L. I. Danilov, On almost periodic sections of multivalued maps, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, Issue 2, 34–41

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.208.226.222

April 26, 2023, 17:05:01

УДК 517.518.6

© Л. И. Данилов

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЯХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Приведен ряд утверждений о почти периодических по Степанову сечениях многозначных отображений.

Ключевые слова: почти периодические функции, сечения, многозначные отображения.

Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное метрическое пространство, $M(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ — множество сильно измеримых функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$, $M_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, где $p \geq 1$, — множество функций $f \in M(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, для которых

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+1} \rho^p(f(t), x_0) dt < +\infty, \quad x_0 \in \mathcal{U}.$$

Определим метрики

$$D_p^{(\rho)}(f, g) = \left(\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{\xi}^{\xi+1} \rho^p(f(t), g(t)) dt \right)^{1/p}, \quad f, g \in M_p(\mathbb{R}, \mathcal{U}),$$

$$D_{\infty}^{(\rho)}(f, g) = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f(t), g(t)), \quad f, g \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{U}).$$

Для функции $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ число $\tau \in \mathbb{R}$ называется $(\varepsilon, D_{\infty}^{(\rho)})$ -почти периодом, где $\varepsilon > 0$, если $D_{\infty}^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \varepsilon$. Пусть $\mathcal{P}_{\infty}^{(\rho)}(\varepsilon; f)$ — множество $(\varepsilon, D_{\infty}^{(\rho)})$ -почти периодов функции $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Аналогичным образом определяется множество $(\varepsilon, D_p^{(\rho)})$ -почти периодов функции

$$f \in M_p(\mathbb{R}, \mathcal{U}) : \quad \mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon; f) = \{\tau \in \mathbb{R} : D_p^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \varepsilon\}.$$

Множество $T \subseteq \mathbb{R}$ относительно плотно, если существует число $a > 0$ такое, что $[\xi, \xi + a] \cap T \neq \emptyset$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Ограниченная непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ принадлежит пространству $SAP(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ почти периодических (п.п.) по Бору функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $(\varepsilon, D_{\infty}^{(\rho)})$ -почти периодов функции f относительно плотно. Функция

$f \in M_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $p \geq 1$, принадлежит пространству $S_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *н.п. по Степанову* функций степени p , если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество $\mathcal{P}_p^{(\rho)}(\varepsilon; f)$.

На пространстве $\mathcal{U}$ определим также метрику $\rho'(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$, $x, y \in \mathcal{U}$. Пусть $S(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \doteq S_1(\mathbb{R}, (\mathcal{U}, \rho'))$ — пространство *н.п. по Степанову* функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ (степени 1) со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{U}, \rho')$. Справедливы вложения

$$CAP(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \subseteq S_p(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \subseteq S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \subseteq S(\mathbb{R}, \mathcal{U}).$$

Для измеримого (по Лебегу) множества $T \subseteq \mathbb{R}$ обозначим

$$\varkappa(T) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \text{meas } [\xi, \xi + 1] \cap T,$$

где meas — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Пусть $M'_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ — множество таких функций $f \in M_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех измеримых множеств $T \subseteq \mathbb{R}$, для которых $\varkappa(T) < \delta$, выполняется неравенство

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \int_{[\xi, \xi+1] \cap T} \rho^p(f(t), x_0) dt < \varepsilon.$$

Имеем $S_p(\mathbb{R}, \mathcal{U}) = S(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \cap M'_p(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $p \geq 1$.

Последовательность $\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ называется *f-возвращающей* для функции $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, если $D_1^{(\rho')}(f(\cdot), f(\cdot + \tau_j)) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Для функций $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ через $\text{Mod } f$ обозначается модуль (группа по сложению) таких чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, что $e^{i\lambda\tau_j} \rightarrow 1$ при $j \rightarrow +\infty$ (где $i^2 = -1$) для любой *f-возвращающей* последовательности $\{\tau_j\}$. Если $\mathcal{U} = (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ — банахово пространство и $f \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, то $\text{Mod } f$ совпадает с модулем частот функции f .

