Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. Ya. Derr, On the extension of a Rieman–Stieltjes integral, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2019, Volume 29, Issue 2, 135–152

DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190201>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 107.22.136.117

April 26, 2023, 12:14:09

УДК 517.518.126

© В. Я. Депп

О РАСШИРЕНИИ ИНТЕГРАЛА РИМАНА–СТИЛТЬЕСА

Исследуются свойства правильных функций, а также ограниченных функций, имеющих не более чем счетное множество точек разрыва (названных σ -непрерывными). Доказана теорема об интегрируемости по Риману–Стилтьесу σ -непрерывных функций по непрерывным функциям ограниченной вариации, а также предельная теорема Хелли для таких интегрируемых и интегрирующих функций. Процесс интегрирования по Риману–Стилтьесу расширяется на случай интегрирования σ -непрерывных функций по произвольным функциям ограниченной вариации: вводится $(*)$ -интеграл как сумма классического интеграла Римана–Стилтьеса по непрерывной части функции ограниченной вариации и суммы произведений значений интегрируемой функции на скачки интегрирующей. Таким образом, $(*)$ -интеграл позволяет интегрировать разрывные функции по разрывным. Все свойства $(*)$ -интеграла выводятся непосредственно из этого определения. Так, для $(*)$ -интеграла доказывается формула интегрирования по частям, теорема о перемене порядка интегрирования, а также все необходимые для дальнейшего применения предельные теоремы, в том числе предельная теорема типа теоремы Хелли.

Ключевые слова: функции ограниченной вариации, правильные функции, σ -непрерывные функции, интеграл Римана–Стилтьеса, $(*)$ -интеграл.

DOI: [10.20537/vm190201](https://doi.org/10.20537/vm190201)

Определение решения дифференциального уравнения, содержащего в качестве коэффициентов обобщенные функции, приводит к необходимости интегрировать в смысле Стилтьеса разрывные функции по разрывным (см., например, [1–3]). Интеграл Римана–Стилтьеса (RS -интеграл) заведомо не существует в случае, если интегрируемая и интегрирующая функции имеют общую точку разрыва (а в роли таких функций выступают первообразные коэффициентов дифференциального уравнения, точки разрыва которых могут совпадать). С другой стороны, расширения RS -интеграла, предложенные в работах [1, 2, 4–8], а также и другие модификации интеграла Стилтьеса, позволяющие интегрировать разрывные функции по разрывным, не позволяют получить предельные теоремы с нужными для применения в указанной выше области условиями.

Целью расширения, предлагаемого в настоящей работе, является сохранение такого свойства RS -интеграла, как предельная теорема Хелли. Автор отказывается от определения интеграла как предела некоторой интегральной суммы. Интеграл $(*) \int_a^b f(t) dg(t)$ определяется в виде суммы RS -интеграла и конечной суммы или суммы ряда (смотря по тому конечно или бесконечно множество точек разрыва интегрирующей функции). Все свойства интеграла $(*)$ (аддитивность как функции отрезка, формула интегрирования по частям, перемена порядка интегрирования, предельные теоремы) выводятся непосредственно из определения. Формула интегрирования по частям используется затем для дальнейшего расширения $(*)$ -интеграла.

В статье также приводятся новые результаты для RS -интеграла (указывается неизвестная ранее пара классов существования, доказывается предельная теорема Хелли для этой пары).

§ 1. Классы функций

Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ будем считать фиксированным. Функция $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *правильной* [7–13], если существуют конечные односторонние пределы $x(a+)$, $x(t+)$, $x(t-)$, $x(b-)$, $t \in [a, b]$. Непрерывные, кусочно непрерывные функции, функции ограниченной вариации являются правильными. Однако этим списком множество правильных функций не исчерпывается (см., например, [12, с. 28]). Правильные функции ограничены; множество точек разрыва правильной функции $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (обозначаем его $T(x)$) не более чем счетно [12, с. 58, 59]. Через $\mathbf{R}[a, b] = \mathbf{R}$ обозначим векторное пространство правильных функций с нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|. \quad (1.1)$$

Относительно этой нормы $\mathbf{R}$ — банахово пространство [13, с. 70].

