Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. S. Polyanskii, V. M. Radygin, S. Yu. Misyurin, Decomposition of a regular quaternion function, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2018, Volume 28, Issue 1, 36–47

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm180104>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.162.27.143

April 26, 2023, 13:32:13

УДК 517.554

© И. С. Полянский, В. М. Радыгин, С. Ю. Мисюрин

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ КВАТЕРНИОН-ФУНКЦИИ

В статье рассмотрены задачи, связанные с разложением регулярной кватернион-функции в обобщенные ряды Тейлора и Лорана. Обобщенный ряд Тейлора для регулярной кватернион-функции получен путем разложения ядра Коши в 4-мерном гипершаре в алгебре кватернионов и в системе гиперсферических координат. Обобщенный ряд Лорана для регулярной кватернион-функции получен путем разложения ядра Коши во внешности 4-мерного гипершара в алгебре кватернионов и в системе гиперсферических координат. На основе полученных решений при рассмотрении разложения регулярной кватернион-функции в бесконечно малом шаре, который ограничен 3-сферой, задано правило определения вычета регулярной кватернион-функции в алгебре кватернионов и в системе гиперсферических координат относительно изолированной особой точки. Также найдено разложение мероморфной кватернион-функции в степенной ряд.

Ключевые слова: регулярная кватернион-функция, ряд Тейлора, ряд Лорана, вычет, мероморфная кватернион-функция.

DOI: [10.20537/vm180104](https://doi.org/10.20537/vm180104)

Теория кватернионов, базирующаяся на обобщении [1] условий Коши–Римана [2] для голоморфной (регулярной) кватернион-функции [3], позволяет использовать алгебру удобную для описания изометрий в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ [4] при решении задач конформного отображения [5]. Однако, несмотря на длительный период ее формирования [1, 6, 7], проблема разложения регулярной кватернион-функции в обобщенные степенные ряды является недостаточно проработанной. Последнее связано с тем, что ряд известных результатов [1, 8, 9] получен не на основе применения некоммутативной алгебры кватернионов или ее геометрической интерпретации (гиперсферическая система координат [10]), а с использованием алгебры действительных чисел с компонентным разложением кватернионных переменных и функций. Также в ряде работ [11, 12] для решения задач по разложению регулярной кватернион-функции в обобщенные степенные ряды предлагается использовать теорию среза регулярных функций над кватернионами [13]. При этом определение регулярной кватернион-функции отличается от классического [7].

Следствием вышеизложенного, по нашему мнению, являются ошибочное истолкование полученных решений и затруднения при прикладном применении результатов. Целью статьи является получение разложений регулярной кватернион-функции в обобщенные степенные ряды [9, 10] с установлением взаимосвязи между представлениями этого разложения в алгебре кватернионов и гиперсферической системе координат.

§ 1. Основные обозначения и определения

Под $\mathbb{H}$ будем понимать алгебру кватернионов Гамильтона [6], объектом которой является кватернион $q \in \mathbb{H}$, заданный линейной комбинацией $q = q_0 + j_1 q_1 + j_2 q_2 + j_3 q_3$ ($q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$; j_1, j_2, j_3 — мнимые единицы), со скалярными характеристиками и кватернионными операциями [1].

Под кватернион-функцией $F(q)$ в $\mathbb{H}$ -алгебре будем понимать отображение $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, функциональная зависимость которого может быть представлена в виде линейной комбинации четырех действительных функций от $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$: $F(q) = F_0(q_0, \dots, q_3) + j_1 F_1(q_0, \dots, q_3) + j_2 F_2(q_0, \dots, q_3) + j_3 F_3(q_0, \dots, q_3)$ [1].

Определение регулярной кватернион-функции $F(q)$, согласно [1], будем рассматривать через кватернионно-праводифференцируемую $F'_r(q) = dF(q)(dq)^{-1}$ и кватернионно-леводифференцируемую $F'_l(q) = (dq)^{-1} dF(q)$ функции, не совпадающие в силу некоммутативности $\mathbb{H}$ -алгебры. С учетом того, что теории кватернионно-дифференцируемых слева и справа функций

эквивалентны [1], под кватернионно-дифференцируемой функцией будем понимать праводифференцируемую функцию, для которой предел $dF(q)(dq)^{-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{F(q+h \cdot dq) - F(q)}{h} \right) (dq)^{-1} \right]$ существует (производная Гато [14]), где $q, dq \in \mathbb{H}$; $h \in \mathbb{R}$. Соответственно под регулярной кватернион-функцией будем понимать определение из [1] для праворегулярной кватернион-функции, для которой существует кватернион $F'_r(q)$ такой, что $d(F dq \wedge dq) = -2F'_r(q) Dq$, где $Dq = dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 - j_1 dq_0 \wedge dq_2 \wedge dq_3 - j_2 dq_0 \wedge dq_3 \wedge dq_1 - j_3 dq_0 \wedge dq_1 \wedge dq_2$ — внешняя 3-форма; $d(F dq \wedge dq) = dF(q) \wedge dq \wedge dq$.

Получение разложений регулярной кватернион-функции в обобщенные ряды Тейлора и Лорана позволяет определить аналитическое продолжение $F(q)$.

Теорема 1. Пусть границы областей $G_1, G_2 \in \mathbb{H}$ содержат общую сферическую поверхность γ , а функции F_1 и F_2 являются регулярными соответственно в G_1 и G_2 . Тогда функция F_1 допускает аналитическое продолжение F_2 через γ в G_2 , если существует регулярная функция F в области $G = G_1 \cup G_2 \subset \mathbb{H}$ такая, что

$$F(q) = \begin{cases} F_1(q) \forall q \in G_1, \\ F_2(q) \forall q \in G_2, \end{cases} \quad \text{при } F_1(q) = F_2(q) \forall q \in \gamma.$$

Доказательство. Обозначим через ∂G границу области G . Пусть внутри области G содержится гладкая замкнутая поверхность $\partial G'$, расположенная относительно ∂G на сколь угодно близком расстоянии. Тогда пересечение $\partial G'$ с γ образует гладкий замкнутый контур $\partial \gamma$. Согласно обобщенной интегральной формуле Коши в алгебре кватернионов [1] и с учетом введенных представлений имеем

$$F(q^0) = \frac{1}{2\pi^2} \oint_{\partial G'} F(q) Dq M(q - q^0), \quad q^0 \in G, \quad (1.1)$$

