Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. A. Kozlov, I. V. Ints, On uniform global attainability of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, Volume 27, Issue 2, 178–192

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170203>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.208.226.222

April 26, 2023, 07:16:33

УДК 517.926, 517.977

© А. А. Козлов, И. В. Ину

О РАВНОМЕРНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

Рассматривается линейная нестационарная управляемая система с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Управление в системе (1) строится по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$ с измеримой и ограниченной матричной функцией $U(t)$, $t \geq 0$. Для замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

исследуется вопрос об условиях ее равномерной глобальной достижимости. Наличие последнего свойства у системы (2) означает существование такой матричной функции $U(t)$, $t \geq 0$, которая обеспечивает для матрицы Коши $X_U(t, s)$ этой системы выполнение равенств $X_U((k+1)T, kT) = H_k$ при фиксированном $T > 0$ и произвольных $k \in \mathbb{N}$, $\det H_k > 0$. Представленная задача решается в предположении равномерной полной управляемости системы (1), соответствующей замкнутой системе (2), т. е. при условии существования таких $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых начальном моменте времени $t_0 \geq 0$ и начальном состоянии $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы (1) на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ найдется измеримое и ограниченное векторное управление $u = u(t)$, $\|u(t)\| \leq \gamma \|x_0\|$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, переводящее вектор начального состояния этой системы в ноль на данном отрезке. Доказано, что в двумерном случае, т. е. при $n = 2$, свойство равномерной полной управляемости системы (1) является достаточным условием равномерной глобальной достижимости соответствующей системы (2).

Ключевые слова: линейная управляемая система, равномерная полная управляемость, равномерная глобальная достижимость.

DOI: [10.20537/vm170203](https://doi.org/10.20537/vm170203)

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (здесь символ T означает операцию транспонирования вектора или матрицы); $e_1, e_2, \dots, e_n$ — векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$; M_{mn} — пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, т. е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$; $M_n := M_{nn}$. Обозначим через $E \in M_n$ единичную матрицу.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с локально интегрируемыми по Лебегу и интегрально ограниченными [1, с. 252] матрицами коэффициентов A и B . Выбрав в качестве u управление, заданное в виде линейной обратной связи

$$u = U(t)x, \quad (2)$$

¹Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

где U — некоторая измеримая и ограниченная $(m \times n)$ -матрица, получим замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Дадим некоторые необходимые при дальнейших рассуждениях определения и их пояснения.

Для любых чисел $r > 1$ и $0 < \rho \leq 1$ под $\mathcal{M}_n(r, \rho)$ всюду далее будем понимать множество матриц из M_n , которые удовлетворяют неравенствам $\|H - E\| \leq r$ и $\det H \geq \rho$.

Определение 1 (см. [2], [3, с. 253]). Будем говорить, что система (3) обладает свойством:

- 1) *T -равномерной глобальной достижимости относительно неограниченного множества* $\mathbb{U} \subset M_{mn}$, если для любых $r \geq 1$ и $0 < \rho \leq 1$ найдется такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, при которой для произвольной матрицы $H \in \mathcal{M}_n(r, \rho)$ и всякого $t_0 \geq 0$ существует измеримое и ограниченное управление $U : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{U}$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ оценке $\|U(t)\| \leq \theta(r, \rho)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) выполнение равенства $X_U(t_0 + T, t_0) = H$;
- 2) *T -равномерной глобальной достижимости*, если она T -равномерно глобально достижима относительно множества $\mathbb{U} = M_{mn}$;
- 3) *равномерной глобальной достижимости*, если она T -равномерно глобально достижима при некотором $T > 0$.

Замечание 1. Сам термин «равномерная глобальная достижимость» был введен в статье [2] для систем (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами и управлением. Представленное определение отличается от введенного в работе [2] расширением как функционального класса коэффициентов нестационарных систем (3), так и множества управляющих воздействий.

Замечание 2. Наличие у системы (3) свойства равномерной глобальной достижимости обеспечивает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном временном отрезке фиксированной длины T , т. е. указывает на возможность выбора такого матричного управляющего воздействия U , при котором совокупность $\{x_{U_i}(t)\}_{i=1}^n$ линейно независимых решений системы (3) с этим управлением и начальными условиями — соответствующими векторами e_i канонического ортономированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ — через время T будет совпадать с произвольным наперед заданным правым базисом этого пространства.

Определение 2 (см. [1, с. 247], [4, с. 153–154]). *Преобразованием Ляпунова* называется линейное преобразование $z = L(t)y$ с обратимой абсолютно непрерывной матричной функцией $L = L(t)$, заданной на положительной полуоси со значениями во множестве $(n \times n)$ -матриц и удовлетворяющей для всех $t \geq 0$ неравенству $\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \int_t^{t+1} \|\dot{L}(\tau)\| d\tau < \infty$.

Определение 3 (см. [5]). Однородные линейные системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами $\dot{y} = D(t)y$, $t \geq 0$, и $\dot{z} = C(t)z$, $t \geq 0$, связанные преобразованием Ляпунова, называются *асимптотически эквивалентными (по Богданову)*.

Определение 4 (см. [2], [3, с. 253]). Будем говорить, что система (3) обладает *свойством глобальной ляпуновской приводимости*, если для любой измеримой и интегрально ограниченной $(n \times n)$ -матрицы $C(t)$, $t \geq 0$, найдется измеримое и ограниченное управление $\hat{U} : [0, +\infty) \rightarrow M_{mn}$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность (по Богданову) системы

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

и системы (3) с управлением $U = \hat{U}(t)$, $t \in [0, +\infty)$.

Замечание 3. Равномерная глобальная достижимость является достаточным условием для глобальной ляпуновской приводимости (см., например, [3, с. 258–259], [6]) линейных систем (3).

Замечание 4. Свойство равномерной глобальной достижимости, а также его локальный аналог фактически используются в работах [2, 3, 6–16] для решения задач локальной и глобальной управляемости различных асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем (см., например, монографию [3]).

Определение 5 (см. [3, с. 60]). *Асимптотическими (ляпуновскими) инвариантами линейных однородных систем n -го порядка* называются величины (свойства), относящиеся к этим системам, которые не меняются под действием преобразований Ляпунова. Асимптотическими инвариантами являются [3, с. 29–80], [17], например, свойства устойчивости, асимптотической устойчивости, правильности, приводимости и т. п.; полный спектр показателей Ляпунова, центральные, особые и экспоненциальные показатели, коэффициенты неправильности и т. п.

