Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Kh. Sh. Al' Dzhabri, V. I. Rodionov, On support sets of acyclic and transitive digraphs, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, Volume 27, Issue 2, 153–161

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170201>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.162.127.20

April 26, 2023, 15:23:44

УДК 519.175, 519.115

© *Х. Ш. Аль Джабри, В. И. Родионов*

ОБ ОПОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ АЦИКЛИЧЕСКИХ И ТРАНЗИТИВНЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

В предыдущих работах авторов на множестве всех бинарных отношений множества X введено понятие бинарного рефлексивного отношения смежности и определена алгебраическая система, состоящая из всех бинарных отношений множества X и из всех неупорядоченных пар смежных бинарных отношений. Если X — конечное множество, то эта алгебраическая система — граф (граф бинарных отношений G). В настоящей работе для ациклических и транзитивных орграфов вводится понятие опорного множества: это совокупности $S(\sigma)$ и $S'(\sigma)$, состоящие из вершин орграфа $\sigma \in G$, имеющих нулевую полустепень захода и исхода соответственно. Доказано, что если G_σ — связная компонента графа G , содержащая ациклический или транзитивный орграф $\sigma \in G$, то $\{S(\tau) : \tau \in G_\sigma\} = \{S'(\tau) : \tau \in G_\sigma\}$. Получена формула для числа транзитивных орграфов, имеющих фиксированное опорное множество. Аналогичная формула для числа ациклических орграфов, имеющих фиксированное опорное множество, получена авторами ранее.

Ключевые слова: перечисление графов, ациклический орграф, транзитивный орграф.

DOI: [10.20537/vm170201](https://doi.org/10.20537/vm170201)

1. Граф бинарных отношений. Пусть $B \doteq \{0, 1\}$ — булево множество, X — произвольное множество, а $X^2 \doteq X \times X$ — прямое произведение. Функции $X^2 \rightarrow B$ будем называть *характеристическими*. Всякое подмножество $\sigma \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X , порождает характеристическую функцию

$$\chi_\sigma: X^2 \rightarrow B, \quad \chi_\sigma(x, y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in \sigma, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Далее, функцию $\chi_\sigma(\cdot, \cdot)$ будем обозначать через $\sigma(\cdot, \cdot)$. С другой стороны, всякая характеристическая функция $\chi: X^2 \rightarrow B$ порождает бинарное отношение $\sigma_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x, y) \in \sigma_\chi$, если $\chi(x, y) = 1$. Отображение $\sigma \rightarrow \sigma(\cdot, \cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций. В силу этого обстоятельства мы называем подмножества $\sigma \subseteq X^2$ как отношениями, так и функциями (иногда орграфами). В случае $\text{card } X < \infty$ характеристическую функцию можно интерпретировать как бинарную матрицу (матрицу, состоящую из 0 и 1).

Отношения $\sigma, \tau \subseteq X^2$ называются *смежными*, если существует дизъюнктное объединение двух подмножеств $X = Y \cup Z$ такое, что

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= 0 \text{ для всех } (x, y) \in Y \times Z, \\ \tau(x, y) &= 0 \text{ для всех } (x, y) \in Z \times Y, \\ \tau(x, y) + \sigma(y, x) &= 1 \text{ для всех } (x, y) \in Y \times Z, \\ \sigma(x, y) &= \tau(x, y) \text{ для всех } (x, y) \in Y^2 \cup Z^2. \end{aligned}$$

(Допускается, что $Y = \emptyset$ или $Z = \emptyset$; в обоих этих случаях $\sigma = \tau$.)

Смежность отношений σ и τ записываем в виде диаграммы $\sigma \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$. Например, для $X = \{1, 2, 3, 4\}$ имеют место диаграммы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\{1\} \times \{2, 3, 4\}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\{2, 4\} \times \{1, 3\}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\{2, 3\} \times \{1, 4\}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, множество X порождает пару $\langle 2^{X^2}, E(X) \rangle$, где через 2^{X^2} обозначено множество

вершин, состоящее из всех бинарных отношений множества X , а $E(X)$ — это множество ребер, состоящее из неупорядоченных пар смежных бинарных отношений множества X (так как допускается, что $Y = \emptyset$, то множество $E(X)$ содержит все петли). Пару $G(X) \doteq \langle 2^{X^2}, E(X) \rangle$ будем называть (неориентированным) *графом бинарных отношений* множества X .