где $M(q - q^0) = (q - q^0)^{-1} / \|q - q^0\|$ — ядро Коши (Коши–Фьютера). Обозначим через $\partial G'_1$ замкнутую поверхность, образованную частью $\partial \tilde{G}'_1$ контура $\partial G'$, содержащейся в G_1 , и сферической поверхностью $\gamma_1 \subset \gamma$, ограниченной гладким замкнутым контуром $\partial \gamma$. Аналогично через $\partial G'_2$ обозначим замкнутую поверхность, образованную частью $\partial \tilde{G}'_2$ контура $\partial G'$, содержащейся в G_2 , и $\gamma_1 \subset \gamma$. В силу (1.1) и обобщения теоремы Коши в алгебре кватернионов [8] $\forall q^0 \in G$ получим соотношения

$$\begin{aligned} F(q^0) &= F_1(q^0) + F_2(q^0), \\ F_1(q^0) &= \frac{1}{2\pi^2} \oint_{\partial G'_1} F(q) Dq M(q - q^0) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_{\partial \tilde{G}'_1} + \int_{\gamma_1} \right), \\ F_2(q^0) &= \frac{1}{2\pi^2} \oint_{\partial G'_2} F(q) Dq M(q - q^0) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_{\partial \tilde{G}'_2} - \int_{\gamma_1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

задающие тождество $F(q) = F_1(q) \forall q \in G_1$.

Аналогично (1.2) определяется тождество $F(q) = F_2(q) \forall q \in G_2$. Теорема доказана. $\square$

§ 2. Разложение кватернион-функции в обобщенный ряд Тейлора

Теорема 2. Всякая кватернион-функция $F(q)$, регулярная в некотором 4-мерном гипершаре $|q - q^0| < R$ с центром в точке q^0 , может быть представлена в этом гипершаре степенным рядом

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q - q^0)^n \quad \text{при } c_n = F^{(n)}(q^0) / n!, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned}
 F^{(n)}(q^0) &= d^n F(q^0) (dq)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi^2} \oint_{S_0} F(q') Dq' d^n M(q' - q^0) (dq)^{-n}; \\
 d^n M(q' - q^0) &= (-1)^{n-1} n! (q' - q^0)^{-1} / \|q' - q^0\| \left\{ \left[dq(q' - q^0)^{-1} \right]^n + \right. \\
 &+ \sum_{m=1}^n \left(\left[dq(q' - q^0)^{-1} \right]^{n-m} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left[\frac{2^{m-2k} (m-k)! \left(\operatorname{Re} \left((q' - q^0) \overline{dq} \right) \right)^{m-2k}}{k! (m-2k)! \|q' - q^0\|^{m-k} (-\|dq\|)^{-k}} \right] \right) \left. \right\}. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

В (2.2) $dq = q - q^0$, S_0 — 3-сфера с центром в точке q^0 и радиусом R , $\lfloor m/2 \rfloor$ определяет целую часть от деления $m/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая во внимание, что $\|q' - q^0\| = R$, $\|q - q^0\| = r$, $r < R$, и используя разложение $(1 - q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ [10] для $|q| < 1$, $\|q' - q\|^{-1} = \|(q' - q)^{-1}\|$, получим

$$\begin{aligned}
 (q' - q)^{-1} &= (q' - q^0 - (q - q^0))^{-1} = (q' - q^0)^{-1} \left[1 - (q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^{-1} = \\
 &= (q' - q^0)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^n; \\
 \|q' - q\|^{-1} &= \|q' - q^0\|^{-1} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^n \right\| = \|q' - q^0\|^{-1} \times \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^n \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\bar{q}' - \bar{q}^0)^{-1} (\bar{q} - \bar{q}^0) \right]^n. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Найденные разложения (2.3) удовлетворяют условиям абсолютной и равномерной сходимости. С учетом (2.3) и свойств степенных рядов определим ядро Коши $M(q' - q)$ в виде

$$\begin{aligned}
 M(q' - q) &= \frac{(q' - q^0)^{-1}}{\|q' - q^0\|} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^n \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\bar{q}' - \bar{q}^0)^{-1} \times \right. \\
 &\times \left. (\bar{q} - \bar{q}^0) \right]^n = (q' - q^0)^{-1} / \|q' - q^0\| \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \left((n_1+1) \left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^{n_1} \times \right. \\
 &\times \left. \left[(\bar{q}' - \bar{q}^0)^{-1} (\bar{q} - \bar{q}^0) \right]^{n_2} \right). \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Используя свойства кратных рядов, приведем (2.4) к виду

$$\begin{aligned}
 M(q' - q) &= \frac{(q' - q^0)^{-1}}{\|q' - q^0\|} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left((n+1-m) \left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^{n-m} \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left[(\bar{q}' - \bar{q}^0)^{-1} (\bar{q} - \bar{q}^0) \right]^m \right) \left. \right\} = \frac{(q' - q^0)^{-1}}{\|q' - q^0\|} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left((q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right)^n + \right. \right. \\
 &+ \sum_{m=1}^n \left(\left[(q - q^0) (q' - q^0)^{-1} \right]^{n-m} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left[\frac{2^{m-2k} (-\|q - q^0\|)^k \|q' - q^0\|^{k-m}}{k! (m-2k)!} \times \right. \right. \\
 &\times \left. \left. (m-k)! \left(\operatorname{Re} \left((q' - q^0) (\bar{q} - \bar{q}^0) \right) \right)^{m-2k} / (k! (m-2k)! \right) \right] \right) \left. \right\}. \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

С учетом определения $dq = q - q^0$ в (2.2) приведем (2.5) к виду

$$M(q' - q) = \frac{(q' - q^0)^{-1}}{\|q' - q^0\|} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(dq(q' - q^0)^{-1} \right)^n + \sum_{m=1}^n \left(\left[dq(q' - q^0)^{-1} \right]^{n-m} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \left[\frac{2^{m-2k} (m-k)!}{k! (m-2k)!} (-\|dq\|)^k \left(\operatorname{Re} \left((q' - q^0) \overline{dq} \right) \right)^{m-2k} \|q' - q^0\|^{k-m} \right] \right] \right\}. \quad (2.6)$$

Подставляя разложение (2.6) ядра Коши в интегральную формулу Коши

$$F(q) = \frac{1}{2\pi^2} \oint_{S_0} F(q') Dq' M(q' - q),$$

с учетом (2.2) при вынесении суммы по n за знак интеграла и домножении (2.6) справа на $(dq)^{-n}$ получим соотношение (2.1). Теорема доказана. $\square$