Обозначаем также $\mathbf{C}[a, b] = \mathbf{C}$, $\mathbf{BV}[a, b] = \mathbf{BV}$, $\mathbf{CBV} = \mathbf{C} \cap \mathbf{BV}$ соответственно банаховы пространства непрерывных функций, функций ограниченной вариации и непрерывных функций ограниченной вариации, с нормами соответственно

$$\|x\|_{\mathbf{C}} = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|, \quad \|x\|_{\mathbf{BV}} = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)| + \bigvee_a^b(x), \quad \|x\|_{\mathbf{CBV}} = \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \bigvee_a^b(x). \quad (1.2)$$

Приведенная выше норма $\|x\|_{\mathbf{BV}}$ эквивалентна стандартной норме пространства функций ограниченной вариации [13, с. 69, 274].

Для правильных функций x рассмотрим скачок $\sigma_t(x) \doteq x(t+) - x(t-)$, правый скачок $\sigma_t^+(x) \doteq x(t+) - x(t)$, левый скачок $\sigma_t^-(x) \doteq x(t) - x(t-)$; очевидно, $\sigma_t(x) = \sigma_t^+(x) + \sigma_t^-(x)$. Если $x \in \mathbf{BV}$, то, как известно (см., например, [12, с. 22]), x имеет представление

$$x(t) = x_c(t) + x_\partial(t), \quad (1.3)$$

где x_∂ — функция скачков, $x_\partial(a) = 0$, при $t > a$ $x_\partial(t) = \sigma_a^+(x) + \sum_{t_k < t} \sigma_{t_k}(x) + \sigma_t^-(x)$ (суммирование распространяется на все точки разрыва $t_k \in T(x)$, удовлетворяющие неравенству $t_k < t$), а $x_c \in \mathbf{CBV}$, $x_c(t) = x(t) - x_\partial(t)$ — непрерывная часть x ($x_c(a) = x(a)$). Заметим, что (см., например, [12, с. 26])

$$\bigvee_a^b(x_\partial) = |\sigma_a^+(x)| + \sum_{t_k \in T(x) \cap (a, b)} |\sigma_{t_k}(x)| + |\sigma_b^-(x)|, \quad \bigvee_a^b(x) = \bigvee_a^b(x_c) + \bigvee_a^b(x_\partial).$$

Рассмотрим пространство $\mathbf{H}[a, b] = \mathbf{H}$ простых (ступенчатых) функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, для которых абсолютно сходится ряд $\sum_{t \in T(x)} \sigma_t(x)$ и $x(a) = 0$, с нормой $\|x\|_{\mathbf{H}} \doteq \sum_{t \in T(x)} |\sigma_t(x)|$;

$\mathbf{H}$, очевидно, изометрично изоморфно пространству последовательностей ℓ ; пусть далее, $\mathbf{HC}[a, b] = \mathbf{HC} = \mathbf{H} + \mathbf{C}$; элементы $\mathbf{HC}$, таким образом, однозначно представимы в виде (1.3), где $x_\partial \in \mathbf{H}$, а непрерывная функция x_c теперь может иметь бесконечную полную вариацию; положим также

$$\|x\|_{\mathbf{HC}} \doteq \sup_{t \in [a, b]} |x(t)| + \sum_{t \in T(x)} |\sigma_t(x)|;$$

$\mathbf{HC}$ — банахово пространство относительно этой нормы.

Наконец, пусть $M[a, b] = M$ ($N[a, b] = N$, $\mathcal{R}[a, b] = \mathcal{R}$) — векторное пространство ограниченных функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ограниченных функций, для которых множество $T(x)$ не более чем счетно, соответственно, интегрируемых по Риману на $[a, b]$) с нормой (1.1). Согласно теореме Лебега об интегрируемости по Риману для $x \in \mathcal{R}$ множество $T(x)$ имеет лебегову меру нуль. Для сокращения речи будем называть функции $x \in N$ σ -непрерывными.

Для удобства ссылок приведем несколько простых утверждений.

