тогда множество её значений образует целочисленную сетку $0 \leq J \leq N$ (неравенство векторов понимается покомпонентно). Как правило, мы будем отождествлять переменную J с её значением. Мультииндекс J называется внутренним, если при всех $k = \overline{1, n}$ имеем $j_k \neq 0$ и $j_k \neq N_k$. Пусть $J = (j_1, \dots, j_n)$ есть внутренний мультииндекс. Рассматривая уравнение (1) во внутреннем узле

$$x^J = (j_1 h_1, \dots, j_n h_n), \quad h_k = (b_k - a_k)/N_k, k = \overline{1, n}$$

параллелепипеда G , при всех $t \in (0, T)$ имеем точное равенство

$$c(x^J) \frac{\partial u(x^J, t)}{\partial t} = \text{Div}(d(x) \text{grad } u(x, t))|_{x=x^J} + b(x^J)w(t). \quad (4)$$

Для тех же t будем иметь

$$u(x^J, t) \leq \beta(x^J, t). \quad (5)$$

Обозначим через F конечномерное пространство вещественнозначных функций, определённых на конечном множестве внутренних мультииндексов J целочисленной сетки $0 \leq J \leq N$. Пусть вектор-функция $y : (0, T) \rightarrow F$ определяется равенством $y(t)[J] = u(x^J, t)$, а вектор $B \in F$ задаётся как $B[J] = b(x^J)/c(x^J)$. Тогда уравнение (1) может быть записано в виде конечномерной системы дифференциальных уравнений

$$y'(t) = Ay(t) + Bw(t) + \nu(t), \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

Здесь A есть матрица, порождённая одной из распространённых схем дискретизации оператора Лапласа, стоящего в правой части равенства (4).

Вектор-функция $\nu : (0, T) \rightarrow F$ порождена граничным условием (2) и играет роль «помехи», которую необходимо компенсировать с помощью управления $w(t)$ из указанного выше диапазона. В дальнейшем непрерывное неравенство (5) мы заменим дискретным аналогом

$$y(t_i) \leq \beta_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Здесь t_i ($0 < t_i < t_{i+1} < T$) есть моменты наблюдения за концентрацией вещества во внутренних узлах параллелепипеда G , а вектора $\beta_i \in F$ порождены выражениями $\beta(x^J, t_i)$. В наших обозначениях вектор $y(0) \in F$ характеризует начальную концентрацию вещества во внутренних узлах параллелепипеда G . Теперь мы в состоянии применить результаты работы [1] для получения необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (6)–(7) при заданном допустимом управлении $w(t)$, а также принципа максимума для указания точек переключения кусочно-постоянного управления $w(t)$, принимающего лишь крайние значения 0 и 1.

Принцип максимума для задачи управления

Если линейный функционал λ принадлежит сопряжённому пространству F^* и вектор $g \in F$, то $\lambda \cdot g$ обозначает значение этого функционала на элементе g . Функционал λ называется неотрицательным, если $\lambda \cdot g \geq 0$ для всех $g \geq 0$, $g \in F$.

Теорема 1. *Задача (6) – (7) разрешима тогда и только тогда, когда неравенство*

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \left(\beta_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i-s)} \{Bw(s) + \nu(s)\} ds \right) \geq 0 \quad (8)$$

имеет место для любого семейства неотрицательных функционалов $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ из сопряженного пространства F^ , удовлетворяющего уравнению*

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i e^{At_i} = 0. \quad (9)$$

З а м е ч а н и е 1. В действительности неравенство (8) достаточно проверить на конечном числе образующих конуса неотрицательных решений уравнения (9), для отыскания которых можно применить вычислительную схему Н. В. Черниковой [1] либо воспользоваться модификацией симплекс-метода.

Доказательство теоремы 1 соответствует схеме работы [1] и приводится исключительно в интересах читателя.