Определение 6 (см. [3, с. 182]). Зафиксируем какой-либо асимптотический инвариант ι . *Задача глобального управления асимптотическим инвариантом ι* заключается в нахождении такого измеримого и ограниченного управления (2), что система (3) с этим управлением будет иметь любое возможное наперед заданное значение этого инварианта. Так, например, рассматривая в данной задаче в качестве асимптотического инварианта ι полный спектр показателей Ляпунова, получим [3, с. 183–185] *задачу глобального управления показателями Ляпунова*, т. е. задачу о построении для системы (1) обратной связи (2), обеспечивающей выполнение равенств $\lambda_i(A + BU) = \mu_i$, $i = \overline{1, n}$, при произвольных заранее заданных вещественных числах $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$; здесь $\lambda_1(A + BU) \leq \dots \leq \lambda_n(A + BU)$ — полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы (3).

Замечание 5. Легко видеть, что имеют место следующие соотношения между свойствами равномерной глобальной достижимости (РГД), глобальной ляпуновской приводимости (ГЛП), а также глобальной управляемости характеристических показателей Ляпунова (ГУП) системы (3):

$$\text{РГД} \Rightarrow \text{ГЛП} \Rightarrow \text{ГУП}.$$

Вопрос о наличии равномерной глобальной достижимости у системы (3) решается, как правило, в предположении равномерной полной управляемости соответствующей ей системы (1).

Определение 7 (см. [18], [3, с. 93]). Будем считать, что матрица B системы (1) принадлежит также пространству локально-интегрируемых с **квадратом** матричных функций. Тогда система (1) называется *равномерно вполне управляемой (по Калману)*, если найдутся такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$, что при всяких $t_0 \geq 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\xi^T \int_{t_0}^{t_0+\sigma} X(t_0, \tau) B(\tau) B^T(\tau) X^T(t_0, \tau) d\tau \xi \geq \alpha \|\xi\|^2.$$

Для равномерно вполне управляемых двух- и трехмерных стационарных линейных систем (1) В. А. Зайцевым [2], а для четырехмерных стационарных систем (1) В. А. Зайцевым и А. Ф. Габдрахимовым [19] доказана равномерная глобальная достижимость соответствующих систем (3) в классе кусочно-постоянных управлений. В случае же нестационарных линейных систем (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами С. Н. Поповой и Е. К. Макаровым установлена

Теорема 1 (см. [6], [3, с. 310–325]). *Для любой двумерной нестационарной равномерно вполне управляемой системы вида (1) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами при условии кусочной равномерной непрерывности матрицы B соответствующая замкнутая система (3) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Замечание 6. Свойство кусочной равномерной непрерывности функции $B : [0, +\infty) \rightarrow M_{nm}$ означает [3, с. 264–265] выполнение для нее следующих условий:

- 1) матричная функция B кусочно непрерывна и ограничена на положительной полуоси;
- 2) существует такое $\Delta_0 > 0$, что длина каждого интервала непрерывности I_j ($j \in J \subset \mathbb{N}$) функции B удовлетворяет неравенству $|I_j| > \Delta_0$;
- 3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого $j \in J$ и для всех $t, s \in I_j$, удовлетворяющих неравенству $|t - s| \leq \delta$, выполнено соотношение $\|B(t) - B(s)\| \leq \varepsilon$.

Если же матрица B не является кусочно равномерно непрерывной либо размерность фазового пространства $n > 2$, вопрос о глобальной достижимости для нестационарных систем (3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами остается открытым. Исследование же задачи о равномерной глобальной достижимости для систем (3) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами ранее вообще не проводилось. Это связано прежде всего с тем, что метод решения данной задачи, предложенный С. Н. Поповой и Е. К. Макаровым [6], предполагает использование свойства равномерной полной управляемости (по Калману), которое имеет смысл лишь в случае интегрируемости с квадратом матрицы B . Отказ от наличия указанной интегрируемости делает фактически невозможным (см., например, [20]) применение определения 7 (а следовательно, и разработанного метода) для решения рассматриваемой задачи.

Е. Л. Тонковым было сформулировано иное определение равномерной полной управляемости, эквивалентное определению 7 для систем с локально суммируемыми с квадратом коэффициентами, преимуществом которого, по сравнению с определением Калмана является возможность его применения к системам с коэффициентами более широких функциональных классов.

Определение 8 (см. [21]). Система (1) называется *равномерно вполне управляемой* (по Тонкову), если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geq 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется измеримое и ограниченное управление $u : [t_0, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^m$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leq \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

В настоящей работе рассмотрена двумерная линейная нестационарная равномерно вполне управляемая (в смысле Тонкова) система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами и доказано, что соответствующая ей линейная дифференциальная система (3), замкнутая измеримым и ограниченным управлением, линейным по фазовым переменным, обладает свойством равномерной глобальной достижимости.

Прежде чем переходить к основному результату работы, вначале установим ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Для (2×2) -матриц

$$E_1 := E + e_1 e_2^T, \quad E_2 := E_1^T = E + e_2 e_1^T, \quad E_3 := E_1^2 = E + 2e_1 e_2^T \quad (4)$$

выполняются равенства

$$E_1^{-1} = E - e_1 e_2^T, \quad E_2^{-1} = E - e_2 e_1^T,$$

$$E_1^{-1} \cdot E_2 \cdot E_1^{-1} = e_2 e_1^T - e_1 e_2^T, \quad E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1 = e_1 e_2^T - e_2 e_1^T, \quad (5)$$

$$E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_3 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1 = -E. \quad (6)$$

Доказательство леммы 1 проводится непосредственным перемножением матриц из формул (4) и обратных к матрицам E_1 и E_2 , которые существуют ввиду очевидной невырожденности E_1 и E_2 . $\square$

Замечание 7. При помощи элементарных вычислений можно установить, что для матриц $E_1^{\pm 1}$, $E_2^{\pm 1}$, E_3 выполняются следующие оценки:

$$\|E_1^{\pm 1}\| = \|E_2^{\pm 1}\| = (1 + \sqrt{5})/2 < 2, \quad \|E_3^{\pm}\| = 1 + \sqrt{2} < 3 \quad (7)$$

и равенства

$$\det E_1^{\pm 1} = \det E_2^{\pm 1} = \det E_3 = 1. \quad (8)$$

Пусть $\mathcal{LU}_2 \subset M_2$ — совокупность всех ниже- и верхнетреугольных (2×2) -матриц с положительными диагональными элементами. Тогда при любых числах $r > 1$ и $0 < \rho \leq 1$ через $\mathcal{LU}_2(r, \rho) \subset M_2$ будем обозначать множество матриц

$$\mathcal{LU}_2(r, \rho) := \mathcal{LU}_2 \cap \mathcal{M}_2(r, \rho) = \{H \in \mathcal{LU}_2 : \|H - E\| \leq r, \det H \geq \rho\}.$$

Теорема 2. Для любых чисел $r \geq 1$ и $0 < \rho \leq 1$ и всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_2(r, \rho)$ найдутся такие матрицы $H_i \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$, $i = \overline{1, 7}$, где $r_1 := 3(r + 1)$, при которых матрица H представляется в виде $H = H_7 \cdot \dots \cdot H_1$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные числа $0 \leq \rho \leq 1$ и $r \geq 1$. Возьмем любую матрицу $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in \mathcal{M}_2(r, \rho)$. Тогда имеют место два случая: $0 \leq |h_{12}/h_{11}| \leq 1$ либо $0 \leq |h_{11}/h_{12}| < 1$ (случай $h_{11} = h_{12} = 0$ невозможен ввиду невырожденности матрицы H). Рассмотрим в отдельности оба этих случая.