Предложение 1 (см. [12, с. 59]). Пусть $x \in \mathbf{R}[a, b]$, $c \in (a, b]$ ($c \in [a, b)$). Тогда

$$\lim_{t \rightarrow c+0} x(t\pm) = x(c+) \quad \left(\lim_{t \rightarrow c-0} x(t\pm) = x(c-) \right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, например, что $\lim_{t \rightarrow c-} x(t+) = x(c-)$. Функция $\tilde{x}(t) = x(t+)$ непрерывна справа и отличается от $x(\cdot)$ лишь в точках разрыва. Если c — точка непрерывности $x(\cdot)$ (а значит, и $\tilde{x}(\cdot)$), то $\tilde{x}(c-) = \tilde{x}(c) = x(c) = x(c-)$, то есть утверждение верно. Пусть c — точка разрыва $x(\cdot)$ и $\tilde{x}(\cdot)$. Найдется последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек непрерывности $x(\cdot)$ такая, что $t_k \rightarrow c-0$ и $\left(\forall \varepsilon > 0 \exists N (\forall k > N) \implies (|\tilde{x}(c-) - \tilde{x}(t_k)| < \varepsilon) \right)$. Но $\tilde{x}(t_k) = x(t_k)$, поэтому $|\tilde{x}(c-) - x(t_k)| < \varepsilon$, и значит, $\tilde{x}(c-) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k) = x(c-)$.

Остальные утверждения доказываются аналогично. $\square$

Пусть $h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция двух переменных; назовем функции $h(\cdot, s)$ ($s \in [c, d]$) и $h(t, \cdot)$ ($t \in [a, b]$) сечениями функции $h(\cdot, \cdot)$.

Предложение 2. Пусть сечения $h(\cdot, s)$ ($s \in [c, d]$) и $h(t, \cdot)$ ($t \in [a, b]$) — правильные функции. Тогда найдется такая не зависящая от t и s константа M , что $|h(t, s)| \leq M$ для всех $(t, s) \in [a, b] \times [c, d]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: для любого натурального n найдутся такие t_n и s_n , что $|h(t_n, s_n)| \geq n$; не ограничивая общности, можно считать, что

- а) $t_n \rightarrow t_*$, $s_n \rightarrow s_*$ ($n \rightarrow \infty$, $(t_*, s_*) \in [a, b] \times [c, d]$);
- б) последовательность $\{|h(t_n, s_n)|\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, и значит,

$$|h(t_n, s_n)| \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty);$$

- в) $t_n \rightarrow t_*-$ или $t_n \rightarrow t_*+$, $s_n \rightarrow s_*-$ или $s_n \rightarrow s_*+$ ($n \rightarrow \infty$);

ибо в противном случае можно в каждом пункте перейти к соответствующей подпоследовательности. Пусть, например, $t_n \rightarrow t_*-$, $s_n \rightarrow s_*-$; так как в любой окрестности точки (t_*, s_*) величина $|h(t_n, s_n)|$ принимает сколь угодно большие значения, то не существует конечных пределов $|h(t-, s_*)|$ и $|h(t_*, s-)|$, что противоречит правильности сечений $h(\cdot, s)$, $h(t, \cdot)$. $\square$

Замечание 1. В отсутствие правильности ограниченность обоих сечений, вообще говоря, не означает ограниченности $h(\cdot, \cdot)$.

Предложение 3. Пусть сечения $h(\cdot, s)$ ($s \in [c, d]$) и $h(t, \cdot)$ ($t \in [a, b]$) — функции ограниченной вариации. Тогда функции $v(s) \doteq \bigvee_a^b (h(\cdot, s))$ и $w(t) \doteq \bigvee_a^b (h(t, \cdot))$ также имеют конечную полную вариацию.