Если $\text{card } X \neq 1$, то диаметр графа $G(X)$ равен 2 (см. [3]). Через $G_\sigma(X)$ будем обозначать ту компоненту связности графа $G(X)$, которая содержит данное отношение $\sigma \in 2^{X^2}$.

2. Арифметические свойства некоторых подграфов графа бинарных отношений. Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X . Через $\mathcal{V}(X)$ обозначим совокупность всех рефлексивно-транзитивных отношений, определенных на множестве X . Через $\mathcal{A}(X)$, $\text{card } X < \infty$, обозначим совокупность всех ациклических отношений (ациклических орграфов), определенных на множестве X .

Пусть отношения $\sigma, \tau \in 2^{X^2}$ смежны. Согласно [1–3] справедливо:

- 1) $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ тогда и только тогда, когда $\tau \in \mathcal{V}_0(X)$;
- 2) $\sigma \in \mathcal{V}(X)$ тогда и только тогда, когда $\tau \in \mathcal{V}(X)$;
- 3) $\sigma \in \mathcal{A}(X)$ тогда и только тогда, когда $\tau \in \mathcal{A}(X)$.

Следовательно, в графе $\langle 2^{X^2}, E(X) \rangle$ определены подграфы

$$\langle \mathcal{V}_0(X), E(X) \rangle, \quad \langle \mathcal{V}(X), E(X) \rangle, \quad \langle \mathcal{A}(X), E(X) \rangle. \quad (1)$$

Далее, полагаем $\text{card } X < \infty$ (считаем, что $X = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$). Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{V}_0^0(X)$ всех помеченных транзитивных орграфов, определенных на X (биекцию определяет процедура замены единичных элементов $\sigma(x, x)$ нулями); в свою очередь, существует взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{T}_0(X)$ всех помеченных T_0 -топологий, определенных на X .

Пусть $T_0(n) \doteq \text{card } \mathcal{V}_0(X) = \text{card } \mathcal{V}_0^0(X) = \text{card } \mathcal{T}_0(X)$. Дополнительно полагаем $T_0(0) \doteq 1$.

В [1] доказано, что количество компонент связности графа $\langle \mathcal{V}_0(X), E(X) \rangle$ равно $T_0(n-1)$.

Заметим, что для любого натурального n справедливы равенства

$$T_0(n) = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} V(p_1, \dots, p_k),$$

$$T_0(n) = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} W(p_1, \dots, p_k), \quad (2)$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1, \dots, p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1 + \dots + p_k = n$. Первую формулу см. в [4–6], а вторую — в [7]. Числа $V(p_1, \dots, p_k)$ и $W(p_1, \dots, p_k)$ обозначают количество частичных порядков специального вида, зависящего от набора $(p_1, \dots, p_k)$. (Определение чисел $V(p_1, \dots, p_k)$ и $W(p_1, \dots, p_k)$ см. ниже в пункте 4.)

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{V}(X)$ и множеством $\mathcal{T}(X)$ всех помеченных топологий, определенных на X .

Пусть $T(n) \doteq \text{card } \mathcal{V}(X) = \text{card } \mathcal{T}(X)$. В силу [4, 8, 9] имеет место равенство

$$T(n) = \sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m),$$

где $S(n, m)$ — это числа Стирлинга 2-го рода. Согласно [2] количество компонент связности графа $\langle \mathcal{V}(X), E(X) \rangle$ равно

$$\sum_{m=1}^n S(n, m) T_0(m-1).$$

Пусть $A_n \doteq \text{card } \mathcal{A}(X)$. Согласно [10] имеет место равенство

$$A_n = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} 2^{(n^2 - p_1^2 - \dots - p_k^2)/2}, \quad (3)$$

а в силу [3] количество компонент связности графа $\langle \mathcal{A}(X), E(X) \rangle$ равно

$$\sum_{p_1 + \dots + p_k = n} (-1)^{n-k} \frac{(n-1)!}{(p_1-1)! p_2! \dots p_k!} 2^{(n^2 - p_1^2 - \dots - p_k^2)/2}. \quad (4)$$

(В обоих случаях суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1, \dots, p_k)$ натуральных чисел, таких, что $p_1 + \dots + p_k = n$.)