Зададим кватернионные переменные q', q в гипертсферических координатах:

$$q' = R(\cos \psi' + [(j_1 \cos \varphi' + j_2 \sin \varphi') \sin \theta' + j_3 \cos \theta'] \sin \psi'), \\ q = r(\cos \psi + [(j_1 \cos \varphi + j_2 \sin \varphi) \sin \theta + j_3 \cos \theta] \sin \psi)$$

при $q^0 = 0$ и введем в рассмотрение гармонические многочлены [15]:

$$Y_{n,m,k}^a(\varphi, \theta, \psi) = Z_{n,m,k}(\theta, \psi) \cos(k\varphi); \quad Y_{n,m,k}^b(\varphi, \theta, \psi) = Z_{n,m,k}(\theta, \psi) \sin(k\varphi), \quad (2.7)$$

образующие ортогональный базис на единичной 3-сфере. В выражении (2.7) $n, m, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — индексы, задаваемые при условии $n \geq m \geq k$; $Z_{n,m,k}(\theta, \psi)$ — вспомогательные функции, определяемые соотношением [15]

$$Z_{n,m,k}(\theta, \psi) = C_{n-m}^{m+1}(\cos \psi) C_{m-k}^{k+0,5}(\cos \theta) \sin^m \psi \sin^k \theta, \quad (2.8)$$

где $C_n^\alpha(z)$ — многочлен Гегенбауэра [16].

Множитель, нормирующий функции (2.7) до ортонормированной системы $Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$, при $\delta_k = \begin{cases} 1/\sqrt{\pi}, k=0, \\ \sqrt{2/\pi}, k \neq 0, \end{cases}$ обозначим через

$$A_{n,m,k} = \delta_k 2^{m+k+0,5} m! \Gamma(k+0,5) \sqrt{\frac{(n+1)(m+0,5)(n-m)!(m-k)!}{(n+m+1)!(n+k)!}}.$$

С учетом введенных соотношений сформулируем следующее утверждение, определяющее иное представление n -х элементов $M^{(n)}(q' - q) = (-1)^{n-1} d^n M(q')/n!$ разложения ядра Коши (2.5) в ортонормированной системе гипертсферических функций.

Лемма 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $|q|/|q'| < 1$, тогда

$$M^{(n)}(q' - q) = \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{k=0}^m \left[Y_{n+1,m,k}^{a,b}(\varphi', \theta', \psi') \lambda_{n+1,m,k}^a + Y_{n+1,m,k}^{b,a}(\varphi', \theta', \psi') \lambda_{n+1,m,k}^b \right], \quad (2.9)$$

где

$$\lambda_{n,m,k}^{a,b} = \frac{A_{n,m,k}}{2(n+1)R^3} \left(\frac{r}{R} \right)^{n-1} \left[\frac{Y_{n-1,m,k}^{a,b}}{(n+m+1)^{-1}} + \frac{j_1}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n-1,m+1,k+1}^{a,b}}{(m+1)^{-1}(k+0,5)^{-1}} + \frac{Y_{n-1,m-1,k+1}^{a,b}(n+m+1)}{4m(k+0,5)^{-1}(n+m)^{-1}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{Y_{n-1,m+1,k-1}^{a,b}(m+1)(k-0,5)^{-1}}{4(m-k+1)^{-1}(m-k+2)^{-1}} - \frac{Y_{n-1,m-1,k-1}^{a,b}(m+k-1)(m+k)}{16m(k-0,5)(n+m)^{-1}(n+m+1)^{-1}} \right) \pm \frac{j_2}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n-1,m+1,k+1}^{b,a}}{(m+1)^{-1}(k+0,5)^{-1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Y_{n-1,m-1,k+1}^{b,a}}{4m(n+m)^{-1}(n+m+1)^{-1}} + \frac{Y_{n-1,m+1,k-1}^{b,a}(m+1)(k-0,5)^{-1}}{4(m-k+1)^{-1}(m-k+2)^{-1}} + \frac{Y_{n-1,m-1,k-1}^{b,a}(m+k-1)(m+k)}{16m(k-0,5)(n+m)^{-1}(n+m+1)^{-1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{j_3}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n-1,m+1,k}^{a,b}(m+1)}{(m-k+1)^{-1}} - \frac{Y_{n-1,m-1,k}^{a,b}(n+m+1)}{4m(n+m)^{-1}(m+k)^{-1}} \right) \right]. \quad (2.10)$$

В выражении (2.10) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b} = Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим разложение ядра Коши $M(q' - q)$ в системе гармонических многочленов:

$$M(q' - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \left[Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi') \lambda_{n,m,k}^a + Y_{n,m,k}'^{b,b}(\varphi', \theta', \psi') \lambda_{n,m,k}^b \right], \quad (2.11)$$

где $\lambda_{n,m,k}^{a,b}$ с учетом ортонормированности системы гипersферических функций (2.7) определяется кратным интегралом по поверхности 3-сферы при задании $M(q' - q)$ в гипersферической системе координат:

$$\lambda_{n,m,k}^{a,b} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{(R\bar{\eta}' - r\bar{\eta}) Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi')}{[R^2 + r^2 - 2rR \operatorname{Re}(\eta' \bar{\eta})]^2} \varepsilon(\psi', \theta') d\psi' d\theta' d\varphi', \quad (2.12)$$

где $\eta = \frac{q}{r}$, $\eta' = \frac{q'}{R}$ — единичные векторы в $\mathbb{R}^4$, $\varepsilon(\psi', \theta') = \sin^2 \psi' \sin \theta'$.