Следующее утверждение вытекает непосредственно (см. [12, с. 23]) из свойств функции

$$x_\pi(t) \doteq \bigvee_a^t(x), \quad x \in \mathbf{BV} \quad \left(V \doteq \bigvee_a^b(x) = x_\pi(b) \right). \quad (1.4)$$

Предложение 4. Пусть $x \in \mathbf{CBV}$, $\Delta \doteq \{(t, s) : a \leq s \leq t \leq b\}$, $v : \Delta \rightarrow [0, V]$; $v(s, s) = 0$, а при $t > s$ $v(t, s) = \bigvee_s^t(x)$. Тогда

- а) v непрерывна на Δ (а значит, и равномерно непрерывна на Δ);
- б) при фиксированном s , $0 \leq s \leq V$, функция v возрастает по t ; при фиксированном t , $0 \leq t \leq V$, функция v убывает по s ;
- в) для любого $\varepsilon > 0$ и $c \in (a, b)$ ($c = a$, $c = b$) существует интервал $(\alpha, \beta) \ni c$ (полуинтервал $[a, \beta)$, $(\alpha, b]$) такой, что $v(\beta, \alpha) < \varepsilon$ ($v(\beta, a) < \varepsilon$, $v(b, \alpha) < \varepsilon$).

Предложение 5. Имеют место строгие (теоретико-множественные) включения

$$\underline{\mathbf{AC}} \subset \underline{\mathbf{CBV}} \subset \underline{\mathbf{BV}}, \quad \underline{\mathbf{H}} \subset \underline{\mathbf{BV}} \subset \underline{\mathbf{HC}} \subset \underline{\mathbf{R}} \subset \underline{\mathbf{N}} \subset \underline{\mathbf{R}} \subset \underline{\mathbf{M}}, \quad (1.5)$$

причем подчеркнутые включения являются также вложениями банаховых пространств ($\mathbf{AC}$ — пространство абсолютно непрерывных функций с обычной нормой, которая эквивалентна норме $\mathbf{BV}$ (1.2)).

Доказательство. Все теоретико-множественные включения очевидны. В доказательстве нуждается только полнота пространств $\mathcal{R}$ и $\mathbf{N}$ (полнота $\mathbf{R}$ доказана в книге [12, с. 71, 278]; см. также [11]).

Покажем, что $\mathcal{R}(\mathbf{N})$ замкнуто в $\mathbf{M}(\mathcal{R})$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{M}$, $x_n(t) \Rightarrow x(t)$ ($n \rightarrow \infty$); в силу полноты $\mathbf{M}$, $x \in \mathbf{M}$, а в силу равномерной сходимости имеет место включение

$$T(x) \subset \bigcup_{n=1}^\infty T(x_n). \quad (1.6)$$

В самом деле, пусть $C \doteq [a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^\infty T(x_n)$; точки этого множества — точки непрерывности всех членов последовательности; в силу равномерной сходимости последовательности, это и точки непрерывности функции x ; значит, точки множества C не содержат точек из $T(x)$; этим включение (1.6) доказано.

Из этого включения и теоремы Лебега (критерия интегрируемости по Риману) следует, что если $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{R}(\subset \mathbf{N})$, то и $x \in \mathcal{R}(\in \mathbf{N})$; следовательно, $\mathcal{R}(\mathbf{N})$ замкнуто в $\mathbf{M}(\mathcal{R})$. А это означает, что $\mathcal{R}(\mathbf{N})$ — банахово пространство (внимание: речь идет о норме (1.1)). $\square$

Предложение 6. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbf{R}$, $x_n(t) \Rightarrow x(t)$; тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow t \pm} x_n(s) = x(t \pm)$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_t(x_n) = \sigma_t(x)$ ($t \in (a, b)$), $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_a^+(x_n) = \sigma_a^+(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_b^-(x_n) = \sigma_b^-(x)$.

Доказательство. Из предложения 5 следует, что $x \in \mathbf{R}$, а равномерная сходимость означает, что $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) в $\mathbf{R}$. В силу леммы Шатуновского–Мура [14, с. 40] порядок предельных переходов можно поменять: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow t \pm} x_n(s) = \lim_{s \rightarrow t \pm} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(s) = x(t \pm)$. $\square$

§ 2. Об интеграле Римана–Стилтьеса

Напомним: интеграл Римана–Стилтьеса (RS -интеграл) определяется как предел при неограниченном измельчении дробления интегральных сумм Стилтьеса

$$\mathfrak{S}_\tau(f, g) \doteq \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \Delta g_k, \text{ где } \tau = \{t_k\}_{k=0}^m, \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b,$$