Замечание 1. В работе [10] доказаны следующие (более общие) утверждения. Обозначим через $A_n(x) \doteq \sum_r A_{nr} x^r$ многочлен, у которого коэффициент A_{nr} равен числу помеченных ациклических орграфов порядка n , имеющих ровно r дуг. Ясно, что $A_n = A_n(1)$. Используем соглашение $A_0(x) = A_0 = 1$. Многочлен $A_n(x)$ при $n \in \mathbb{N}$ задается формулой

$$A_n(x) = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} (1+x)^{(n^2 - p_1^2 - \dots - p_k^2)/2}$$

(ср. с формулой (3)). Для любого $n \geq 0$ имеет место тождество

$$\sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} (1+x)^{m(n-m)} A_m(x) = \delta_{n0}.$$

Замечание 2. Числа (4) входят в совокупность $\{A_n^{(p)}\}$ при $p = 1$ (см. пункт 7).

3. Примеры подграфов графа бинарных отношений. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$. Ниже представлены 3 компоненты связности графа $\langle \mathcal{V}_0(X), E(X) \rangle$, содержащие 19 частичных порядков:

Граф $\langle \mathcal{V}(X), E(X) \rangle$ содержит 29 рефлексивно-транзитивных отношений. В нем имеется 7 компонент связности: 3 компоненты графа (5) и компоненты

Граф $\langle \mathcal{A}(X), E(X) \rangle$ содержит 25 ациклических отношений. В нем имеется 5 компонент связности: 3 компоненты вида (5) (в них следует заменить элементы множества $\mathcal{V}_0(X)$ на элементы множества $\mathcal{V}_0^0(X)$) и компоненты

При $X = \{1, 2, 3, 4\}$ в графах (1) имеется 219, 355 и 543 вершин соответственно, а количество связных компонент равно 19, 45 и 79 соответственно.

4. Определение чисел $W(p_1, \dots, p_k)$ и $V(p_1, \dots, p_k)$. Зафиксируем $(p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{N}^k$, и пусть $n \doteq p_1 + \dots + p_k$, $X \doteq \{1, \dots, n\}$. Набор $(p_1, \dots, p_k)$ будем называть *разбиением* числа n . Разбиению $(p_1, \dots, p_k)$ соответствует представление отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в блочном виде

$$\begin{vmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \dots & \sigma^{1k} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \dots & \sigma^{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma^{k1} & \sigma^{k2} & \dots & \sigma^{kk} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

в котором на пересечении i -й горизонтальной и j -й вертикальной полос стоит блок σ^{ij} с p_i строками и p_j столбцами. Запись отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в виде (7) будем называть блочным представлением *типа* $(p_1, \dots, p_k)$.

Через $\mathcal{W}(p_1, \dots, p_k)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (7) типа $(p_1, \dots, p_k)$

1) все блоки σ^{ij} , $1 \leq j < i \leq k$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii} , $i = 1, \dots, k$, — единичные матрицы,

и пусть $W(p_1, \dots, p_k) \doteq \text{card } \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k)$.

Через $\mathcal{V}(p_1, \dots, p_k)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k)$ таких, что в блочном представлении (7) типа $(p_1, \dots, p_k)$ в наддиагональных блоках $\sigma^{i-1,i}$, $i = 2, \dots, k$, в каждом столбце имеется хотя бы одна единица (называем такие блоки *невыврожденными*). Заметим, что в силу транзитивности σ все блоки σ^{sr} , $s = 1, \dots, k-1$, $r = s+1, \dots, k$, невырожденные. Применяем обозначение $V(p_1, \dots, p_k) \doteq \text{card } \mathcal{V}(p_1, \dots, p_k)$.

5. Сопоставление формул (2) и (3). Включение $\mathcal{V}_0^0(X) \subset \mathcal{A}(X)$ хорошо известно, причем формулы (2) и (3) для вычисления чисел $\text{card } \mathcal{V}_0^0(X)$ и $\text{card } \mathcal{A}(X)$ имеют одинаковую структуру. Однако если во втором случае формула имеет завершённый вид, то в первом сохраняется проблема вычисления чисел $W(p_1, \dots, p_k)$. В рамках исследований данной проблемы в работах [7, 11] получены семейства уравнений связи между отдельными числами $W(p_1, \dots, p_k)$:

$$W(p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(k)}) = W(p_1, \dots, p_k), \quad \pi \in D_k,$$