Пусть $0 \leq |h_{12}/h_{11}| \leq 1$. Тогда выполняется неравенство $h_{11} \neq 0$, а поскольку $\det H > 0$, то ведущие главные угловые миноры [22, с. 30] матрицы H ненулевые, и, следовательно, для этой матрицы можно применить теорему о LU -разложении [22, с. 194]. Тогда справедливо равенство

$$H = L \cdot U, \quad (9)$$

в котором матрицы $L = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^2$ и $U = \{u_{ij}\}_{i,j=1}^2$ имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{21} & h_{22} - h_{21}h_{12}/h_{11} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & h_{12}/h_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Оценим сверху норму и снизу определители матриц L и U . В силу включения $H \in \mathcal{M}_2(r, \rho)$ имеем неравенства $\|H\| \leq \|H - E\| + \|E\| \leq r + 1$. Отсюда и из очевидной оценки $|h_{ij}| \leq \|H\|$, верной для всех $i, j = \overline{1, 2}$, на основании условия $0 \leq |h_{12}/h_{11}| \leq 1$ и соотношений между строчной и спектральной нормами матрицы [22, с. 378] для норм матриц L и U получим оценки

$$\begin{aligned} \|L\| &\leq \sqrt{2} \max\{|h_{11}|, |h_{22}| + |h_{21}| \cdot |h_{12}/h_{11}|\} \leq \\ &\leq \sqrt{2} \max\{\|H\|, \|H\| + \|H\|\} = 2\sqrt{2}\|H\| \leq 2\sqrt{2}(r + 1) \leq 3(r + 1) = r_1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\|U\| \leq \sqrt{2} \max\{1 + |h_{12}/h_{11}|, 1\} \leq 2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}(r + 1) \leq r_1. \quad (12)$$

Для определителей же этих матриц выполняются очевидные соотношения

$$\det U = 1 \geq \rho \quad \text{и} \quad \det L = l_{11} \cdot l_{22} = \det L \cdot \det U = \det H \geq \rho. \quad (13)$$

Отсюда, из неравенств (12) и определения матрицы U следует включение $U \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$.

Так как $l_{11} \cdot l_{22} \geq \rho > 0$, то диагональные элементы матрицы L одного знака. Пусть $l_{ii} > 0$, $i = 1, 2$, тогда L — нижнетреугольная матрица с положительными диагональными элементами, и в силу оценок (11) и (13) для нее выполняется включение $L \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. Поскольку матрица $E \in M_2$ диагональная (а значит, и треугольная) с положительной диагональю и для нее справедливы соотношения $\det E = 1 \geq \rho$ и $\|E\| = 1 \leq r_1$, то для нее также имеет место включение

$E \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. Тогда на основании формулы (9), с учетом включений $U, L, E \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$ для случая $0 \leq |h_{12}/h_{11}| \leq 1$ и $l_{ii} > 0$, $i = 1, 2$, имеем требуемое представление матрицы H :

$$H = L \cdot U \cdot \underbrace{E \cdot \dots \cdot E}_{5 \text{ сомножителей}}. \quad (14)$$

Если же $l_{ii} < 0$, $i = 1, 2$, т.е. на диагонали матрицы L стоят только отрицательные числа, то диагональные элементы матрицы $(-L)$ положительны. Тогда, ввиду разложения (9), выполняется равенство

$$H = (-L) \cdot U \cdot (-E),$$

из которого, в силу справедливости формулы (6), следует представление

$$H = (-L) \cdot U \cdot E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_3 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1. \quad (15)$$

Для доказательства того, что найденное представление (15) является требуемым, осталось показать, что матрицы, стоящие в правой части этого представления, принадлежат множеству $\mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. В силу оценок (11)–(13) для треугольных матриц с положительными диагональными элементами $(-L)$ и U выполняются соотношения

$$\| -L \| = \| L \| \leq r_1, \quad \det(-L) = (-1)^2 \cdot \det L \geq \rho, \quad \| U \| \leq r_1, \quad \det U \geq \rho, \quad (16)$$

устанавливающие включения $(-L), U \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. Ввиду неравенств (7), оценок $0 < \rho \leq 1$ и $r \geq 1$, а также равенств (8), для треугольных матриц $E_1^{\pm 1}, E_2^{\pm 1}, E_3$, все диагональные элементы которых положительны и, очевидно, равны единице, имеют место соотношения

$$\| E_1^{\pm 1} \| \leq 3(r+1), \quad \| E_2^{\pm 1} \| \leq 3(r+1), \quad \| E_3 \| \leq 3(r+1),$$

$$\det E_1^{\pm 1} = \det E_2^{\pm 1} = \det E_3 = 1 \geq \rho, \quad (17)$$

из которых, с учетом равенства $r_1 = 3(r+1)$, следуют включения $E_1^{\pm 1}, E_2^{\pm 1}, E_3 \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. Таким образом, для случая $0 \leq |h_{12}/h_{11}| \leq 1$ и $l_{ii} < 0$, $i = 1, 2$, разложение (15) является искомым.

Определим матрицу $J := [e_2, -e_1] \in M_2$, которая, очевидно, является обратимой и удовлетворяет легко проверяемому соотношению $J^{-1} = -J = [-e_2, e_1]$, и рассмотрим случай $0 \leq |h_{11}/h_{12}| < 1$. По определению матриц J и H , справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} h_{12} & -h_{11} \\ h_{22} & -h_{21} \end{pmatrix} = HJ =: G = \{g_{ij}\}_{i,j=1,2} \in M_2, \quad (18)$$

поэтому для элементов g_{1i} , $i = 1, 2$, матрицы G имеет место оценка $0 \leq |g_{12}/g_{11}| = |h_{11}/h_{12}| < 1$. В таком случае для матрицы G выполняется LU -разложение $G = L_1 \cdot U_1$ с матрицами $L_1 = \{l_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^n$ и $U_1 = \{u_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^n$, имеющими вид, аналогичный (10) и полученный заменой элементов h_{ij} , $i, j = 1, 2$, соответствующими элементами g_{ij} . Пользуясь рассуждениями такими же, как и при выводе оценок (11)–(13), а также первых двух неравенств в формуле (16), легко показать, что для матриц $\pm L_1$ и U_1 выполняются неравенства

$$\| \pm L_1 \| \leq r_1, \quad \| U_1 \| \leq r_1, \quad \det(\pm L_1) \geq \rho, \quad \det U_1 \geq \rho. \quad (19)$$