— разбиение $[a, b]$, $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $\Delta g_k = g(t_k) - g(t_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Пусть X и Y — два класса функций (например из цепочек (1.5)); скажем, что (X, Y) — пара классов существования RS -интеграла, если любая функция $f \in X$ интегрируема по любой функции $g \in Y$; назовем эту пару *точной*, если ни один из этих классов нельзя расширить без сужения другого. Как известно (см. например, [12]), (C, BV) — точная пара классов существования RS -интеграла; другая точная пара — $(\mathcal{R}, AC)$ (если ограничиваться расширениями в рамках цепочек (1.5), [12, с. 208]).

Для удобства читателя приведем известные утверждения из [12].

1. *Существование одного из интегралов $\int_a^b f(t) dg(t)$ или $\int_a^b g(t) df(t)$ влечет существование другого и равенство*

$$\int_a^b f(t) dg(t) + \int_a^b g(t) df(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a) \doteq f(t)g(t) \Big|_a^b$$

(формула интегрирования по частям).

Д о к а з а т е л ь с т в о см. [12, с. 34]. □

Из этого утверждения следует, что пары (BV, C) и $(AC, \mathcal{R})$ также точные.

2. *Пусть g — строго возрастающая функция, μ_g — порожденная ею мера Лебега–Стилтьеса, $f \in M$; для того чтобы существовал интеграл Римана–Стилтьеса $\int_a^b f(t) dg(t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mu_g(T(f)) = 0$ (аналог теоремы Лебега о критерии интегрируемости функции по Риману).*

Д о к а з а т е л ь с т в о см. [12, с. 375]. □

3. Пусть $f \in \mathcal{R}$, $g \in BV$ и интеграл $\int_a^b f(t) dg(t)$ существует. Тогда

$$\int_t^{t+h} f(s) dg(s) = f(\pm t)(g(\pm t) - g(t)) + \alpha(h), \quad \alpha(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow \pm 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. [12, с. 62]. □

Теорема 1. Пусть $g \in CBV$, $f \in N$. Тогда интеграл Римана–Стилтьеса $\int_a^b f(t) dg(t)$ существует $((N, CBV)$ и (CBV, N) — пары классов существования RS -интеграла).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывную функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности возрастающих непрерывных функций:

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t), \tag{2.1}$$

причем можно добиться строгого возрастания этих функций. Так как множество $T(f)$ не более чем счетно, то $\mu_{g_1}(T(f)) = \mu_{g_2}(T(f)) = 0$, и остается сослаться на утверждение 2. □

Теорема 2. Пусть $f_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \rightrightarrows f(t)$ ($n \rightarrow \infty$), $g \in \mathbf{CBV}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dg(t) = \int_a^b f(t) dg(t). \quad (2.2)$$

Доказательство следует доказательству теоремы 4.3 из [12, с. 51]. $\square$

Теорема 3. Пусть $g \in \mathbf{CBV}$, $f_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \rightarrow f(t)$, $t \in [a, b]$ ($n \rightarrow \infty$), $f \in \mathbf{N}$, $\|f_n\| \leq M$ ($n \in \mathbb{N}$) при некотором M . Тогда выполняется соотношение (2.2).

Доказательство. В случае возрастающей g см. [12, с. 129]. В общем случае воспользуемся представлением (2.1) и сведем утверждение к уже доказанному случаю. $\square$

Теорема 4. Пусть $g_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $g_n(t) \rightrightarrows g(t)$ ($n \rightarrow \infty$), $f \in \mathbf{CBV}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dg_n(t) = \int_a^b f(t) dg(t).$$

Доказательство. Используем утверждение 1 и теорему 2:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dg_n(t) &= f(t)g_n(t) \Big|_a^b - \int_a^b g_n(t) df(t) \rightarrow f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b g(t) df(t) = \\ &= \int_a^b f(t) dg(t) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Теорема 5 (теорема Хелли для пары классов $(\mathbf{N}, \mathbf{CBV})$). Пусть $f \in \mathbf{N}$, $g_n \in \mathbf{CBV}$ ($n \in \mathbb{N}$), $g_n(t) \rightarrow g(t)$ ($t \in [a, b]$, $n \rightarrow \infty$), $g \in \mathbf{C}$, $\bigvee_a^b(g_n) \leq V$ ($V > 0$). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dg_n(t) = \int_a^b f(t) dg(t).$$