где D_k — группа диэдра, порожденная подстановками $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 2 & 3 & \dots & k & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ k & k-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} \sum_{q_1 + \dots + q_r = m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} W(p+1, q_1, \dots, q_r) = \\ = \sum_{q_1 + \dots + q_r = m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} (r+1) W(p, q_1, \dots, q_r), \end{aligned}$$

$$W(p, 1, q, 1) = \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} (2^{q-r} + 1)^p W(p, r, 1) + \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} (2^{p-r} + 1)^q W(r, q, 1).$$

Формулы $W(n) = 1$, $W(p, q) = 2^{pq}$ очевидны. В [11] доказаны следующие явные формулы:

$$W(p, 1, q) = \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} (2^r + 2^q)^p,$$

$$W(p, 2, q) = \sum_{q_1 + \dots + q_4 = q} \frac{q!}{q_1! \dots q_4!} (2^{q_1} + 2^{q_1+q_2} + 2^{q_1+q_3} + 2^q)^p,$$

$$W(p, 1, 1, q) - W(p, 2, q) = \sum_{q_1 + q_2 + q_3 = q} \frac{q!}{q_1! q_2! q_3!} (2^{q_1} + 2^{q_1+q_2} + 2^q)^p.$$

Перечисленные соотношения позволяют вычислить числа $T_0(n)$ для всех $n \leq 7$ (без применения ЭВМ, за счет решения системы линейных уравнений относительно величин $W(p_1, \dots, p_k)$). В [11] отмечено, что для вычисления числа $T_0(8)$ данных соотношений не достаточно (не хватает всего трех уравнений относительно величин $W(p_1, \dots, p_k)$, порождающих требуемый ранг матрицы системы). Мы допускаем наличие некоторой общей закономерности, генерирующей новые уравнения связи. Заметим еще, что благодаря разработке эффективных алгоритмов компьютерных вычислений [12] в настоящее время известны значения $T_0(n)$ для всех $n \leq 18$.

6. Опорные множества ациклических и транзитивных орграфов. Для любого ациклического орграфа $\sigma \in \mathcal{A}(X)$, $\text{card } X < \infty$, определены непустые *опорные множества*

$$S(\sigma) \doteq \{y \in X : \sigma(x, y) = 0 \text{ для всех } x \in X\},$$

$$S'(\sigma) \doteq \{x \in X : \sigma(x, y) = 0 \text{ для всех } y \in X\}$$

и определены семейства опорных множеств

$$S(G_\sigma) \doteq \{S(\tau) \subseteq X : \tau \in G_\sigma(X)\}, \quad S'(G_\sigma) \doteq \{S'(\tau) \subseteq X : \tau \in G_\sigma(X)\},$$

где $G_\sigma(X) (= G_\sigma)$ — связная компонента графа $G(X)$, содержащая σ . Легко заметить, что множества $S(\sigma)$ и $S'(\sigma)$ — это совокупности вершин орграфа $\sigma \in \mathcal{A}(X)$, имеющих нулевую полустепень захода и исхода соответственно.

Пусть $\sigma \in \mathcal{A}(X)$ и $\pi, \varrho \in G_\sigma(X)$. Согласно [3] справедливы следующие утверждения:

- 1) $S(\pi) = S(\varrho)$ тогда и только тогда, когда $\pi = \varrho$;
- 2) для любого непустого подмножества $S \subseteq S(\varrho)$ существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = S$, причем τ смежно с ϱ .

Кроме того, для любого $x \in X$ существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = \{x\}$. Если же $\sigma \in \mathcal{V}_0^0(X) \subset \mathcal{A}(X)$, то для любых $x, y \in X$ существует единственное $\tau \in G_\sigma(X)$ такое, что $S(\tau) = \{x, y\}$ (см. [1]).

Таким образом, при $\sigma \in \mathcal{A}(X)$ совокупность $S(G_\sigma)$ является специфическим частично упорядоченным множеством относительно естественного отношения включения множеств. Специфика заключается в том, что вместе с каждым элементом семейства $S(G_\sigma)$ содержит все непустые подмножества этого элемента, а кроме того, $S(G_\sigma)$ содержит все одноэлементные подмножества множества X . Более того, если $\sigma \in \mathcal{V}_0^0(X) \subset \mathcal{A}(X)$, то семейство $S(G_\sigma)$ содержит в обязательном порядке все двухэлементные подмножества множества X . Последнее обстоятельство может сыграть существенную роль в процессе получения родственных (но сепаратных) арифметических свойств множеств $\mathcal{V}_0^0(X)$ и $\mathcal{A}(X)$. (Родственный характер арифметических свойств этих множеств мы уже отмечали в пункте 5; см. также формулы пункта 7.)