На основании формулы (18) в силу обратимости матрицы J имеем равенство $H = GJ^{-1}$, из которого, учитывая разложение матрицы G и очевидное соотношение $J^{-1} = e_1 e_2^T - e_2 e_1^T$, применяя вторую из формул в (5), получим цепочку равенств:

$$H = GJ^{-1} = L_1 \cdot U_1 \cdot J^{-1} = L_1 \cdot U_1 \cdot E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1. \quad (20)$$

Отсюда, в силу определения матриц L_1 , U_1 , H и формулы (17), для элементов $l_{ii}^{(1)}$, $i = 1, 2$, матрицы L_1 вытекают равенства $l_{11}^{(1)}l_{22}^{(1)} = \det L_1 = \det L_1 \cdot \det U_1 \cdot \det E_1 \cdot \det E_2^{-1} \cdot \det E_1 = \det(L_1 \cdot U_1 \cdot E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1) = \det H \geq \rho > 0$. Поэтому возможен один из случаев $l_{ii}^{(1)} > 0$ или $l_{ii}^{(1)} < 0$, $i = 1, 2$. Для первого случая, пользуясь разложением (20), получим представление

$$H = L_1 \cdot U_1 \cdot E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1 \cdot E \cdot E. \quad (21)$$

Поскольку U_1 — верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали, а L_1 — нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами и для них выполняются соотношения (19), то справедливы включения $L_1, U_1 \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$, которые вместе с ранее установленными соотношениями $E_1, E_2^{-1}, E \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$ означают, что представление (21) является искомым. Если же выполняются неравенства $l_{ii}^{(1)} < 0$, $i = 1, 2$, то на диагонали нижнетреугольной матрицы L_1 стоят только отрицательные числа, а диагональные элементы матрицы $(-L_1)$ положительны, и потому, ввиду формул (19), имеет место включение $(-L_1) \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$. Из представления (20) и первого из равенств в формуле (5) с учетом соотношений $J^{-1} = -EJ = -E \cdot (e_2 e_1^T - e_1 e_2^T)$ следует цепочка равенств:

$$\begin{aligned} H &= L_1 \cdot U_1 \cdot J^{-1} = (-E) \cdot (-L_1) \cdot U_1 \cdot (-E) \cdot (e_2 e_1^T - e_1 e_2^T) = \\ &= (-L_1) \cdot U_1 \cdot E_1^{-1} \cdot E_2 \cdot E_1^{-1} \cdot E \cdot E, \end{aligned} \quad (22)$$

которая, ввиду вышеустановленных включений $(-L_1), U_1, E_1^{-1}, E_2, E \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$, дает искомое представление для случая $l_{ii}^{(1)} < 0$, $i = 1, 2$.

Таким образом, в каждом из всевозможных случаев формулами (14), (15), (21), (22) для матрицы H определено требуемое разложение. Теорема 2 доказана. $\square$

В соответствии с работой [20] дадим следующие определение и теорему, с ним связанную.

Определение 9 (см. [20]). Будем говорить, что система (1) обладает свойством $H(\sigma)$ (где $\sigma > 0$), если существуют $\beta_i = \beta_i(\sigma) > 0$, $i = \overline{1, 4}$, такие, что для любого $\tau \geq 0$ и любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \beta_1 \|h\| &\leq \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^T X(\tau, s) B(s)\| ds \leq \beta_2 \|h\|, \\ \beta_3 \|h\| &\leq \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^T X(\tau + \sigma, s) B(s)\| ds \leq \beta_4 \|h\|; \end{aligned}$$

обладает свойством H , если существует $\sigma > 0$ такое, что система (1) обладает свойством $H(\sigma)$.

Теорема 3 (см. [20]). Система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами σ -равномерно вполне управляема (по Тонкову) тогда и только тогда, когда она обладает свойством $H(\sigma)$.

Используя эту теорему, покажем, что свойство равномерной полной управляемости (по Тонкову) инвариантно относительно преобразования Ляпунова. Применив к системе (1) преобразование $y = L(t)x$ с обратимой абсолютно непрерывной матрицей $L(\cdot)$, получим соотношения

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (L(t)x)' = \dot{L}(t)x + L(t)\dot{x} = \dot{L}(t)L^{-1}(t)y + L(t)(A(t)x + B(t)u) = \\ &= (L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t))y + L(t)B(t)u. \end{aligned}$$

Таким образом, данное преобразование переводит систему (1) в линейную управляемую систему

$$\dot{y} = (L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t))y + L(t)B(t)u. \quad (23)$$

Имеет место следующая

Теорема 4. Преобразование Ляпунова сохраняет свойство $H(\sigma)$ системы, т. е. если система (1) обладает свойством $H(\sigma)$ и $y = L(t)x$ — преобразование Ляпунова, то преобразованная система (23) также обладает свойством $H(\sigma)$.

Доказательство. Пусть система (1) обладает свойством $H(\sigma)$. Зафиксируем число σ . Обозначим через $Y(t, s)$, $t, s \geq 0$, матрицу Коши однородной системы

$$\dot{y} = (L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t))y.$$

Тогда из равенства $y = L(t)x$ следует, что при всех $t, s \geq 0$ имеет место соотношение

$$Y(t, s) = L(t)X(t, s)L^{-1}(s). \quad (24)$$

Возьмем произвольные вектор $h \in \mathbb{R}^n$ и число $\tau \geq 0$. Обозначим $\xi := L^T(\tau)h \in \mathbb{R}^n$. Поскольку система (1) обладает свойством $H(\sigma)$, то найдутся такие величины $\beta_1 = \beta_1(\sigma) > 0$ и $\beta_2 = \beta_2(\sigma) > 0$, при которых выполняются неравенства

$$\beta_1 \|\xi\| \leq \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|\xi^T X(\tau, s)B(s)\| ds \leq \beta_2 \|\xi\|. \quad (25)$$

Для доказательства теоремы 4 оценим вначале сверху и снизу $\int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau, s)L(s)B(s)\| ds$. На основании определения вектора ξ и соотношения (24) имеем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau, s)L(s)B(s)\| ds &= \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^T L(\tau)X(\tau, s)L^{-1}(s)L(s)B(s)\| ds = \\ &= \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|\xi^T X(\tau, s)B(s)\| ds. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценок (25) для интеграла $\int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau, s)L(s)B(s)\| ds$ установим неравенства

$$\beta_1 \|\xi\| \leq \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau, s)L(s)B(s)\| ds \leq \beta_2 \|\xi\|. \quad (26)$$