Обозначим $f(t) = Bw(t) + \nu(t)$, $q = y(0)$. Тогда решение системы (6) имеет вид

$$y(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds + e^{At} q.$$

Подставляя его в условия (7), получим систему неравенств

$$e^{At_i} q \leq \beta_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i-s)} f(s) ds.$$

В силу обобщения теоремы Фредгольма [1] данная система неравенств имеет решение относительно $q \in \mathbb{R}^n$ (n — число внутренних мультииндексов J целочисленной сетки $0 \leq J \leq N$) в том и только том случае, когда неравенство (8) имеет место для любого семейства неотрицательных функционалов $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ из сопряженного пространства F^* , удовлетворяющего уравнению (9). $\square$

Теорема 2. Пусть $\nu(t)$ есть допустимая помеха для задачи управления (6) – (7), то есть найдётся такое допустимое управление $w(t)$ ($0 \leq w(t) \leq 1$, $t \in (0, T)$), при котором указанная задача разрешима. Тогда для некоторого нетривиального семейства неотрицательных функционалов $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ из сопряжённого пространства F^* , удовлетворяющего уравнению (9), найдётся компенсирующее помеху $\nu(t)$ допустимое управление $w^*(t)$, удовлетворяющее при почти всех $s \in (0, T)$ принципу максимума

$$\varphi(s)w^*(s) = \max_{0 \leq w \leq 1} \varphi(s)w,$$

где скалярная функция $\varphi(s) = -\sum_{i=1}^m \text{sign}(t_i - s)^+ \lambda_i \cdot e^{A(t_i-s)} B$. Здесь используется положительная часть $\sigma^+ = (\sigma + |\sigma|)/2$ числа σ .

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно установить следующее свойство кусочно-непрерывной функции $\varphi(s)$, концы интервалов знакопостоянства которой определяют точки переключения в нашей задаче управления диффузией вещества в параллелепипеде G : $\varphi(s) \equiv 0$ при $s \notin (t_1, t_m)$ и $\varphi(s) = -\gamma_k \cdot e^{-As} B$ при $s \in (t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{2, m}$, где функционалы $\gamma_k = \sum_{i=k}^m \lambda_i e^{At_i}$, причём $\gamma_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i e^{At_i} = 0$, и для функционала λ_k имеем представление $\lambda_k = (\gamma_{k+1} - \gamma_k) e^{-At_k}$, $k = \overline{1, m-1}$, $\lambda_m = \gamma_m e^{-At_m}$. Выбирая соответствующим образом функционалы γ_k , $k = \overline{2, m}$ и считая, что

$\gamma_1 = 0$, из последних формул получим любое неотрицательное решение $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ системы (9).

Приводимое ниже доказательство теоремы 2 повторяет идею доказательства принципа максимума работы [1]. Пусть $\{\lambda_i^{(1)}\}_{i=1}^m, \dots, \{\lambda_i^{(l)}\}_{i=1}^m$ — образующие конуса неотрицательных решений уравнения (9). В силу теоремы 1 компенсирующее помеху $\nu(t)$ допустимое управление $w(t) = w_\nu(t)$ удовлетворяет неравенству (8), где вместо $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ берутся семейства функционалов $\lambda^{(j)} = \{\lambda_i^{(j)}\}_{i=1}^m, j = \overline{1, l}$. Рассмотрим конечномерные множества

$$V = \{g = (g_1, \dots, g_m) \in \mathbb{R}^{nm} : \lambda^{(j)} \cdot g = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(j)} \cdot g_i \geq 0, j = \overline{1, l}\},$$

$$W_\nu = \{g = (g_1, \dots, g_m) \in \mathbb{R}^{nm} : g_i = \beta_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i-s)} \{Bw(s) + \nu(s)\} ds, \\ i = \overline{1, m}\},$$