Записав интеграл (2.12) в виде суммы двух интегралов, числители которых зависят от переменных η' и η соответственно, с учетом интеграла Пуассона для внутренней части 3-сферы, теоремы Функа–Гекке [17] для $R > r$ получим представление второго слагаемого интеграла (2.12) в виде

$$\frac{-1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{r\bar{\eta} Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi') \varepsilon(\psi', \theta')}{[R^2 + r^2 - 2rR \operatorname{Re}(\eta' \bar{\eta})]^2} d\psi' d\theta' d\varphi' = -\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \frac{r^2 \bar{\eta} Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)}{R^3 (R^2 - r^2)}. \quad (2.13)$$

С учетом выражений (2.7), (2.8), представления многочлена Гегенбауэра [15] и выражения вектора η' в гипersферической системе координат преобразуем произведение $\bar{\eta}' Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi')$ к виду

$$\begin{aligned} \bar{\eta}' Y_{n,m,k}^{a,b} = & E_1 Y_{n+1,m,k}^{a,b} + E_2 Y_{n-1,m,k}^{a,b} + j_1 \left(I_1^1 Y_{n+1,m+1,k+1}^{a,b} + I_1^2 Y_{n+1,m-1,k+1}^{a,b} + \right. \\ & + I_1^3 Y_{n+1,m+1,k-1}^{a,b} + I_1^4 Y_{n+1,m-1,k-1}^{a,b} + I_2^1 Y_{n-1,m+1,k+1}^{a,b} + I_2^2 Y_{n-1,m-1,k+1}^{a,b} + I_2^3 \times \\ & \times Y_{n-1,m+1,k-1}^{a,b} + I_2^4 Y_{n-1,m-1,k-1}^{a,b} \left. \right) + j_2 \left(J_1^1 Y_{n+1,m+1,k+1}^{b,a} + J_1^2 Y_{n+1,m-1,k+1}^{b,a} + \right. \\ & + J_1^3 Y_{n+1,m+1,k-1}^{b,a} + J_1^4 Y_{n+1,m-1,k-1}^{b,a} + J_2^1 Y_{n-1,m+1,k+1}^{b,a} + J_2^2 Y_{n-1,m-1,k+1}^{b,a} + J_2^3 \times \\ & \times Y_{n-1,m+1,k-1}^{b,a} + J_2^4 Y_{n-1,m-1,k-1}^{b,a} \left. \right) + j_3 \left(K_1^1 Y_{n+1,m+1,k}^{a,b} + K_1^2 Y_{n+1,m-1,k}^{a,b} + \right. \\ & \left. + K_2^1 Y_{n-1,m+1,k}^{a,b} + K_2^2 Y_{n-1,m-1,k}^{a,b} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где коэффициенты задаются соотношениями

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{n-m+1}{2(n+1)}, \quad E_2 = \frac{n+m+1}{2(n+1)}, \quad I_1^1 = -I_2^1 = J_1^1 = -J_2^1 = \frac{-(m+1)(k+0,5)}{2(n+1)(m+0,5)}, \\ I_1^2 &= J_1^2 = \frac{-(n-m+1)(n-m+2)(k+0,5)}{8m(n+1)(m+0,5)}, \quad I_2^2 = J_2^2 = \frac{(n+m)(n+m+1)(k+0,5)}{8m(n+1)(m+0,5)}, \\ I_1^3 &= -I_2^3 = -J_1^3 = J_2^3 = \frac{(m+1)(m-k+1)(m-k+2)}{8(n+1)(m+0,5)(k-0,5)}, \\ I_1^4 &= -J_1^4 = \frac{(n-m+2)(n-m+1)(m+k-1)}{32m(n+1)(m+0,5)(k-0,5)(m+k)^{-1}}, \\ I_2^4 &= -J_2^4 = \frac{-(n+m)(n+m+1)(m+k-1)(m+k)}{32m(n+1)(m+0,5)(k-0,5)}, \quad K_1^1 = -K_2^1 = \frac{-(m-k+1)(m+1)}{2(n+1)(m+0,5)}, \\ K_1^2 &= \frac{-(n+m)(n+m+1)(m+k)}{8m(n+1)(m+0,5)}, \quad K_2^2 = \frac{(n-m+2)(n-m+1)(m+k)}{8m(n+1)(m+0,5)}. \end{aligned}$$

В выражении (2.14) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b} = Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi', \theta', \psi')$.

С учетом выражения (2.14) и теоремы Функа–Гекке [17] для $R > r$ преобразуем первое слагаемое интеграла (2.12) к виду

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{R\bar{\eta}' Y_{n,m,k}^{'a,b}(\varphi', \theta', \psi') \varepsilon(\psi', \theta')}{\left[R^2 + r^2 - 2rR \operatorname{Re}(\eta'\bar{\eta})\right]^2} d\psi' d\theta' d\varphi' = \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} \frac{A_{n,m,k} W_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)}{R^3 (R^2 - r^2)}, \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} W_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi) = & r^2 E_1 Y_{n+1,m,k}^{a,b} + R^2 E_2 Y_{n-1,m,k}^{a,b} + j_1 \left[r^2 \left(I_1^1 Y_{n+1,m+1,k+1}^{a,b} + \right. \right. \\ & + I_1^2 Y_{n+1,m-1,k+1}^{a,b} + I_1^3 Y_{n+1,m+1,k-1}^{a,b} + I_1^4 Y_{n+1,m-1,k-1}^{a,b} \Big) + R^2 \left(I_2^1 Y_{n-1,m+1,k+1}^{a,b} + \right. \\ & + I_2^2 Y_{n-1,m-1,k+1}^{a,b} + I_2^3 Y_{n-1,m+1,k-1}^{a,b} + I_2^4 Y_{n-1,m-1,k-1}^{a,b} \Big) \Big] + j_2 \left[r^2 \left(J_1^1 Y_{n+1,m+1,k+1}^{b,a} + \right. \right. \\ & + J_1^2 Y_{n+1,m-1,k+1}^{b,a} + J_1^3 Y_{n+1,m+1,k-1}^{b,a} + J_1^4 Y_{n+1,m-1,k-1}^{b,a} \Big) + R^2 \left(J_2^1 Y_{n-1,m+1,k+1}^{b,a} + \right. \\ & + J_2^2 Y_{n-1,m-1,k+1}^{b,a} + J_2^3 Y_{n-1,m+1,k-1}^{b,a} + J_2^4 Y_{n-1,m-1,k-1}^{b,a} \Big) \Big] + j_3 \left[r^2 \left(K_1^1 Y_{n+1,m+1,k}^{a,b} + \right. \right. \\ & + K_1^2 Y_{n+1,m-1,k}^{a,b} \Big) + R^2 \left(K_2^1 Y_{n-1,m+1,k}^{a,b} + K_2^2 Y_{n-1,m-1,k}^{a,b} \right) \Big]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В выражении (2.16) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b} = Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$.

Объединяя теперь слагаемые (2.13), (2.15) и преобразуя произведение $\bar{\eta}' Y_{n,m,k}^{'a,b}(\varphi, \theta, \psi)$ с учетом (2.14), находим $\lambda_{n,m,k}^{a,b}$ в виде (2.10).

Полученные результаты позволяют определить разложение ядра Коши в ортонормированной системе гармонических многочленов (2.7).