Пусть $(\text{cl}_b \mathcal{U}, \text{dist}_\rho)$ — метрическое пространство непустых замкнутых ограниченных подмножеств пространства $(\mathcal{U}, \rho)$ с метрикой Хаусдорфа dist_ρ , $(\text{cl} \mathcal{U}, \text{dist}_{\rho'})$ — метрическое пространство непустых замкнутых подмножеств пространства $(\mathcal{U}, \rho)$ с метрикой Хаусдорфа $\text{dist}_{\rho'}$, соответствующей метрике ρ' . Обозначим через $\text{cl}_c \mathcal{U} \subseteq (\text{cl}_b \mathcal{U}, \text{dist}_\rho)$ множество непустых компактных подмножеств пространства $(\mathcal{U}, \rho)$. Пространства $CAP(\mathbb{R}, \text{cl}_b \mathcal{U})$, $S_p(\mathbb{R}, \text{cl}_b \mathcal{U})$, $p \geq 1$, и $S(\mathbb{R}, \text{cl}_b \mathcal{U})$ *н.п. по Бору* и *н.п. по Степанову многозначных отображений* $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{cl}_b \mathcal{U}$ определяются как соответствующие пространства п.п. функций со значениями в метрическом пространстве $(\text{cl}_b \mathcal{U}, \text{dist}_\rho)$. Положим

$$S(\mathbb{R}, \text{cl} \mathcal{U}) \doteq S_1(\mathbb{R}, (\text{cl} \mathcal{U}, \text{dist}_{\rho'})); \quad S(\mathbb{R}, \text{cl}_b \mathcal{U}) \subseteq S(\mathbb{R}, \text{cl} \mathcal{U}).$$

Пусть $S(\mathbb{R})$ — совокупность измеримых множеств $T \subseteq \mathbb{R}$ таких, что $\chi_T \in S_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (где χ_T — характеристическая функция множества T). Для множеств $T \in S(\mathbb{R})$ положим $\text{Mod } T \doteq \text{Mod } \chi_T$.

Через $\overline{X}$ обозначается замыкание множества $X \subseteq \mathcal{U}$. Множество $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{U}$ образует ε -сеть для множества $X \subseteq \mathcal{U}$, где $\varepsilon > 0$, если для каждого $x \in X$ найдется точка x_α такая, что $\rho(x, x_\alpha) < \varepsilon$.

Если $(\mathcal{U}, \rho)$ — компактное метрическое пространство, то

$$S(\mathbb{R}, \mathcal{U}) = S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U}), \quad \text{cl } \mathcal{U} = \text{cl}_c \mathcal{U}, \quad S(\mathbb{R}, \text{cl } \mathcal{U}) = S_1(\mathbb{R}, \text{cl } \mathcal{U}).$$

Теорема 1 (см. [1]). Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — компактное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{cl } \mathcal{U}$ принадлежит пространству $S_1(\mathbb{R}, \text{cl } \mathcal{U})$ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и функции $f_{\varepsilon, j} \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $j = 1, \dots, N_\varepsilon$, такие, что $f_{\varepsilon, j}(t) \in F(t)$ п.в. и при п.в. $t \in \mathbb{R}$ точки $f_{\varepsilon, j}(t)$, $j = 1, \dots, N_\varepsilon$, образуют ε -сеть для множества $F(t)$. При этом для многозначного отображения $F \in S_1(\mathbb{R}, \text{cl } \mathcal{U})$ функции $f_{\varepsilon, j}$ можно выбирать так, что $\text{Mod } f_{\varepsilon, j} \subseteq \text{Mod } F$.

Теорема 2. Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{cl } \mathcal{U}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \text{cl}_c \mathcal{U})$ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множество $T_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$, число $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ и функции $f_{\varepsilon, j} \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $j = 1, \dots, N_\varepsilon$, такие, что $f_{\varepsilon, j}(t) \in F(t)$ п.в., $\kappa(\mathbb{R} \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ и при п.в. $t \in T_\varepsilon$ точки $f_{\varepsilon, j}(t)$, $j = 1, \dots, N_\varepsilon$, образуют ε -сеть для множества $F(t)$. При этом для многозначного отображения $F \in S(\mathbb{R}, \text{cl}_c \mathcal{U})$ множества T_ε и функции $f_{\varepsilon, j}$ можно выбирать так, что $T_\varepsilon \in S(\mathbb{R})$, $\text{Mod } T_\varepsilon \subseteq \text{Mod } F$ и $\text{Mod } f_{\varepsilon, j} \subseteq \text{Mod } F$.

Через $f(\cdot|_T)$ обозначается ограничение функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ на подмножество $T \subseteq \mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 1. Семейство функций $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq M(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ называется L^∞ -псевдокомпактным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $T_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}$ такое, что $\kappa(\mathbb{R} \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\{f_\alpha(\cdot|_{T_\varepsilon})\}_{\alpha \in A}$ — компактное множество в (полном) метрическом пространстве $L^\infty(T_\varepsilon, \mathcal{U})$.