Так как $L(t)$, $t \geq 0$, — матрица Ляпунова, то и $L^T(t)$, $t \geq 0$, также является матрицей Ляпунова, а поэтому при некотором $l > 0$ справедливы неравенства $\|L^T(\tau)\| \leq l$ и $\|(L^T(\tau))^{-1}\| \leq l$, в которых величина l не зависит от τ . На основании определения ξ и последних двух неравенств для нормы вектора ξ имеем оценки снизу и сверху:

$$\|\xi\| = \|L^T(\tau) \cdot h\| \geq \|(L^T(\tau))^{-1}\| \cdot \|L^T(\tau) \cdot h\|/l \geq \|(L^T(\tau))^{-1} \cdot L^T(\tau) \cdot h\|/l = \|h\|/l,$$

$$\|\xi\| = \|L^T(\tau) \cdot h\| \leq \|L^T(\tau)\| \cdot \|h\| \leq l \cdot \|h\|.$$

Ввиду этих оценок, а также формулы (26), полагая $\delta_1 = \delta_1(\sigma) := \beta_1/l > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(\sigma) := \beta_2 \cdot l > 0$, установим неравенства

$$\delta_1 \|h\| \leq \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau, s)L(s)B(s)\| ds \leq \delta_2 \|h\|. \quad (27)$$

Пользуясь рассуждениями, аналогичными выводу формулы (27), легко показать, что найдутся такие величины $\delta_3 = \delta_3(\sigma) > 0$ и $\delta_4 = \delta_4(\sigma) > 0$, что выполняются оценки

$$\delta_3 \|h\| \leq \int_{\tau}^{\tau+\sigma} \|h^T Y(\tau + \sigma, s)L(s)B(s)\| ds \leq \delta_4 \|h\|. \quad (28)$$

Поскольку число $\tau \geq 0$ и вектор $h \in \mathbb{R}^n$ взяты произвольным образом, то на основании формул (27) и (28), пользуясь определением 9, получим, что система (23) обладает свойством $H(\sigma)$. Теорема 4 доказана. $\square$

Следствие 1. *Преобразование Ляпунова сохраняет свойство σ -равномерной полной управляемости (по Тонкову) системы, т. е. если система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами σ -равномерно вполне управляема (по Тонкову), то преобразованная система (23) также является σ -равномерно вполне управляемой.*

Доказательство. Пусть система (1) является σ -равномерно вполне управляемой (по Тонкову). Из теоремы 3 следует, что система (1) обладает также и свойством $H(\sigma)$. Применяя к этой системе преобразование Ляпунова $y = L(t)x$, получим систему (23), для которой, согласно теореме 4, выполняется свойство $H(\sigma)$. Тогда, по теореме 3, система (23) σ -равномерно вполне управляема (по Тонкову). Следствие 1 доказано. $\square$

Всюду далее полагаем $n = 2$ и $m \in \{1, 2\}$. Из свойства интегральной ограниченности [1, с. 252] матриц A и B вытекает существование таких чисел $a, b \geq 1$, что для всех $t \geq 0$ выполняются неравенства $\int_t^{t+\sigma} \|A(\tau)\| d\tau \leq a < +\infty$, $\int_t^{t+\sigma} \|B(\tau)\| d\tau \leq b < +\infty$. Эти числа a и b зафиксируем. Будем также считать, что для системы (1) числа σ и γ из определения 8 равномерной полной управляемости зафиксированы и для них справедливы не ограничивающие общность рассуждений оценки $\sigma \geq 1$ и $\gamma \geq 1$.

Теорема 5. *Система (3) равномерно глобально достижима тогда и только тогда, когда найдется величина $\Delta > 0$, при которой для любых чисел $r \geq 1$ и $0 < \rho \leq 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geq 0$ и произвольной матрице $H \in \mathcal{LU}_2(r, \rho)$ найдется измеримое и ограниченное на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ управление $U = U(t)$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ оценке $\|U(t)\| \leq \theta$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) выполнение равенства $X_U(t_0 + \Delta, t_0) = H$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть система (3) равномерно глобально достижима. Зафиксируем произвольные числа $t_0 \geq 0$, $r \geq 1$ и $0 < \rho \leq 1$. На основании определения множеств $\mathcal{LU}_2(r, \rho)$ и $\mathcal{M}_2(r, \rho)$ выполняется включение $\mathcal{LU}_2(r, \rho) \subset \mathcal{M}_2(r, \rho)$. Тогда, взяв в качестве H произвольную матрицу из множества $\mathcal{LU}_2(r, \rho)$, ввиду последнего включения и равномерной глобальной достижимости системы (3), найдем такие число $T > 0$ и величину $d_1 = d_1(r, \rho) > 0$, а также измеримое и ограниченное на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ управление U_1 , удовлетворяющее условию $\|U_1(t)\| \leq d_1$ для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, при которых для матрицы Коши $X_{U_1}(t, s)$, $t, s \geq 0$, системы (3) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = H$. Полагая $\theta = d_1$, $\Delta = T$, установим необходимость.

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы 5. Зафиксируем произвольные числа $t_0 \geq 0$, $r \geq 1$ и $0 < \rho \leq 1$. Возьмем любую матрицу $H \in \mathcal{M}_2(r, \rho)$ и покажем, что найдется такое число $T > 0$, при котором существует не зависящая от $t_0 \geq 0$ величина $d = d(r, \rho) > 0$, что на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ найдется такое измеримое и ограниченное управление U , удовлетворяющее условию $\|U(t)\| \leq d$ для $t \in [t_0, t_0 + T]$, при котором для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = H$.

Пользуясь теоремой 2, представим матрицу H в виде произведения матриц H_k , $k = \overline{1, 7}$, при всех $k = \overline{1, 7}$ удовлетворяющих включению $H_k \in \mathcal{LU}_2(r_1, \rho)$, где $r_1 := 3(r + 1)$. Тогда на основании условий теоремы 5 при всяком $k = \overline{1, 7}$ на каждом отрезке $[t_0 + (k - 1)\Delta, t_0 + k\Delta]$ найдем измеримое и ограниченное управление $U_k = U_k(t)$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0 + (k - 1)\Delta, t_0 + k\Delta]$ оценке $\|U_k(t)\| \leq \theta_k(r_1, \rho)$ и обеспечивающее для матрицы Коши $X_{U_k}(t, s)$ системы (3) с этим управлением равенство $X_{U_k}(t_0 + k\Delta, t_0 + (k - 1)\Delta) = H_k$.