С другой стороны, определив n -е элементы разложения ядра Коши (2.5) в гипersферической системе координат в виде

$$M^{(n)}(q' - q) = \frac{\bar{\eta}'}{R^3} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left\{ (\eta\bar{\eta}')^n + \sum_{m=1}^n \left[(\eta\bar{\eta}')^{n-m} \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{m-2k} (m-k)!}{k! (m-2k)! \operatorname{Re}(\eta\bar{\eta}')^{2k-m}} \right] \right\}, \quad (2.17)$$

для $n = 0$ с учетом (2.10) получим тождество

$$\begin{aligned} M^{(0)}(q' - q) = & \frac{\bar{\eta}'}{R^3} = \frac{1}{R^3} (\cos \psi' - [(j_1 \cos \varphi' + j_2 \sin \varphi') \sin \theta' + j_3 \cos \theta'] \sin \psi') = \\ = & \lambda_{1,0,0}^a Y_{1,0,0}^{a'} + \lambda_{1,0,0}^b Y_{1,0,0}^{b'} + \lambda_{1,1,0}^a Y_{1,1,0}^{a'} + \lambda_{1,1,0}^b Y_{1,1,0}^{b'} + \lambda_{1,1,1}^a Y_{1,1,1}^{a'} + \lambda_{1,1,1}^b Y_{1,1,1}^{b'}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В выражении (2.18) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{'a,b} = Y_{n,m,k}^{'a,b}(\varphi', \theta', \psi')$.

Аналогично (2.18), продолжая определение (2.17) для $n > 0$ при выполнении условия $\lambda_{0,0,0}^a Y_{0,0,0}^{a'}(\varphi', \theta', \psi') + \lambda_{0,0,0}^b Y_{0,0,0}^{b'}(\varphi', \theta', \psi') = 0$, получим (2.9). Лемма доказана. $\square$

§ 3. Разложение кватернион-функции в обобщенный ряд Лорана

Из доказательства леммы 1 следует разложение ядра Коши для $r > R$ в гипersферической системе функций.

Лемма 2. Пусть $|q|/|q'| > 1$, тогда

$$M(q' - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \left[Y_{n,m,k}^{a'}(\varphi', \theta', \psi') \tilde{\lambda}_{n,m,k}^a + Y_{n,m,k}^{b'}(\varphi', \theta', \psi') \tilde{\lambda}_{n,m,k}^b \right], \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{n,m,k}^{a,b} = & \frac{A_{n,m,k}}{2(n+1)r^3} \left(\frac{R}{r} \right)^n \left[\frac{Y_{n+1,m,k}^{a,b}}{-(n-m+1)^{-1}} + \frac{j_1}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n+1,m+1,k+1}^{a,b}}{(m+1)^{-1}(k+0,5)^{-1}} + \right. \right. \\ & + \frac{Y_{n+1,m-1,k+1}^{a,b}(k+0,5)}{4m(n-m+1)^{-1}(n-m+2)^{-1}} - \frac{Y_{n+1,m+1,k-1}^{a,b}(m+1)(k-0,5)^{-1}}{4(m-k+1)^{-1}(m-k+2)^{-1}} - \\ & \left. \left. - \frac{Y_{n+1,m-1,k-1}^{a,b}(m+k-1)(m+k)}{16m(k-0,5)(n-m+1)^{-1}(n-m+2)^{-1}} \right) \pm \right. \\ & \pm \frac{j_2}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n+1,m+1,k+1}^{b,a}}{(m+1)^{-1}(k+0,5)^{-1}} + \frac{Y_{n+1,m-1,k+1}^{b,a}(k+0,5)}{4m(n-m+1)^{-1}(n-m+2)^{-1}} + \right. \\ & + \frac{Y_{n+1,m+1,k-1}^{b,a}(m+1)(k-0,5)^{-1}}{4(m-k+1)^{-1}(m-k+2)^{-1}} + \frac{Y_{n+1,m-1,k-1}^{b,a}(m+k-1)(n-m+2)}{16m(k-0,5)(n-m+1)^{-1}(m+k)^{-1}} \Big) + \\ & \left. + \frac{j_3}{m+0,5} \left(\frac{Y_{n+1,m+1,k}^{a,b}(m+1)}{(m-k+1)^{-1}} - \frac{Y_{n+1,m-1,k}^{a,b}(n-m+2)}{4m(n-m+1)^{-1}(m+k)^{-1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В выражении (3.2) для сокращения записи принято обозначение $Y_{n,m,k}^{a,b} = Y_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$.

Доказательство. Справедливость тождества (3.1) следует из разложения ядра Коши $M(q' - q)$ в системе гармонических многочленов аналогично (2.11) с определением значений $\tilde{\lambda}_{n,m,k}^{a,b}$ в виде интеграла (2.12). При этом слагаемые интеграла (2.12) при условии $r > R$ представляются в следующем виде:

$$\frac{-1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{r\bar{\eta}Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi') \varepsilon(\psi', \theta')}{[R^2 + r^2 - 2rR\operatorname{Re}(\eta'\bar{\eta})]^2} d\psi' d\theta' d\varphi' = \left(\frac{R}{r} \right)^n \frac{r^2 \bar{\eta}Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)}{r^3(R^2 - r^2)}, \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{R\bar{\eta}'Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi', \theta', \psi') \varepsilon(\psi', \theta')}{[R^2 + r^2 - 2rR\operatorname{Re}(\eta'\bar{\eta})]^2} d\psi' d\theta' d\varphi' = - \left(\frac{R}{r} \right)^n \frac{A_{n,m,k} \tilde{W}_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)}{r^3(R^2 - r^2)}, \quad (3.4)$$

где гармоническая функция $\tilde{W}_{n,m,k}^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$ определяется аналогичным (2.16) выражением при замене местами соответствующих множителей r^2 и R^2 .

Объединив слагаемые (3.3), (3.4) и преобразуя произведение $\bar{\eta}Y_{n,m,k}'^{a,b}(\varphi, \theta, \psi)$ в выражении (3.3) с учетом соотношения (2.14), получим $\tilde{\lambda}_{n,m,k}^{a,b}$ в виде (3.2). Для заданных $\tilde{\lambda}_{n,m,k}^{a,b}$ при $|q|/|q'| > 1$ и условии ортонормированности гиперсферической системы функций (2.7) справедливо разложение ядра Коши $M(q' - q)$ в системе гармонических многочленов в виде (3.1). Лемма доказана. $\square$

Таким образом, полученные в лемме 1 и лемме 2 соответствующие разложения ядра Коши в ортонормированной системе гармонических многочленов для случаев $|q|/|q'| < 1$ и $|q|/|q'| > 1$ позволяют определить кватернион-функцию $F(q)$ внутри шарового слоя.

