V. N. Baranov, Invariant sets of systems with aftereffect, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 2, 17–18

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.157.27.8

April 26, 2023, 12:19:08

УДК 517.929

© В. Н. Баранов

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ¹

Даются необходимые и достаточные условия инвариантности множеств для систем с последствием.

Ключевые слова: системы с последствием, множества выживаемости, инвариантные множества.

Пусть задано число $r > 0$. Обозначим $\mathfrak{X} = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных на отрезке $[-r, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и нормой $\|\varphi\|_{\mathfrak{X}} \doteq \max_{s \in [-r, 0]} |\varphi(s)|$. Для непрерывной функции $t \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0 - r, t_0 + \alpha)$ обозначим $t \rightarrow x_t \in \mathfrak{X}$, $t \in [t_0 - r, t_0 + \alpha)$ — отображение заданное равенством

$$x_t(s) \doteq x(t + s), \quad t \in [t_0 - r, t_0 + \alpha), \quad s \in [-r, 0]. \quad (1)$$

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения с последствием

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (2)$$

$$x_{t_0} = \varphi, \quad (3)$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная на $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ функция, $\varphi \in \mathfrak{X}$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$. Будем говорить, что множество M является *множеством выживаемости системы* (2), если для любой точки $(t_0, \varphi) \in M$ найдется решение задачи (2), (3) $t \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0 - r, t_0 + \alpha)$ такое, что для всех $t \in [t_0 - r, t_0 + \alpha)$ выполнено включение $(t, x_t) \in M$, где $t \rightarrow x_t \in \mathfrak{X}$ определено равенством (1).

Если для любой точки $(t_0, \varphi) \in M$ и любого решения $t \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^n$ задачи (2), (3) движение $t \rightarrow x_t$, определенное равенством (1), не покидает множества M , то будем говорить, что множество M *положительно инвариантно*.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258).

Теорема 1. Пусть M — непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R} \times \mathfrak{X}$, $f : \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция. Тогда M является множеством выживаемости системы (2), если и только если имеет место включение $f(t, \varphi) \in T_{(t, \varphi)} M$.

Здесь под $T_{(t_0, \varphi)} M$ понимается класс эквивалентности $\{t \rightarrow y_t\}$, где отображение $t \rightarrow y_t$ определено равенством (1) и функцией

$$\begin{aligned} y(t) &= \varphi(t - t_0), \quad t \in [t_0 - r, t_0], \\ y(t) &= \varphi(0) + (t - t_0)f(t_0, \varphi), \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть $M \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{X}$ — замкнутое подмножество и задана $f : \mathbb{R} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция. Пусть найдется положительное число $\hat{\delta}$ такое, что для всех $0 \leq \delta \leq \hat{\delta}$ и для всех $(t, \varphi) \in \partial M^\delta$ выполнено включение $f(t, \varphi) \in T_{(t, \varphi)} M^\delta$. Тогда множество M является положительно инвариантным для системы (2).

Аналогичные результаты имеют место и для дифференциальных включений с последействием.

Поступила в редакцию 15.02.08

V. N. Baranov

Invariant sets of systems with aftereffect

The necessary and sufficient conditions for the positive invariance of a set for systems (inclusions) with aftereffect are presented.

Баранов Виктор Николаевич
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: vbaranov@uni.udm.ru