В следующих двух теоремах, рассматривая компактные в $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ (соответственно L^∞ -псевдокомпактные) семейства функций $\{f_\alpha(\cdot)\}_{\alpha \in A}$, будем считать, что все функции $f_\alpha(\cdot)$, $\alpha \in A$ определены на одном измеримом множестве $T \subseteq \mathbb{R}$, для которого $\text{meas } \mathbb{R} \setminus T = 0$, и $\rho(f_\alpha(t), f_\beta(t)) \leq$

$D_{\infty}^{(\rho)}(f_{\alpha}, f_{\beta})$ для всех $\alpha, \beta \in A$ и $t \in T$ (соответственно

$$\rho(f_{\alpha}(t), f_{\beta}(t)) \leq \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in T_{\varepsilon_j}} \rho(f_{\alpha}(\xi), f_{\beta}(\xi))$$

для всех $\alpha, \beta \in A$ и $t \in T \cap T_{\varepsilon_j}$, $j \in \mathbb{N}$, где T_{ε_j} — множества из определения 1 и $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$). Мы всегда можем этого добиться, изменяя каждую функцию $f_{\alpha}(\cdot)$ на некотором множестве нулевой меры.

Теорема 3. Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — компактное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F : \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{cl}\mathcal{U}$ принадлежит пространству $S_1(\mathbb{R}, \operatorname{cl}\mathcal{U})$ в том и только том случае, когда

$$F(t) = \bigcup_{\alpha \in A} f_{\alpha}(t)$$

п.в. для некоторого компактного в $(L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{U}), D_{\infty}^{(\rho)})$ семейства функций $f_{\alpha}(\cdot) \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $\alpha \in A$. При этом для многозначного отображения $F \in S_1(\mathbb{R}, \operatorname{cl}\mathcal{U})$ функции f_{α} можно выбрать так, что $\operatorname{Mod} f_{\alpha} \subseteq \operatorname{Mod} F$.

Теорема 4. Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F : \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{cl}\mathcal{U}$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \operatorname{cl}_c\mathcal{U})$ в том и только том случае, когда

$$F(t) = \bigcup_{\alpha \in A} f_{\alpha}(t)$$

п.в. для некоторого L^{∞} -псевдокомпактного семейства функций $f_{\alpha}(\cdot) \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $\alpha \in A$. При этом для многозначного отображения $F \in S(\mathbb{R}, \operatorname{cl}_c\mathcal{U})$ функции f_{α} и множества T_{ε} из определения 1 можно выбирать так, что

$$\operatorname{Mod} f_{\alpha} \subseteq \operatorname{Mod} F, \quad T_{\varepsilon} \in S(\mathbb{R}), \quad \operatorname{Mod} T_{\varepsilon} \subseteq \operatorname{Mod} F.$$

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 2, 3 и 4 доказываются с помощью результатов и методов работы [1]. Теоремы 1 и 3 справедливы также для п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу многозначных отображений и функций (см. [2, 3]).

Теорема 5 (см. [4]). Пусть $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют множество $T_{\varepsilon} \in S(\mathbb{R})$ и функция $\mathcal{F}_{\varepsilon} \in CAP(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ такие, что

$$\mu(\mathbb{R} \setminus T_{\varepsilon}) < \varepsilon, \quad \operatorname{Mod} T_{\varepsilon} \subseteq \operatorname{Mod} f, \quad \operatorname{Mod} \mathcal{F}_{\varepsilon} \subseteq \operatorname{Mod} f$$

и $f(t) = \mathcal{F}_{\varepsilon}(t)$ при всех $t \in T_{\varepsilon}$. Если функция f не является п.в. постоянной, то можно считать, что T_{ε} — замкнутые множества.

Теорема 5 является почти периодическим вариантом теоремы Лузина. Она также переносится на относительные компакты Бора [5]. При доказательстве следующей теоремы используются теоремы 4 и 5.

Теорема 6. Пусть $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, $F \in S(\mathbb{R}, \text{cl}_c \mathcal{H})$. Тогда для всех $j \in \mathbb{N}$ найдутся компактные в $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ семейства функций $\{f_{\alpha,j}\}_{\alpha \in A} \subseteq CAP(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ (с одним индексным множеством A) и множества $T_j \in S(\mathbb{R})$ такие, что

- 1) $\text{Mod } f_{\alpha,j} \subseteq \text{Mod } F$;
- 2) $T_j \subseteq T_{j+1}$, $\kappa(\mathbb{R} \setminus T_j) < 2^{-j}$ и $\text{Mod } T_j \subseteq \text{Mod } F$;
- 3) $f_{\alpha,j+1}(t) = f_{\alpha,j}(t)$ при всех $t \in T_j$ (и всех $\alpha \in A$);
- 4) $F(t) = \bigcup_{\alpha \in A} f_{\alpha,j}(t)$ при всех $t \in T_j$.