Теорема 3. *Всякая кватернион-функция $F(q)$, регулярная внутри шарового слоя D , ограниченного 3-сферой S_0 радиусом $R = |\zeta - q^0|$ и 3-сферой S_1 радиусом $r = |\sigma - q^0|$ с общим центром в точке q^0 , может быть представлена в каждой точке $q \in D$ при $r < |q - q^0| < R$ рядом*

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q - q^0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c'_n (q - q^0)^{-n}, \quad (3.5)$$

где c_n — коэффициенты ряда (2.1), а c'_n определяются соотношением

$$c'_n = \frac{1}{2\pi(n-1)!} \oint_{S_1} [F(\sigma) D\sigma d^{n-1}M(q - q^0)] (q - q^0)^n. \quad (3.6)$$

В выражении (3.6) n -й дифференциал ядра Коши определяется аналогично выражению (2.2) при равенстве $dq = \sigma - q^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задана кватернион-функция $F(q)$, регулярная внутри шарового слоя D , который ограничен 3-сферами S_0 и S_1 с радиусами R и r соответственно ($0 < r < R$) и общим центром в точке q^0 . Зададим дополнительно две 3-сферы S'_0 и S'_1 с центром в точке q^0 и соответствующими радиусами R' и r' , удовлетворяющими неравенству $0 < r < r' < R' < R$. Поскольку кватернион-функция $F(q)$ регулярна в D , то по формуле (1.1) для двусвязной области, ограниченной S'_0 и S'_1 , имеем

$$F(q) = \frac{1}{2\pi^2} \oint_{S'_0} F(\zeta) D\zeta M(\zeta - q) - \frac{1}{2\pi^2} \oint_{S'_1} F(\sigma) D\sigma M(\sigma - q), \quad (3.7)$$

где q — точка, находящаяся между сферами S'_0 и S'_1 . Для первого интеграла (3.7) при $|\zeta - q^0| \rightarrow \rightarrow R$ и $|q - q^0| < R$ с учетом (2.5) справедливо тождество

$$\frac{1}{2\pi^2} \oint_{S'_0} F(\zeta) D\zeta M(\zeta - q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (q - q^0)^n. \quad (3.8)$$

Во втором интеграле (3.7) при $|\sigma - q^0| \rightarrow r$ и $|q - q^0| > r$, с использованием разложения $(1 - q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ [10] для $|q| < 1$, $\|\sigma - q\|^{-1} = \|(\sigma - q)^{-1}\|$, выражения $(\sigma - q)^{-1}$ и $\|\sigma - q\|$ аналогично (2.3) приводятся к виду

$$\begin{aligned} (\sigma - q)^{-1} &= - (q - q^0)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\sigma - q^0) (q - q^0)^{-1} \right]^n, \\ \|\sigma - q\|^{-1} &= \|q - q^0\|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\sigma - q^0) (q - q^0)^{-1} \right]^n \sum_{n=0}^{\infty} \left[(\bar{q} - \bar{q}^0)^{-1} (\bar{\sigma} - \bar{q}^0) \right]^n. \end{aligned} \quad (3.9)$$

С учетом (3.9) зададим разложение ядра Коши $M(\sigma - q)$ из (3.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\sigma - q)^{-1} / \|\sigma - q\| &= - \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)}(\sigma - q) = - \sum_{n=0}^{\infty} d^n M(q - q^0) / n! = \\ &= \frac{-(q - q^0)^{-1}}{\|q - q^0\|} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(dq (q - q^0)^{-1} \right)^n + \sum_{m=1}^n \left(\left[dq (q - q^0)^{-1} \right]^n \times \right. \right. \right. \\ &\times \left. \left. \sum_{k=0}^{[m/2]} \left[\left(\operatorname{Re}((q - q^0) \bar{dq}) \right)^{m-2k} \|q - q^0\|^{k-m} \frac{2^{m-2k} (m-k)! (-\|dq\|^k)}{k! (m-2k)!} \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

при $dq = \sigma - q^0$.

Теперь, представив ядро Коши (3.10) в гипersферической системе координат при $q^0 = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{(\sigma - q)^{-1}}{\|\sigma - q\|} &= - \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)}(\sigma - q) = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\eta}}{r^3} \left(\frac{R}{r} \right)^n \left[(\eta' \bar{\eta})^n + \sum_{m=1}^n \left((\eta' \bar{\eta})^{n-m} \sum_{k=0}^{[m/2]} \left[\frac{(-1)^k 2^{m-2k} (m-k)!}{k! (m-2k)! \operatorname{Re}(\eta' \bar{\eta})^{2k-m}} \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

С учетом леммы 2 для $n = 0$ получим

$$\begin{aligned} M^{(0)}(\sigma - q) &= \frac{\bar{\eta}}{r^3} = \frac{1}{r^3} (\cos \psi - [j_1 \cos \varphi + j_2 \sin \varphi] \sin \theta + j_3 \cos \theta) \sin \psi = \\ &= \tilde{\lambda}_{0,0,0}^a Y_{0,0,0}^{a'}(\varphi', \theta', \psi') + \tilde{\lambda}_{0,0,0}^b Y_{0,0,0}^{b'}(\varphi', \theta', \psi'). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Аналогично (3.12), продолжая определение (3.11), для $n > 0$ получим тождество между разложением ядра Коши $M(\sigma - q)$ (3.10) и его разложением при $r > R$ в гиперсферической системе функций (3.1). Далее, умножив элементы $d^n M(q - q^0)/n!$ в (3.10) слева на $(q - q^0)^{n+1}$, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi^2} \oint_{S'_1} F(\sigma) D\sigma M(\sigma - q) = - \sum_{n=1}^{\infty} c'_n (q - q^0)^{-n}. \quad (3.13)$$

Из равенств (3.8), (3.13) следует справедливость разложения (3.5). Теорема доказана. $\square$

В разложении (3.5) по аналогии [2] первое слагаемое ряда будем называть правильной частью, второе — главной частью.