Доказательство. Точно так же, как при доказательстве теоремы Хелли (см. [12, с. 52]) показывается, что $g \in \mathbf{BV}$, и значит, $g \in \mathbf{CBV}$, причем $\bigvee_a^b(g_n) \leq V$.

Пусть $g_\pi(t) \doteq \bigvee_a^t(g)$ (см. (1.4)), μ_{g_π} — мера Лебега–Стилтьеса, порожденная функцией g_π . Рассмотрим функцию $\widehat{g}: \Delta \rightarrow [0, V]$, $\Delta \doteq \{(t, s): 0 \leq s \leq t \leq V\}$,

$$\widehat{g}(s, s) = 0, \quad \text{а для } s < t \quad \widehat{g}(t, s) \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \bigvee_s^t(g), \bigvee_s^t(g_n) \right\}.$$

Очевидно (см. предложение 4), $\widehat{g}$ непрерывна на Δ , следовательно, $\widehat{g}$ равномерно непрерывна на Δ ; для $\widehat{g}$ выполняется утверждение в) предложения 4.

Пусть $\Omega(f)$ — колебание f на всем $[a, b]$, $\gamma > 0$ — произвольно, и $T(f) = \{c_1, c_2, \dots\}$. В силу предложения 4 и равенства $\lim_{(t', s') \rightarrow (s, s)} \widehat{g}(t', s') = \widehat{g}(s, s) = 0$ найдется интервал

$(a_k, b_k) \ni c_k$ такой, что $\widehat{g}(b_k, a_k) < \frac{\gamma}{2^k \cdot \Omega(f)}$, $k = 1, 2, \dots$; таким образом, $T(f)$ покрыто

открытым множеством $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ так, что

$$\mu_{g_\pi}(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \bigvee_{a_k}^{b_k}(g) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}(b_k, a_k) < \frac{\gamma}{\Omega(f)}, \quad (2.3)$$

а также

$$\mu_{g_n, \pi}(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \bigvee_{a_k}^{b_k} (g_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}(b_k, a_k) < \frac{\gamma}{\Omega(f)}. \quad (2.4)$$

(Если $c_{k_0} = a$ ($c_{k_1} = b$), то речь идет о полуинтервале $[a, b_{k_0})$ ($(a_{k_1}, b]$); G в этом случае относительно открыто.) Множество $F = [a, b] \setminus G$ замкнуто и f непрерывна, а значит, и равномерно непрерывна на F . Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что для любого $t_0 \in F$ колебание $\omega(f)$ функции f на множестве $[t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}] \cap F$ удовлетворяет неравенству $\omega(f) < \gamma$.

Зафиксируем произвольное разбиение $\tau = \{t_k\}_{k=0}^m$ отрезка $[a, b]$, диаметр которого $d(\tau) < \delta$. Пусть $\mathcal{J}'_1, \dots, \mathcal{J}'_p$ — промежутки $[t_{k-1}, t_k]$ этого разбиения, которые содержат хотя бы одну точку множества F , а $\mathcal{J}''_1, \dots, \mathcal{J}''_q$ ($p + q = m$) — остальные промежутки разбиения τ ; промежутки второго типа содержатся в G .