где w пробегает все измеримые управления с $w(s) \in [0, 1]$ при почти всех $s \in [0, T]$. Пересечение $V \cap W_\nu$ не пусто, так как $\nu(s)$ — допустимая помеха. Кроме того, V и W_ν выпуклы и замкнуты, причём V — конус с непустой внутренностью $\text{int } V$, а W_ν — компакт. Пусть направление α является нетривиальной неотрицательной линейной комбинацией образующих $\{\lambda_i^{(1)}\}_{i=1}^m, \dots, \{\lambda_i^{(l)}\}_{i=1}^m$ конуса неотрицательных решений уравнения (9). Найдётся граничная точка g^* компакта $V \cap W_\nu$ такая, что $\alpha g^* \geq \alpha g$ при всех $g \in V \cap W_\nu$. Допустим, что $h \in \text{int } V$ и $g^* + h \in V \cap W_\nu$. Тогда $\alpha(g^* + h) \leq \alpha g^*$ и, значит, $\alpha h \leq 0$. Однако для $h \in \text{int } V$ имеем $\lambda^{(j)} \cdot h > 0, j = \overline{1, l}$ и, следовательно, $\alpha \cdot h > 0$. Возникающее противоречие показывает, что $(g^* + \text{int } V) \cap V \cap W_\nu = \emptyset$. Так как $g^* \in V$, то $(g^* + \text{int } V) \cap V = (g^* + \text{int } V)$. Следовательно, $(g^* + \text{int } V) \cap W_\nu = \emptyset$. Согласно первой теореме отделимости открытое множество $(g^* + \text{int } V)$ и выпуклый компакт W_ν можно разделить гиперплоскостью $\lambda_\nu \cdot g = \lambda_\nu \cdot g^*$. Будем считать, что $\lambda_\nu \cdot g \leq \lambda_\nu \cdot g^*$ при всех $g \in W_\nu$. Тогда $\lambda_\nu \cdot h \geq 0$ при всех $h \in V$. По теореме Фаркаша λ_ν есть нетривиальная неотрицательная линейная комбинация образующих $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(l)}$ конуса неотрицательных решений уравнения (9), то есть семейство λ_ν образует неотрицательное решение этого уравнения. Элементу $g^* \in W_\nu$ соответствует допустимое управление $w^*(t)$ такое, что неравенство (8) выполнено при $w(s) = w^*(s)$ и семействе функционалов $\{\lambda_i\}_{i=1}^m = \lambda_\nu = \{\lambda_{\nu i}\}_{i=1}^m$. Заметим, что $w^*(s)$ удовлетворяет формулируемому в теореме 2 принципу

максимума при $\lambda_i = \lambda_{\nu i}, i = \overline{1, m}$. Действительно, так как

$$-\sum_{i=1}^m \int_0^{t_i} \lambda_{\nu i} e^{A(t_i-s)} B w(s) ds = \int_0^T \varphi(s) w(s) ds,$$

то если $w^*(s)$ не удовлетворяет принципу максимума при указанном семействе $\{\lambda_{\nu i}\}_{i=1}^m$, то выберем допустимое управление $\tilde{w}(s)$, удовлетворяющее принципу максимума. Тогда на множестве положительной меры отрезка $[0, T]$ имеем $\varphi(s)\tilde{w}(s) > \varphi(s)w^*(s)$. Отсюда для элемента $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m)$ из W_ν , где

$$\tilde{g}_i = \beta_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i-s)} \{B\tilde{w}(s) + \nu(s)\} ds, \quad i = \overline{1, m},$$

получим $\lambda_\nu \tilde{g} > \lambda_\nu g^*$. Это противоречит оптимальности g^* . $\square$

Полученные в работе результаты служат теоретическим обоснованием распределённых и параллельных программ расчёта на кластере Удмуртского государственного университета точек переключения в дифференциально-разностной задаче управления диффузией.

* * *

1. Исламов Г. Г. О допустимых помехах линейных управляемых систем // Изв. вузов. Математика. 2002. № 2. С. 37–40.

Поступила в редакцию 01.09.07

G. G. Islamov, Y. V. Kogan

The difference-differential problem of control by diffusion process

There are formulated and proved the maximum principle in the control problem for the difference-differential equation of diffusion.

Исламов Галимзян Газизович
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: gislamov@udm.ru

Коган Юрий Вольфович
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kyvrak@udmnet.ru