§ 4. Разложение мероморфной кватернион-функции

Рассмотрим разложение (3.5) для случая, когда центр области D является единственной особой точкой q^0 регулярной кватернион-функции $F(q)$ в бесконечно малом шаре, ограниченном 3-сферой S_1 при $r \rightarrow 0$. Используя (3.10) и (3.6), определим вычет $\text{Res}_{q=q^0} F(q)$ регулярной кватернион-функции $F(q)$ относительно изолированной особой точки q^0 в виде

$$\text{Res}_{q=q^0} F(q) = \lim_{|q-q^0|=r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \oint_{S_1} F(q) Dq \right\}. \quad (4.1)$$

Из заданных соотношений (3.1), (3.5), (3.6), (3.10) и представления 3-формы $Dq = (q - q^0) \varepsilon(\psi, \theta) d\psi d\theta d\varphi$ в гиперсферической системе координат следует, что вычет (4.1) будет определяться соотношением

$$\text{Res}_{q=q^0} F(q) = c'_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{r}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi F(r\eta + q^0) \eta \varepsilon(\psi, \theta) d\psi d\theta d\varphi \right\}. \quad (4.2)$$

Для получения аналога теоремы Миттаг-Леффлера [18] с учетом выражений (3.5), (3.6) и (4.2) введем обозначения: a_v — полюсы мероморфной кватернион-функции $F(q)$, нумерация $(v = 1, 2, \dots)$ которых выполнена в порядке неубывающих модулей $(|a_v| \leq |a_{v+1}|)$; $g_v(q) = \sum_{n=1}^{p_v} c'_n (q - a_v)^{-n}$ — главная часть разложения (3.5) $F(q)$; $P_v(q) = \sum_{n=0}^{m_n} g_v^{(n)}(0) q^n / n!$ — некоторый полином, определяемый отрезком ряда (2.1) в точке 0 при разложении $g_v(q)$.

Теорема 4. Любую мероморфную кватернион-функцию $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ можно представить в виде равномерно сходящегося ряда

$$F(q) = F_0(q) + \sum_{v=1}^{\infty} (g_v(q) - P_v(q)), \quad (4.3)$$

в котором $F_0(q)$ — целая кватернион-функция.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы Миттаг-Леффлера [18] и следует из равномерной сходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty} (g_v(q) - P_v(q))$. При этом под равномерно сходящимся рядом из мероморфных кватернион-функций на некотором компакте K понимается ряд, у которого конечное число членов имеет полюсы на K , и после их удаления ряд равномерно сходится на K . Приближение $P_v(q)$ функции $g_v(q)$, регулярной в 4-мерном гипершаре $(|q| < |a_v|)$ с центром в 0, формируется на компакте $K_v = \{q : |q| < t|a_v|\}$ для $0 < t < 1$ отрезком ряда (2.1). Порядок m_n полинома $P_v(q)$ выбирается из условия [18]

$$|g_v(q) - P_v(q)| < 1/2^v.$$

Коэффициенты c'_n при определении $g_v(q)$ задаются соотношением

$$c'_n = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{r^n}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi F(r\eta + q^0) \eta \varepsilon(\psi, \theta) \eta^{n-1} \left[1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{sgn}(|q^0|) \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{r^{2m}}{\|r\eta + q^0\|^m} \sum_{k=0}^{[m/2]} \left[(-1)^k \frac{2^{m-2k} (m-k)!}{k!} \right] \right) \right] d\psi d\theta d\varphi \right\}. \quad (4.4)$$

Заключение

Полученные в статье результаты позволяют задать некоторый теоретический базис, используемый при разложении регулярных кватернион-функций $F(q)$ в обобщенные степенные ряды, к примеру, необходимый при решении задач типа [4]. Основные частные результаты заключаются в получении:

- 1) обобщения ряда Тейлора (2.1) для алгебры кватернионов с представлением разложения ядра Коши в гипершаре (2.5) и в системе гипersферических координат (2.9);
- 2) обобщения ряда Лорана (3.5) для алгебры кватернионов с представлением разложения ядра Коши во внешности гипершара (3.10) и в системе гипersферических координат (3.1);
- 3) вычета кватернион-функции (4.1) и коэффициентов главной части ряда Лорана в гипersферической системе координат (4.4);
- 4) разложение мероморфной кватернион-функции в степенной ряд (4.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sudbery A. Quaternionic analyses // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1979. Vol. 85. Issue 2. P. 199–225. DOI: [10.1017/S0305004100055638](https://doi.org/10.1017/S0305004100055638)
2. Бицадзе А.В. Основы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1969. 240 с.
3. Parfenov M. On properties of holomorphic functions in quaternionic analysis // American Journal of Mathematical Analysis. 2017. Vol. 5. No. 1. P. 17–24. DOI: [10.12691/ajma-5-1-4](https://doi.org/10.12691/ajma-5-1-4)
4. Радыгин В.М., Полянский И.С. Методы конформных отображений многогранников в $\mathbb{R}^3$ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 60–68. DOI: [10.20537/vm170106](https://doi.org/10.20537/vm170106)
5. Perotti A. Regular quaternionic functions and conformal mappings // CUBO A Mathematical Journal. 2009. Vol. 11. No. 1. P. 123–143.
6. Гамильтон У.Р. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. М.: Наука, 1994. 560 с.
7. Fueter R. Über die analytische darstellung der regulären funktionen einer quaternionenvariablen // Commentarii Mathematici Helvetici. 1935. Vol. 8. Issue 1. P. 371–378. DOI: [10.1007/BF01199562](https://doi.org/10.1007/BF01199562)
8. Gentili G., Mariconda C., Tarallo M. Quaternionic regular maps and $\bar{\partial}$ -type operators // A Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. 1993. Vol. 67. No. 3–4. P. 333–359.
9. Fokas A.S., Pinotsis D.A. Quaternions, evaluation of integrals and boundary value problems // Computational Methods and Function Theory. 2007. Vol. 7. No. 2. P. 443–476. DOI: [10.1007/BF03321657](https://doi.org/10.1007/BF03321657)
10. van Lancker P. Taylor and Laurent series on the sphere // Complex Variables, Theory and Application: An International Journal. 1999. Vol. 38. No. 4. P. 321–365. DOI: [10.1080/17476939908815173](https://doi.org/10.1080/17476939908815173)
11. Gentili G., Stoppato C. Power series and analyticity over the quaternions // Mathematische Annalen. 2012. Vol. 352. Issue 1. P. 113–131. DOI: [10.1007/S00208-010-0631-2](https://doi.org/10.1007/S00208-010-0631-2)
12. Gentili G., Sarfatti G. The Mittag-Leffler theorem for regular functions of a quaternionic variable // New York Journal of Mathematics. 2017. Vol. 23. P. 583–592.
13. Gentili G., Stoppato C., Struppa D.C. Regular functions of a quaternionic variable. Berlin–Heidelberg: Springer, 2013. DOI: [10.1007/978-3-642-33871-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33871-7)
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 572 с.
15. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991. 576 с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.