Положим $T := 7\Delta$. Определим для системы (3) управление $U = U(t)$ на отрезке $[t_0, t_0 + T]$, полагая его равным $U(t) \equiv U_k(t)$, $t \in [t_0 + (k - 1)\Delta, t_0 + k\Delta]$, $k = \overline{1, 7}$. Тогда для матрицы Коши $X_U(t_0 + T, t_0)$ системы (3) с управлением U на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ выполняются равенства

$$X_U(t_0 + T, t_0) = X_{U_7}(t_0 + 7\Delta, t_0 + 6\Delta) \cdot \dots \cdot X_{U_1}(t_0 + \Delta, t_0) = H_7 \cdot \dots \cdot H_1 = H. \quad (29)$$

Кроме того, ввиду определения функций $U_k(t)$, $t \in [t_0 + (k - 1)\Delta, t_0 + k\Delta]$, $k = \overline{1, 7}$, следует, что функция $U = U(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, измерима и ограничена на отрезке $[t_0, t_0 + T]$, причем для

нее выполняется не зависящая от $t_0 \geq 0$ оценка $\|U(t)\| = \|U_k(t)\| \leq \Theta(r, \rho)$, в которой $\Theta(r, \rho) = \max\{\theta_k(3(r+1), \rho), k = \overline{1, 7}\} = \max\{\theta_k(r_1, \rho), k = \overline{1, 7}\}$. Тогда, полагая $d = d(r, \rho) := \Theta(r, \rho)$, на основании равенств (29) установим равномерную глобальную достижимость линейной системы (3), а с ней и достаточность теоремы. Теорема 5 доказана. $\square$

Замечание 8. Из теоремы 5 следует, что для равномерной глобальной достижимости системы (3) необходимо и достаточно одновременное существование на произвольном отрезке времени некоторой фиксированной длины таких измеримых и ограниченных управлений, которые обеспечивали бы равенства матрицы Коши системы (3) с этими управлениями на рассматриваемом временном отрезке всевозможным допустимым как верхне-, так и нижнетреугольным матрицам с положительными диагональными элементами. При этом заметим, что существование управления, реализующего только верхние либо только нижние треугольные матрицы с положительными диагональными элементами, не является достаточным условием для равномерной глобальной достижимости [3, с. 260–261]. Последнее условие может обеспечивать [3, с. 261–264] лишь глобальную ляпуновскую приводимость системы (3).

В работе [23] была дана теорема, которую можно переформулировать следующим образом:

Теорема 6. Пусть $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$ и $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geq 0$. Если система (1) равномерно вполне управляема, то найдется величина $\Delta = \Delta(\sigma) > 0$, при которой для любых чисел $r \geq 1$ и $0 < \rho \leq 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geq 0$ и произвольной верхнетреугольной матрице $H \in M_2$ с положительными диагональными элементами, удовлетворяющей оценкам $\|H - E\| \leq r$ и $\det H \geq \rho$, найдется такое измеримое и ограниченное матричное управление U , для которого при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ выполняется неравенство $\|U(t)\| \leq \theta$ и которое обеспечивает для матрицы Коши $X_U(t, s)$, $t, s \geq 0$, системы (3) с этим управлением равенство $X_U(t_0 + \Delta, t_0) = H$.

Замечание 9. Формулировка и полное доказательство данного утверждения содержатся в разделе 3.3 диссертации [24]. Величина $\Delta = \Delta(\sigma)$, указанная в теореме 6, определяется равенством $\Delta = \Delta(\sigma) := 2N\sigma$, где $N := [3\pi/\theta]$, $\theta := 7 \arcsin(4\gamma_1 b)^{-1}/16$, $\gamma_1 := \max\{\gamma, \sqrt{2}\}$.

Замечание 10. Используя подход, аналогичный предложенному при доказательстве теоремы 6, можно показать, что и для нижнетреугольных (2×2) -матриц H с положительными диагональными элементами имеет место утверждение, аналогичное теореме 6.

Таким образом, в силу теоремы 6 и замечания 10 с учетом определения $\mathcal{LU}_2(r, \rho)$ получим

Следствие 2. Пусть $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$ и $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geq 0$. Если система (1) равномерно вполне управляема, то найдется величина $\Delta = \Delta(\sigma) > 0$, при которой для любых чисел $r \geq 1$ и $0 < \rho \leq 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geq 0$ и произвольной матрице $H \in \mathcal{LU}_2(r, \rho)$ найдется такое измеримое и ограниченное матричное управление U , удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ оценке $\|U(t)\| \leq \theta$ и обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) с этим управлением выполнение равенства $X_U(t_0 + \Delta, t_0) = H$.

Теорема 7. Пусть $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geq 0$. Если двумерная линейная система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая ей замкнутая система (3) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.

Доказательство. Пусть для линейной системы (1) выполняются равенство $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geq 0$ и условие равномерной полной управляемости. Тогда в силу следствия 2 для замкнутой системы (3), соответствующей системе (1), справедливо следующее свойство: найдется величина $\Delta = \Delta(\sigma) > 0$, при которой для любых чисел $r \geq 1$ и $0 < \rho \leq 1$ существует такая

величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geq 0$ и произвольной матрице $H \in \mathcal{LU}_2(r, \rho)$ найдется такое измеримое и ограниченное матричное управление U , удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ оценке $\|U(t)\| \leq \theta$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) с этим управлением выполнение равенства $X_U(t_0 + \Delta, t_0) = H$. Наличие же последнего свойства, в силу теоремы 5, обеспечивает равномерную глобальную достижимость двумерной системы (3), соответствующей системе (1). Теорема 7 доказана. $\square$

В статье [25] установлено следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$. Если система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то существует такое измеримое и ограниченное управление $\tilde{U} : [0, +\infty) \rightarrow M_{m2}$, что система (3) с этим управлением асимптотически эквивалентна (по Богданову) системе

$$\dot{y} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (30)$$

Замечание 11. В теореме 8 асимптотическую эквивалентность систем (3) и (30) обеспечивает преобразование Ляпунова [4, с. 153–154] $x = X_{\tilde{U}}(t, 0)y$, в котором матрица $X_{\tilde{U}}(t, 0)$ — матрица Коши системы (3) с управлением $U = \tilde{U}(\cdot)$.

Теорема 9. Пусть $n = 2$, $m \in \{1, 2\}$. Если система (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая ей замкнутая система (3) является равномерно глобально достижимой.

Доказательство будем проводить в соответствии с подходом, описанным в лемме 30.1 работы [3, с. 330]. Пусть система (1) обладает свойством равномерной полной управляемости. Пользуясь теоремой 8, построим такое измеримое и ограниченное управление $U_1 : [0, +\infty) \rightarrow M_{m2}$, что система (3) с этим управлением ляпуновским преобразованием $x = L(t)y$ приводится к системе (30). Поскольку имеют место соотношения $\dot{x} = (L(t)y)' = \dot{L}(t)y + L(t)\dot{y}$ и $\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t))x = (A(t) + B(t)U_1(t))L(t)y$, то, приравнявая правые части двух последних равенств и преобразуя полученное выражение с учетом обратимости матрицы Ляпунова $L(t)$ при всех $t \geq 0$, получим соотношение $\dot{y} = \left(L^{-1}(t)(A(t) + B(t)U_1(t))L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t) \right)y$, из которого в силу (30) вытекает формула

$$L^{-1}(t)\dot{L}(t) = L^{-1}(t)(A(t) + B(t)U_1(t))L(t). \quad (31)$$

Это же преобразование приводит равномерно вполне управляемую систему [3, с. 97]

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t))x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (32)$$