Если многозначное отображение F не является п.в. постоянным, то можно считать, что T_j — замкнутые множества.

З а м е ч а н и е 2. В условиях теоремы 6 имеем

$$F_j(\cdot) \doteq \bigcup_{\alpha \in A} f_{\alpha,j}(\cdot) \in CAP(\mathbb{R}, \text{cl}_c \mathcal{H}).$$

При этом для любых $\varepsilon > 0$ и $j \in \mathbb{N}$ существует такое число $\delta > 0$, что

$$\mathcal{P}_1^{(\text{dist}_{\rho'})}(\delta; F) \subseteq \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{P}_\infty^{(\rho)}(\varepsilon; f_{\alpha,j}) \subseteq \mathcal{P}_\infty^{(\text{dist}_\rho)}(\varepsilon; F_j).$$

З а м е ч а н и е 3. В отличие от многозначных отображений

$$F_j \in CAP(\mathbb{R}, \text{cl}_c \mathcal{H})$$

многозначное отображение F , даже если оно принадлежит пространству $CAP(\mathbb{R}, \text{cl}_c \mathcal{H})$, может не иметь п.п. по Бору сечений (см., например, [6] или [7]).

Для полного сепарабельного метрического пространства $(\mathcal{U}, \rho)$ обозначим через $(\mathcal{M}(\mathcal{U}), d)$ (полное сепарабельное) метрическое пространство вероятностных борелевских мер $\mu[\cdot]$, определенных на σ -алгебре борелевских подмножеств метрического пространства $(\mathcal{U}, \rho)$ с метрикой Леви — Прохорова d . Пусть $\text{supp } \mu$ — носитель меры $\mu[\cdot] \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$, $\delta_x[\cdot]$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $x \in \mathcal{U}$, $S_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathcal{U}))$ — пространство п.п. по Степанову (степени 1) мерозначных функций

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$$

со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{M}(\mathcal{U}), d)$.

В предыдущих теоремах была дана характеристика многозначных п.п. по Степанову отображений $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{cl}_c \mathcal{U}$ с помощью свойств их п.п. сечений. В следующей теореме приводится характеристика многозначных отображений $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{cl} \mathcal{U}$, которые получаются с помощью представления Кастена из счетного семейства п.п. по Степанову функций.

Теорема 7 (см. [8]). Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{cl} \mathcal{U}$ представимо в виде

$$F(t) = \overline{\bigcup_j f_j(t)}$$

п.в., где $f_j \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $j \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда, когда $F(t) = \text{supp } \mu[.; t]$ п.в. для некоторой мерозначной функции $\mu[.;.] \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathcal{U}))$. При этом для мерозначной функции $\mu[.;.]$ можно выбирать функции f_j так, что $\text{Mod } f_j \subseteq \text{Mod } \mu[.;.]$.

Если $\mu \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathcal{U}))$, то не всегда $\text{supp } \mu[.;.] \in S(\mathbb{R}, \text{cl} \mathcal{U})$ [9].

Теорема 7 справедлива также для п.п. по Вейлю (см. [10]) и п.п. по Безиковичу мерозначных функций $\mu[.;.]$ и сечений f_j . Следующая теорема усиливает теорему 7.

Теорема 8 (см. [8]). Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mu[.;.] \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathcal{U}))$. Тогда существуют множества $T_j \in S(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, и функции $f_k \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что

$$T_j \subseteq T_{j+1}, \quad \text{Mod } T_j \subseteq \text{Mod } \mu[.;.], \quad \chi(\mathbb{R} \setminus T_j) \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow +\infty,$$

$$\text{Mod } f_k \subseteq \text{Mod } \mu[.;.], \quad f_k(t) \in \text{supp } \mu[.; t] \text{ п.в.}$$

и для всех $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{ess sup}_{t \in T_j} d(\mu[.; t], \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{f_k(t)}[.]) = 0.$$

Если мерозначная функция $\mu[.;.]$ не является п.в. постоянной, то множества T_j можно выбирать замкнутыми.

Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Для множества $X \in \text{cl} \mathcal{U}$ обозначим через $\mathcal{M}_X$ замкнутое выпуклое множество мер $\mu[.] \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$, для которых $\text{supp } \mu \subseteq X$. Если $X, Y \in \text{cl} \mathcal{U}$, то $\text{dist}_d(\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_Y) = \text{dist}_{\rho'}(X, Y)$.