Процедура транспонирования матриц $\sigma(x, y) \rightarrow \sigma^\top(x, y)$ порождает для множеств $S'(\sigma)$ и $S'(G_\sigma)$ утверждения, аналогичные отмеченным выше.

Теорема 1. Для любого $\sigma \in \mathcal{A}(X)$ справедливо равенство $S(G_\sigma) = S'(G_\sigma)$.

Доказательство. Для любого $\varrho \in G_\sigma$ определены множества $Z \doteq S(\varrho) \in S(G_\sigma)$ и $Y \doteq X \setminus Z$, причем $\varrho(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in X \times Z = Z^2 \cup (Y \times Z)$. Следовательно, определено отношение $\tau \in G_\sigma$ такое, что $\varrho \xleftrightarrow{Y \times Z} \tau$, причем $\tau(x, y) = \varrho(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Z^2$ и $\tau(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Z \times Y$. Другими словами, $\tau(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in Z \times X$, поэтому $Z \subseteq S'(\tau) \in S'(G_\sigma)$, и, значит, существует отношение $\pi \in G_\sigma$ такое, что $Z = S'(\pi) \in S'(G_\sigma)$. Таким образом, имеет место импликация $Z \in S(G_\sigma) \implies Z \in S'(G_\sigma)$, то есть $S(G_\sigma) \subseteq S'(G_\sigma)$. Обратное включение доказывается симметричным образом. $\square$

Анализ структуры частично упорядоченного множества $S(G_\sigma) (= S'(G_\sigma))$ показывает, что для его описания достаточно указать все его максимальные элементы. Так, если в диаграмме (5) заменить элементы множества $\mathcal{V}_0(X)$ на элементы множества $\mathcal{V}_0^0(X)$ (заменив единичные элементы $\sigma(x, x)$ нулями), то в семействе опорных множеств первой компоненты графа $\langle \mathcal{V}_0^0(X), E(X) \rangle$ имеется единственный максимальный элемент $\{1, 2, 3\}$, а во второй и третьей

компонентах максимальными являются множества $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$. В диаграмме (6) в обеих компонентах максимальными являются множества $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.

7. Число транзитивных и ациклических орграфов, имеющих фиксированное опорное множество. Пусть $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$, $p \doteq p_1$, $m \doteq p_2$,

$$X \doteq \{1, \dots, p+m\}, \quad M \doteq \{p+1, \dots, p+m\}.$$

Через $\mathcal{W}(p; m)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (7) типа (p_1, p_2)

- 1) диагональный блок σ^{11} — единичная матрица,
- 2) блок σ^{21} состоит из нулей,
- 3) диагональный блок σ^{22} — частичный порядок (принадлежит $\mathcal{V}_0(M)$),

и пусть $W(p; m) \doteq \text{card } \mathcal{W}(p; m)$. Дополнительно полагаем

$$W(0; m) = T_0(m), \quad m = 0, 1, \dots, \quad W(p; 0) = 1, \quad p = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Через $\mathcal{V}(p, m)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{W}(p, m)$ таких, что в блочном представлении (7) типа (p_1, p_2) ($= (p, m)$) блок σ^{12} невырожденный. Применяем обозначение $V(p; m) \doteq \text{card } \mathcal{V}(p; m)$ и полагаем, по определению,

$$V(0; m) = \delta_{0m}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad V(p; 0) = 1, \quad p = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Для отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ (у которых, в отличие от отношений из $\mathcal{V}_0^0(X)$, для всех $x \in X$ справедливо $\sigma(x, x) = 1$) опорными множествами называем совокупности

$$S(\sigma) \doteq \{y \in X : \sigma(x, y) = \delta_{xy} \text{ для всех } x \in X\},$$

$$S'(\sigma) \doteq \{x \in X : \sigma(x, y) = \delta_{xy} \text{ для всех } y \in X\}.$$

Понятно, что совокупность $\mathcal{V}(p, m)$ совпадает с множеством всех тех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых $S(\sigma) = \{1, \dots, p\}$.