к системе

$$\dot{y} = L^{-1}(t)B(t)u, \quad t \geq 0, \quad (33)$$

которая, согласно следствию 1, так же как и система (32), равномерно вполне управляема. В силу замечания 11 матрицей ляпуновского преобразования $x = L(t)y$ является матрица Коши системы (3) с управлением U_1 , которая на основании свойств матрицы Коши является абсолютно непрерывной и ограниченной матричной функцией. Тогда, ввиду определения функции $B(t)$, $t \geq 0$, матрица при управлении в системе (33) локально интегрируема и интегрально ограничена. Поскольку система (33) равномерно вполне управляема, то в силу теоремы 7 система

$$\dot{y} = L^{-1}(t)B(t)U_2(t)y, \quad t \geq 0, \quad (34)$$

полученная из системы (33) выбором некоторого измеримого и ограниченного управления, заданного в виде линейной обратной связи $u(t) = U_2(t)y$, $t \geq 0$, является равномерной глобально

достижимой. Зафиксируем для системы (34) число T из определения равномерной глобальной достижимости.

Так как матрица $X_{U_1}(t, s)$, $t, s \geq 0$, — матрица Коши системы (3) с интегрально ограниченными коэффициентами и ограниченным управлением U_1 , то, применяя лемму Гронуолла–Беллмана [4, с. 108–109] и формулу Лиувилля–Остроградского [4, с. 73], нетрудно показать, что найдутся такие числа $\kappa_1 \geq 1$ и $0 < \rho_1 \leq 1$, что для всякого $t_0 \geq 0$ и произвольных $t, s \in [t_0, t_0 + T]$ выполняются неравенства $\|X_{U_1}(t, s)\| \leq \kappa_1$ и $\det X_{U_1}(t, s) \geq \rho_1$. Зафиксируем любые числа $t_0 \geq 0$, $\kappa_2 \geq 1$ и $0 < \rho_2 \leq 1$. Возьмем произвольную матрицу $H \in \mathcal{M}_2(\kappa_2, \rho_2)$. Тогда для матрицы $H_1 := (X_{U_1}(t_0, t_0 + T)H) \in \mathcal{M}_2$ имеют место оценки $\|H_1 - E\| \leq \|X_{U_1}(t_0, t_0 + T)\| \cdot \|H\| + 1 \leq \leq \kappa_1 \cdot \kappa_2 + 1 =: r$ и $\det H_1 = \det(X_{U_1}(t_0, t_0 + T) \cdot H) = \det X_{U_1}(t_0, t_0 + T) \cdot \det H \geq \rho_1 \cdot \rho_2 =: \rho$, означающие справедливость включения $H_1 \in \mathcal{M}_2(r, \rho)$. В силу равномерной глобальной достижимости системы (34) существует величина $d = d(r, \rho) > 0$, при которой на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ найдется такое измеримое и ограниченное управление $U_2 : [t_0, t_0 + T] \rightarrow M_{m,2}$, удовлетворяющее для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ оценке $\|U_2(t)\| \leq d$, что для матрицы Коши $Y_{U_2}(t, s)$, $t, s \geq 0$, системы (34) с этим управлением обеспечивается равенство $Y_{U_2}(t_0 + T, t_0) = H_1$.

Применим к системе (34) с выбранным управлением $U_2 = U_2(\cdot)$ обратное ляпуновское преобразование $y = L^{-1}(t)x$, тогда с учетом равенства (31) получим цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} L^{-1}(t)B(t)U_2(t)L^{-1}(t)x &= L^{-1}(t)B(t)U_2(t)y = \dot{y} = (L^{-1}(t)x)' = \\ &= -L^{-1}(t)\dot{L}(t)L^{-1}(t)x + L^{-1}(t)\dot{x} = -L^{-1}(t)(A(t) + B(t)U_1(t))L(t)L^{-1}(t)x + L^{-1}(t)\dot{x}, \end{aligned}$$

из которых вытекает равенство $L^{-1}(t)B(t)U_2(t)L^{-1}(t)x = -L^{-1}(t)(A(t) + B(t)U_1(t))x + L^{-1}(t)\dot{x}$. Отсюда, таким образом, получаем, что система (34) асимптотически эквивалентна системе

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)(U_1(t) + U_2(t)L^{-1}(t)))x, \quad t \geq 0. \quad (35)$$

Положим $U(t) := U_1(t) + U_2(t)L^{-1}(t)$. Тогда, ввиду определения матричных функций $U_1(t)$, $U_2(t)$, $L(t)$, $t \geq 0$, функция $U(t)$ является измеримой и ограниченной на $[0, +\infty)$. В силу замечания 11 при всех $t \geq 0$ справедливо тождество $L(t) \equiv X_{U_1}(t, t_0)$. Отсюда и из верного [3, с. 56] для матриц Коши $X(t, s)$ и $Y(t, s)$, $t, s \geq 0$, асимптотически эквивалентных систем, связанных преобразованием Ляпунова $x = L(t)y$, соотношения $X(t, s) = L(t)Y(t, s)L^{-1}(s)$ следует, что для матрицы Коши $X_U(t_0 + T, t_0)$ системы (3) с выбранным управлением $U = U(t)$ (т.е. системы (35)), асимптотически эквивалентной системе (34) на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} X_U(t_0 + T, t_0) &= L(t_0 + T) \cdot Y_{U_2}(t_0 + T, t_0) \cdot L^{-1}(t_0) = \\ &= X_{U_1}(t_0 + T, t_0) \cdot Y_{U_2}(t_0 + T, t_0) \cdot X_{U_1}(t_0, t_0) = X_{U_1}(t_0 + T, t_0) \cdot H_1 \cdot E = \\ &= X_{U_1}(t_0 + T, t_0) \cdot X_{U_1}(t_0, t_0 + T) \cdot H = H, \end{aligned}$$

означающие равномерную глобальную достижимость системы (3). Теорема 9 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. Зайцев В.А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. № 1. С. 31–62.
3. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 480 с.
5. Богданов Ю.С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707–716.

6. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.
7. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 60–67.
8. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.
9. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 11. С. 1949–1957.
10. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 228–238.
11. Попова С.Н., Тонков Е.Л. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 723–724.
12. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.
13. Попова С.Н. Об эквивалентности локальной достижимости и полной управляемости линейных систем // Известия вузов. Математика. 2002. № 6 (481). С. 50–53.
14. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.
15. Попова С.Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 8. С. 1048–1054.
16. Козлов А.А., Макаров Е.К. О равномерной глобальной достижимости линейных управляемых систем в невырожденном случае // Веснік ВДУ. 2007. № 3 (45). С. 100–109.
17. Изобов Н.А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1974. Т. 12. С. 71–146.
18. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. P. 102–119.
19. Габдрахимов А.Ф., Зайцев В.А. Ляпуновская приводимость четырехмерных линейных стационарных управляемых систем в классе кусочно-постоянных управлений // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. № 1. С. 25–40.
20. Зайцев В.А. Критерии равномерной полной управляемости линейной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 2. С. 157–179. DOI: [10.20537/vm150202](https://doi.org/10.20537/vm150202)
21. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
22. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
23. Козлов А.А. О частном случае глобальной ляпуновской приводимости двумерных систем // Веснік ВДУ. 2008. № 3 (49). С. 105–110.
24. Козлов А.А. Управление показателями Ляпунова дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / ИМ НАН. Минск, 2008. 115 с.
25. Козлов А.А., Инц И.В. О глобальной ляпуновской приводимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 6. С. 720–742. DOI: [10.1134/S0012266116060021](https://doi.org/10.1134/S0012266116060021)

Поступила в редакцию 30.05.2017

Козлов Александр Александрович, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Полоцкий государственный университет, 211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.

E-mail: kozlovaa@tut.by

Инц Ирина Викторовна, аспирант, кафедра высшей математики, Полоцкий государственный университет, 211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.

E-mail: i.ints@mail.ru

A. A. Kozlov, I. V. Ints

On uniform global attainability of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 178–192 (in Russian).

Keywords: linear control system, uniform complete controllability, uniform global attainability.

MSC2010: 34D08, 34H05, 93C15

DOI: [10.20537/vm170203](https://doi.org/10.20537/vm170203)

We consider a linear time-varying control system with locally integrable and integrally bounded coefficients

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

We construct control of the system (1) as a linear feedback $u = U(t)x$ with measurable and bounded function $U(t)$, $t \geq 0$. For the closed-loop system

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

we study a question about the conditions for its uniform global attainability. The last property of the system (2) means existence of a matrix $U(t)$, $t \geq 0$, that ensure equalities $X_U((k+1)T, kT) = H_k$ for the state-transition matrix $X_U(t, s)$ of the system (2) with fixed $T > 0$ and arbitrary $k \in \mathbb{N}$, $\det H_k > 0$. The problem is solved under the assumption of uniform complete controllability of the system (1), corresponding to the closed-loop system (2), i.e. assuming the existence of such $\sigma > 0$ and $\gamma > 0$, that for any initial time $t_0 \geq 0$ and initial condition $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ of the system (1) on the segment $[t_0, t_0 + \sigma]$ there exists a measurable and bounded vector control $u = u(t)$, $\|u(t)\| \leq \gamma\|x_0\|$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, that transforms a vector of the initial state of the system into zero on that segment. It is proved that in two-dimensional case, i.e. when $n = 2$, the property of uniform complete controllability of the system (1) is a sufficient condition of uniform global attainability of the corresponding system (2).

REFERENCES

1. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
2. Zaitsev V.A. Global attainability and global Lyapunov reducibility of two-dimensional and three-dimensional linear control systems with the constant coefficients, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2003, no. 1, pp. 31–62 (in Russian).
3. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems), Minsk: Belarus. Navuka, 2012, 407 p.
4. Demidovich B.P. *Leksii po matematicheskoi teorii ustoychivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Moscow State University, 1998, 624 p.
5. Bogdanov Yu.S. About the asymptotically equivalent linear differential systems, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 6, pp. 707–716 (in Russian).
6. Makarov E.K., Popova S.N. The global controllability of a complete set of Lyapunov invariants for two-dimensional linear systems, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, issue 1, pp. 97–107.
7. Zaitsev V.A. Tonkov E.L. Attainability, compatibility and V.M. Millionshchikov's method of rotations, *Russian Mathematics*, 1999, vol. 43, no. 2, pp. 42–52.
8. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over the Lyapunov exponents of consistent systems. I, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 10, pp. 1556–1564.
9. Popova S.N., Tonkov E.L. Control of the Lyapunov exponents of consistent systems. II, *Differential Equations*, 1994, vol. 30, no. 11, pp. 1800–1807.
10. Popova S.N., Tonkov E.L. Control over Lyapunov exponents of consistent systems. III, *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 2, pp. 209–218.
11. Popova S.N., Tonkov E.L. Uniform consistency of linear systems, *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 672–674.

12. Popova S.N., Tonkov E.L. Consistent systems and control of Lyapunov exponents, *Differential Equations*, 1997, vol. 33, no. 2, pp. 226–235.
13. Popova S.N. Equivalence between local attainability and complete controllability of linear systems, *Russian Mathematics*, 2002, vol. 46, no. 6, pp. 48–51.
14. Popova S.N. Global controllability of the complete set of Lyapunov invariants of periodic systems, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, issue 12, pp. 1713–1723. DOI: [10.1023/B:DIEQ.0000023551.43484.e5](https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000023551.43484.e5)
15. Popova S.N. On the global controllability of Lyapunov exponents of linear systems, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, issue 8, pp. 1072–1078. DOI: [10.1134/S0012266107080058](https://doi.org/10.1134/S0012266107080058)
16. Kozlov A.A., Makarov E.K. About uniform global attainability of linear control systems in the non-degenerate case, *Vestn. Vitsebsk. Dzyarzh. Univ.*, 2007, no. 3 (45), pp. 100–109 (in Russian).
17. Izobov N.A. Linear systems of ordinary differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, issue 1, pp. 46–96. DOI: [10.1007/BF01091661](https://doi.org/10.1007/BF01091661)
18. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
19. Gabdrakhimov A.F., Zaitsev V.A. Lyapunov reducibility for four-dimensional linear stationary control systems in the class of the piecewise-constant control functions, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat.*, 2006, no. 1, pp. 25–40 (in Russian).
20. Zaitsev V.A. Criteria for uniform complete controllability of a linear system, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 157–179 (in Russian). DOI: [10.20537/vm150202](https://doi.org/10.20537/vm150202)
21. Tonkov E.L. A criterion of uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian).
22. Horn R., Johnson C. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.
23. Kozlov A.A. On the partial case of global Lyapunov's reducibility of two-dimensional systems, *Vestn. Vitsebsk. Dzyarzh. Univ.*, 2008, no. 3 (49), pp. 105–110 (in Russian).
24. Kozlov A.A. Control over Lyapunov's exponents of a differential systems with break and fast oscillated coefficients, *Abstract of Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation*, Minsk, 2008, 20 p. (In Russian).
25. Kozlov A.A., Ints I.V. On the global Lyapunov reducibility of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Differential Equation*, 2016, vol. 52, issue 6, pp. 699–721. DOI: [10.1134/S0012266116060021](https://doi.org/10.1134/S0012266116060021)

Received 30.05.2017

Kozlov Aleksandr Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Polotsk State University, ul. Blokhina, 29, Novopolotsk, 211440, Belarus. E-mail: kozlovaa@tut.by

Ints Irina Viktorovna, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Polotsk State University, ul. Blokhina, 29, Novopolotsk, 211440, Belarus. E-mail: i.ints@mail.ru