Теорема 7 позволяет «овыпуклить» задачу о существовании п.п. по Степанову сечений многозначных отображений $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{cl} \mathcal{U}$. Следующая теорема (которая справедлива также для п.п. по Вейлю и п.п. по Безиковичу функций) является непосредственным следствием теоремы 7.

Теорема 9. Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Тогда многозначное отображение $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{cl}\mathcal{U}$ имеет п.п. по Степанову сечение $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ тогда и только тогда, когда существует п.п. по Степанову сечение $\mu[.;.] \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathcal{U}))$ и многозначного отображения $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mathcal{M}_{F(t)} \subseteq (\mathcal{M}(\mathcal{U}), d)$.

Следствие 1. Пусть $(\mathcal{U}, \rho)$ — полное сепарабельное метрическое пространство, $F \in S(\mathbb{R}, \text{cl}\mathcal{U})$. Тогда существует функция $f \in S(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ такая, что $f(t) \in F(t)$ п.в. и $\text{Mod } f \subseteq \text{Mod } F$.

Доказательство. Множество $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ можно вложить (с сохранением выпуклых комбинаций) в некоторое банахово пространство $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$, норма которого определяет на замкнутом выпуклом множестве $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ метрику, эквивалентную метрике Леви–Прохорова d (см., например, работу [11], в которой рассматривались п.п. по Степанову мерозначные функции со значениями в пространстве знакопеременных мер). Поэтому в силу теоремы Майкла (и выпуклости множеств $\mathcal{M}_X$) существует непрерывная функция

$$(\text{cl}\mathcal{U}, \text{dist}_{\rho'}) \ni X \rightarrow \mathfrak{X}(X) \in \mathcal{M}_X \subseteq (\mathcal{M}(\mathcal{U}), d).$$

Так как пространство $(\text{cl}\mathcal{U}, \text{dist}_{\rho'})$ полное и $F \in S(\mathbb{R}, \text{cl}\mathcal{U})$, то для композиции $\mathfrak{X}(F(\cdot))$ имеем

$$\mathfrak{X}(F(\cdot)) \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathcal{U})), \quad \text{Mod } \mathfrak{X}(F(\cdot)) \subseteq \text{Mod } F(\cdot)$$

(см. [7]) и $\text{supp } \mathfrak{X}(F(t)) \subseteq F(t)$ п.в. Теперь применение теоремы 9 (или теоремы 7) завершает доказательство следствия 1. $\square$

Утверждение следствия 1 было первоначально доказано в [12] на основе результатов Фришковского [13]. Другое доказательство, использующее равномерную аппроксимацию п.п. по Степанову функций элементарными (принимающими не более чем счетное множество значений) п.п. по Степанову функциями, приведено в [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов Л. И. О почти периодических многозначных отображениях // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 1. С. 82–90.
2. Данилов Л. И. О почти периодических по Вейлю сечениях многозначных отображений / УдГУ. Ижевск, 2004. 104 с. Деп. в ВИНТИ 09.06.2004, № 981-B2004.
3. Данилов Л. И. О почти периодических по Безиковичу сечениях многозначных отображений // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. Ижевск, 2008. № 1. С. 97–120.

4. Данилов Л. И. О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Изв. вузов. Математика. 1998. № 1. С. 10–18.
5. Данилов Л. И. Равномерная аппроксимация почти периодических по Степанову функций // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2004. Вып. 1 (29). С. 33–48.
6. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. О. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев: Наук. думка, 1977. С. 54–61.
7. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1993. Вып. 1. С. 16–78.
8. Данилов Л. И. Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 10. С. 3–24.
9. Данилов Л. И., Иванов А. Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Математика. 1994. № 6. С. 50–59.
10. Данилов Л. И. Почти периодические по Вейлю сечения носителей мерозначных функций // Сиб. электр. матем. известия. 2006. Т. 3. С. 384–392.
11. Данилов Л. И. О почти периодических мерозначных функциях // Матем. сб. 2000. Т. 191, № 12. С. 27–50.
12. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 172–175.
13. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76, № 2. P. 163–174.

Поступила в редакцию 15.02.08

L. I. Danilov

On almost periodic sections of multivalued maps

A number of assertions is given of Stepanov almost periodic sections of multivalued maps.

Данилов Леонид Иванович
Физико-технический институт
УрО РАН
426000, Россия, г. Ижевск,
ул. Кирова, 132
E-mail: danilov@otf.pti.udm.ru