Лемма 1. Для целых $p \geq 0$ и $m \geq 0$ справедливы равенства

$$W(p; m) = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} V(p+r; m-r), \quad (10)$$

$$V(p; m) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} W(p+r; m-r). \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $p \geq 1$, $m \geq 1$. Легко заметить, что если $\sigma \in \mathcal{W}(p; m)$, то множество $P \doteq \{1, \dots, p\}$ содержится в опорном множестве $S(\sigma)$. Для любого $\alpha \subseteq M$ через $\mathcal{W}_\alpha(p; m)$ обозначим множество всех тех отношений $\sigma \in \mathcal{W}(p; m)$, у которых $S(\sigma) = P \cup \alpha$, разбив, таким образом, множество $\mathcal{W}(p; m)$ на попарно непересекающиеся классы $\mathcal{W}_\alpha(p; m)$. Следовательно,

$$W(p; m) = \text{card } \mathcal{W}(p; m) = \sum_{\alpha \subseteq M} \text{card } \mathcal{W}_\alpha(p; m).$$

Очевидно, при $\alpha = \emptyset$ справедливы равенства $\mathcal{W}_\emptyset(p; m) = \mathcal{V}(p; m)$ и $\text{card } \mathcal{W}_\emptyset(p; m) = V(p; m)$. Также легко понять, что если непустые $\alpha, \beta \subseteq M$ таковы, что $|\alpha| = |\beta|$, то

$$\text{card } \mathcal{W}_\alpha(p; m) = \text{card } \mathcal{W}_\beta(p; m) = \text{card } \mathcal{W}_\gamma(p; m),$$

где $\gamma \doteq \{p+1, \dots, p+r\} \subseteq M$, $r \doteq |\alpha| = |\beta| \in [1, m]$. Так как для всех $\sigma \in \mathcal{W}_\gamma(p; m)$ имеет место равенство $S(\sigma) = \{1, \dots, p+r\}$, то $\mathcal{W}_\gamma(p; m) = \mathcal{V}(p+r; m-r)$, поэтому

$$\text{card } \mathcal{W}_\gamma(p; m) = V(p+r; m-r),$$

что и доказывает равенство (10). При введенных соглашениях (8), (9) легко проверить, что равенство (10) имеет место также при $p = 0$ и при $m = 0$.

Обозначим через Δ правую часть формулы (11), тогда в силу (10) справедливо равенство

$$\Delta = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{s=0}^{m-r} \binom{m-r}{s} V(p+r+s; m-r-s).$$

Заменив индекс s на $t = r+s$ и поменяв порядок суммирования, получим цепочку равенств

$$\Delta = \sum_{t=0}^m \left[\sum_{r=0}^t (-1)^r \binom{t}{r} \right] \binom{m}{t} V(p+t; m-t) = \sum_{t=0}^m \delta_{t0} \binom{m}{t} V(p+t; m-t) = V(p; m).$$

Лемма 2. Для целых $p \geq 1$ и $m \geq 0$ справедливо равенство

$$V(p; m) = \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_k = p+m \\ p_1 \geq p}} (-1)^{m+1-k} \frac{m!}{(p_1-p)! p_2! \dots p_k!} W(p_1, \dots, p_k).$$

Доказательство. Пусть $m \geq 1$. В силу (11) справедливо равенство

$$V(p; m) = (-1)^m + \sum_{q=0}^{m-1} (-1)^q \binom{m}{q} W(p+q; m-q).$$

В соответствии с леммой 3 [7] для всех $q = 0, 1, \dots, m-1$ имеет место равенство

$$W(p+q; m-q) = \sum_{q_1 + \dots + q_r = m-q} (-1)^{m-q-r} \frac{(m-q)!}{q_1! \dots q_r!} W(p+q, q_1, \dots, q_r),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} V(p; m) - (-1)^m &= \sum_{q=0}^{m-1} (-1)^q \binom{m}{q} \sum_{q_1 + \dots + q_r = m-q} (-1)^{m-q-r} \frac{(m-q)!}{q_1! \dots q_r!} W(p+q, q_1, \dots, q_r) = \\ &= \sum_{\substack{q + q_1 + \dots + q_r = m \\ 0 \leq q < m}} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q! q_1! \dots q_r!} W(p+q, q_1, \dots, q_r). \end{aligned}$$