17. Штепина Т.В. Обобщение теоремы Функа–Гекке на случай гиперболического пространства // Известия РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 213–224. DOI: [10.4213/im508](https://doi.org/10.4213/im508)
18. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. 720 с.

Поступила в редакцию 12.10.2017

Полянский Иван Сергеевич, к. т. н., докторант, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, 302024, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35.

E-mail: van341@mail.ru

Радыгин Владимир Михайлович, д. т. н., профессор, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, 302024, Россия, г. Орел, ул. Приборостроительная, 35.

E-mail: stepbystep000@yandex.ru

Мисюрин Сергей Юрьевич, д. ф.-м. н., доцент, директор, Институт интеллектуальных кибернетических систем, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 115409, Россия, г. Москва, Каширское шоссе, 31.

E-mail: ssmmrr@mail.ru

I. S. Polyanskii, V. M. Radygin, S. Yu. Misyurin

Decomposition of a regular quaternion function

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 36–47 (in Russian).

Keywords: regular quaternion function, Taylor series, Laurent series, residue, quaternion meromorphic function.

MSC2010: 30B10

DOI: [10.20537/vm180104](https://doi.org/10.20537/vm180104)

This article deals with the tasks associated with the decomposition of a regular quaternion function into generalized Taylor and Laurent series. The generalized Taylor series for a regular quaternion function were obtained by the decomposition of the Cauchy kernel in a 4-dimensional hyperball in the algebra of quaternions and the hyperspherical coordinate system. The generalized Laurent series for a regular quaternion function were obtained by the decomposition of the Cauchy kernel in the exterior of a 4-dimensional hyperball in the algebra of quaternions and the hyperspherical coordinate system. On the basis of the obtained solutions by considering the decomposition of a regular quaternion function in an infinitely small ball that is restricted by the 3-sphere, we set the rule to determine the deduction of a regular quaternion function in the algebra of quaternions and the hyperspherical coordinate system regarding the isolated singular point. In addition, the decomposition of a meromorphic quaternion function into the power series was found.

REFERENCES

1. Sudbery A. Quaternionic analyses, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1979, vol. 85, issue 2, pp. 199–225. DOI: [10.1017/S0305004100055638](https://doi.org/10.1017/S0305004100055638)
2. Bitsadze A.V. *Osnovy teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (Fundamentals of the theory of functions of a complex variable), Moscow: Nauka, 1969, 240 p.
3. Parfenov M. On properties of holomorphic functions in quaternionic analysis, *American Journal of Mathematical Analysis*, 2017, vol. 5, no. 1, pp. 17–24. DOI: [10.12691/ajma-5-1-4](https://doi.org/10.12691/ajma-5-1-4)
4. Radygin V.M., Polyanskii I.S. Methods of conformal mappings of polyhedra in $\mathbb{R}^3$, *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 60–68 (in Russian). DOI: [10.20537/vm170106](https://doi.org/10.20537/vm170106)
5. Perotti A. Regular quaternionic functions and conformal mappings, *CUBO A Mathematical Journal*, 2009, vol. 11, no. 1, pp. 123–143.
6. Hamilton W.R. *Izbrannye trudy. Optika. Dinamika. Kvaterniony* (Selected works. Optics. Dynamics. Quaternions), Moscow: Nauka, 1994, 560 p.

7. Fueter R. Über die analytische darstellung der regulären funktionen einer quaternionenvariablen, *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1935, vol. 8, issue 1, pp. 371–378. DOI: [10.1007/BF01199562](https://doi.org/10.1007/BF01199562)
8. Gentili G., Mariconda C., Tarallo M. Quaternionic regular maps and $\bar{\partial}$ -type operators, *A Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1993, vol. 67, no. 3–4, pp. 333–359.
9. Fokas A.S., Pinotsis D.A. Quaternions, evaluation of integrals and boundary value problems, *Computational Methods and Function Theory*, 2007, vol. 7, no. 2, pp. 443–476. DOI: [10.1007/BF03321657](https://doi.org/10.1007/BF03321657)
10. van Lancker P. Taylor and Laurent series on the sphere, *Complex Variables, Theory and Application: an International Journal*, 1999, vol. 38, no. 4, pp. 321–365. DOI: [10.1080/17476939908815173](https://doi.org/10.1080/17476939908815173)
11. Gentili G., Stoppato C. Power series and analyticity over the quaternions, *Mathematische Annalen*, 2012, vol. 352, issue 1, pp. 113–131. DOI: [10.1007/S00208-010-0631-2](https://doi.org/10.1007/S00208-010-0631-2)
12. Gentili G., Sarfatti G. The Mittag-Leffler theorem for regular functions of a quaternionic variable, *New York Journal of Mathematics*, 2017, vol. 23, pp. 583–592.
13. Gentili G., Stoppato C., Struppa D.C. *Regular functions of a quaternionic variable*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2013. DOI: [10.1007/978-3-642-33871-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-33871-7)
14. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Fizmatlit, 2004, 572 p.
15. Vilenkin N.Ya. *Spetsial'nye funktsii i teoriya predstavleniya grupp* (Special functions and the theory of group representations), Moscow: Nauka, 1991, 576 p.
16. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* (Table of integrals, sums, series and products), Moscow: Fizmatlit, 1963, 1100 p.
17. Shtepina T.V. A generalization of the Funk–Hecke theorem to the case of hyperbolic spaces, *Izvestiya: Mathematics*, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 1051–1061. DOI: [10.1070/IM2004v068n05ABEH000508](https://doi.org/10.1070/IM2004v068n05ABEH000508)
18. Shabat B.V. *Vvedenie v kompleksnyi analiz* (Introduction to complex analysis), Moscow: Nauka, 1976, 720 p.

Received 12.10.2017

Polyanskii Ivan Sergeevich, Candidate of Engineering, Doctoral Student, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302034, Russia.
E-mail: van341@mail.ru

Radygin Vladimir Mikhailovich, Doctor of Engineering, Professor, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation, ul. Priborostroitel'naya, 35, Orel, 302034, Russia.
E-mail: stepbystep000@yandex.ru

Misyurin Sergei Yurievich, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Director, National Engineering Physics Institute “MEPhI”, Kashirskoe sh., 31, Moscow, 115409, Russia.
E-mail: ssmmrr@mail.ru