Перешли к суммированию по всем переменным одновременно. Пусть $q_0 \doteq p+q$, тогда

$$V(p; m) - (-1)^m = \sum_{\substack{q_0 + q_1 + \dots + q_r = p+m \\ p \leq q_0 < p+m}} (-1)^{m-r} \frac{m!}{(q_0-p)! q_1! \dots q_r!} W(q_0, q_1, \dots, q_r).$$

Доказательство завершает замена переменных $k = r+1$, $p_i = q_{i-1}$, $i = 1, \dots, k$. Случай $m = 0$ справедлив в силу соглашений (9). $\square$

Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p = 1, \dots, n$ через $A_n^{(p)}$ (через $T_0^{(p)}(n)$) обозначим количество всех помеченных ациклических орграфов $\sigma \in \mathcal{A}(X)$ (соответственно помеченных транзитивных орграфов $\sigma \in \mathcal{V}_0^0(X)$), определенных на множестве $X = \{1, \dots, n\}$ и таких, что $S(\sigma) = \{1, \dots, p\}$. Понятно, что $T_0^{(p)}(n) = V(p; n-p)$. Таким образом, в силу леммы 2 имеет место

Теорема 2. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p = 1, \dots, n$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} T_0^{(p)}(n) &= \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_k = n \\ p_1 \geq p}} (-1)^{n-p+1-k} \frac{(n-p)!}{(p_1-p)! p_2! \dots p_k!} W(p_1, \dots, p_k), \\ A_n^{(p)} &= \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_k = n \\ p_1 \geq p}} (-1)^{n-p+1-k} \frac{(n-p)!}{(p_1-p)! p_2! \dots p_k!} 2^{(n^2 - p_1^2 - \dots - p_k^2)/2}. \end{aligned}$$

Вторая формула доказана в лемме 4 [3] (ср. также с выражением (4)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И. Граф частичных порядков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 3–12. DOI: [10.20537/vm130401](https://doi.org/10.20537/vm130401)
2. Аль Джабри Х.Ш. Граф рефлексивно-транзитивных отношений и граф конечных топологий // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 1. С. 3–11. DOI: [10.20537/vm150101](https://doi.org/10.20537/vm150101)
3. Аль Джабри Х.Ш., Родионов В.И. Граф ациклических орграфов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 4. С. 441–452. DOI: [10.20537/vm150401](https://doi.org/10.20537/vm150401)
4. Comtet L. Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. 1966. Vol. 262. P. A1091–A1094.
5. Erne M. Struktur- und anzahlformeln fur topologien auf endlichen mengen // Manuscripta Math. 1974. Vol. 11. No. 3. P. 221–259. DOI: [10.1007/BF01173716](https://doi.org/10.1007/BF01173716)
6. Борович З.И. К вопросу перечисления конечных топологий // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 71. С. 47–65.
7. Родионов В.И. О перечислении частичных порядков, определенных на конечном множестве // Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 318–330. DOI: [10.17377/semi.2016.13.026](https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.026)
8. Evans J.W., Harary F., Lynn M.S. On the computer enumeration of finite topologies // Comm. ACM. 1967. Vol. 10. Issue 5. P. 295–297. DOI: [10.1145/363282.363311](https://doi.org/10.1145/363282.363311)
9. Gupta H. Number of topologies on a finite set // Research Bulletin of the Panjab University (N.S.). 1968. Vol. 19. P. 231–241.
10. Rodionov V.I. On the number of labeled acyclic digraphs // Discrete Mathematics. 1992. Vol. 105. No. 1–3. P. 319–321. DOI: [10.1016/0012-365X\(92\)90155-9](https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)90155-9)
11. Родионов В.И. Об одном рекуррентном соотношении в задаче перечисления конечных частичных порядков // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 98–111. DOI: [10.17377/semi.2017.14.011](https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.011)
12. Brinkmann G., McKay B.D. Posets on up to 16 points // Order. 2002. Vol. 19. Issue 2. P. 147–179. DOI: [10.1023/A:1016543307592](https://doi.org/10.1023/A:1016543307592)

Поступила в редакцию 01.02.2017

Аль Джабри Халид Шиа Хайралла, к. ф.-м. н., преподаватель, Аль Кадисия университет, Ирак, г. Аль Дивания, ул. Вавилония, 29.

E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Родионов Виталий Иванович, к. ф.-м. н., зав. кафедрой, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: rodionov@uni.udm.ru

Kh. Sh. Al' Dzhabri, V. I. Rodionov

On support sets of acyclic and transitive digraphs

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. [153–161](#) (in Russian).

Keywords: enumeration of graphs, acyclic digraph, transitive digraph.

MSC2010: 05C30

DOI: [10.20537/vm170201](https://doi.org/10.20537/vm170201)

In previous works of the authors, the concept of a binary reflexive adjacency relation was introduced on the set of all binary relations of the set X , and an algebraic system consisting of all binary relations of the set X and of all unordered pairs of adjacent binary relations was defined. If X is a finite set, then this algebraic system is a graph (graph of binary relations G). The current paper introduces the notion of a support set for acyclic

and transitive digraphs. This is the collections $S(\sigma)$ and $S'(\sigma)$ consisting of the vertices of the digraph $\sigma \in G$ that have zero indegree and zero outdegree, respectively. It is proved that if G_σ is a connected component of the graph G containing the acyclic or transitive digraph $\sigma \in G$, then $\{S(\tau) : \tau \in G_\sigma\} = \{S'(\tau) : \tau \in G_\sigma\}$. A formula for the number of transitive digraphs having a fixed support set is obtained. An analogous formula for the number of acyclic digraphs having a fixed support set was obtained by the authors earlier.

REFERENCES

1. Al' Dzhabri Kh.Sh., Rodionov V.I. The graph of partial orders, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2013, issue 4, pp. 3–12 (in Russian). DOI: [10.20537/vm130401](https://doi.org/10.20537/vm130401)
2. Al' Dzhabri Kh.Sh. The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 1, pp. 3–11 (in Russian). DOI: [10.20537/vm150101](https://doi.org/10.20537/vm150101)
3. Al' Dzhabri Kh.Sh., Rodionov V.I. The graph of acyclic digraphs, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 4, pp. 441–452 (in Russian). DOI: [10.20537/vm150401](https://doi.org/10.20537/vm150401)
4. Comtet L. Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini, *C. R. Acad. Sci.*, 1966, vol. 262, pp. A1091–A1094.
5. Erne M. Struktur- und anzahlformeln fur topologien auf endlichen mengen, *Manuscripta Math.*, 1974, vol. 11, no. 3, pp. 221–259. DOI: [10.1007/BF01173716](https://doi.org/10.1007/BF01173716)
6. Borevich Z.I. Enumeration of finite topologies, *J. Sov. Math.*, 1982, vol. 20, issue 6, pp. 2532–2545. DOI: [10.1007/BF01681470](https://doi.org/10.1007/BF01681470)
7. Rodionov V.I. On enumeration of posets defined on finite set, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2016, vol. 13, pp. 318–330 (in Russian). DOI: [10.17377/semi.2016.13.026](https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.026)
8. Evans J.W., Harary F., Lynn M.S. On the computer enumeration of finite topologies, *Comm. ACM*, 1967, vol. 10, issue 5, pp. 295–297. DOI: [10.1145/363282.363311](https://doi.org/10.1145/363282.363311)
9. Gupta H. Number of topologies on a finite set, *Research Bulletin of the Panjab University (N.S.)*, 1968, vol. 19, pp. 231–241.
10. Rodionov V.I. On the number of labeled acyclic digraphs, *Discrete Mathematics*, 1992, vol. 105, no. 1–3, pp. 319–321. DOI: [10.1016/0012-365X\(92\)90155-9](https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)90155-9)
11. Rodionov V.I. On recurrence relation in the problem of enumeration of finite posets, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 98–111 (in Russian). DOI: [10.17377/semi.2017.14.011](https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.011)
12. Brinkmann G., McKay B.D. Posets on up to 16 points, *Order*, 2002, vol. 19, issue 2, pp. 147–179. DOI: [10.1023/A:1016543307592](https://doi.org/10.1023/A:1016543307592)

Received 01.02.2017

Al' Dzhabri Khalid Shea Khairalla, Candidate of Physics and Mathematics, Lecturer, University of Al-Qadisiyah, ul. Babilon, 29, Al Diwaniyah, Iraq.

E-mail: khalidaljabrimath@yahoo.com

Rodionov Vitalii Ivanovich, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the Department, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.

E-mail: rodionov@uni.udm.ru