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \mathfrak{S}_{\tau}(f, g) - \int_a^b f(t) dg(t) \right| &= \left| \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \Delta g_k - \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) dg(t) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(\xi_k) - f(t)) dg(t) \right| \leq \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(\xi_k) - f(t)| dg_{\pi}(t) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \omega_{\tau k}(f) \int_{t_{k-1}}^{t_k} dg_{\pi}(t) = \sum_{k=1}^m \omega_{\tau k}(f) \Delta g_{\pi k} \doteq S \end{aligned}$$

Сумму S разобьем на две:

$$S = \sum_{i=1}^p \omega'_i(f) \mu_{g_{\pi i}}(\mathcal{J}'_i) + \sum_{j=1}^q \omega''_j(f) \mu_{g_{\pi j}}(\mathcal{J}''_j).$$

($\omega'_i(f)$ ($\omega''_j(f)$) — колебания функции f на промежутках первого (второго) типа). По построению с учетом (2.3)

$$S < \gamma \sum_{i=1}^p \mu_{g_{\pi}}(\mathcal{J}'_i) + \Omega(f) \sum_{j=1}^q \mu_{g_{\pi}}(\mathcal{J}''_j) < \left(\gamma \bigvee_a^b (g) + \gamma \right) = \gamma \left(\bigvee_a^b (g) + 1 \right) = \gamma(V + 1).$$

Таким образом, для разбиения τ имеет место оценка

$$\left| \mathfrak{S}_{\tau}(f, g) - \int_a^b f(t) dg(t) \right| < \gamma \cdot (V + 1). \quad (2.5)$$

Точно так же, учитывая (2.4), получим, что

$$\left| \mathfrak{S}_{\tau}(f, g_n) - \int_a^b f(t) dg_n(t) \right| < \gamma \cdot (V + 1) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Положим во всех предыдущих рассуждениях $\gamma = \frac{\varepsilon}{3(V + 1)}$. Так как в силу поточечной сходимости $g_n(t) \rightarrow g(t)$ $\mathfrak{S}_{\tau}(f, g_n) \rightarrow \mathfrak{S}_{\tau}(f, g)$ ($n \rightarrow \infty$), то найдется такое натуральное N , что при $n > N$ выполняется неравенство

$$|\mathfrak{S}_{\tau}(f, g_n) - \mathfrak{S}_{\tau}(f, g)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.6)$$

Согласно оценкам (2.5)–(2.6) при таких n

$$\left| \int_a^b f(t) dg_n(t) - \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \left| \int_a^b f(t) dg_n(t) - \mathfrak{S}_\tau(f, g_n) \right| + |\mathfrak{S}_\tau(f, g_n) - \mathfrak{S}_\tau(f, g)| + \\ + \left| \mathfrak{S}_\tau(f, g) - \int_a^b f(t) dg(t) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

§3. Определение $(*)$ -интеграла

1. Пусть $f \in \mathbf{N}$, $g \in \mathbf{BV}$, $a < b$ (см. (1.5)). Положим

$$(*) \int_a^b f(t) dg(t) \doteq \int_a^b f(t) dg_c(t) + \left(f(a)\sigma_a^+(g) + \sum_{t \in T(g) \cap (a,b)} f(t)\sigma_t(g) + f(b)\sigma_b^-(g) \right), \quad (3.1)$$

Первое слагаемое в правой части (3.1) представляет собой интеграл Римана–Стилтьеса по отрезку $[a, b]$ (ср. [7]). Существование этого интеграла обеспечивается теоремой 1. В силу конечности полной вариации функции g абсолютно сходится ряд $\sum_{t \in T(g) \cap (a,b)} \sigma_t(g)$,

а из ограниченности функции f (и, следовательно, ограниченности последовательности $\{f(t)\}_{t \in T(g) \cap (a,b)}$) следует и абсолютная сходимость ряда в (3.1).

2. Непосредственно из определения (3.1) следует, что

а) $(*)$ -интеграл линеен относительно интегрируемой (f) и интегрирующей (g) функций;

б) имеет место оценка (см. [7]) $\left| (*) \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \|f\|_{\mathbf{N}} \bigvee_a^b(g);$

в) пусть $[c, d] \subset [a, b]$ ($c < d$); интеграл $(*) \int_c^d f(t) dg(t)$ отвечает отрезку $[c, d]$ и определяется по формуле (3.1), где в роли a (b) выступает c (d); разумеется, непрерывная часть функции g на отрезке $[c, d]$ отличается от непрерывной части этой функции на отрезке $[a, b]$ на константу (эта константа равна $m \doteq \sum_{s < c, s \in T(g)} \sigma_s(g) + \sigma_c^-(g)$), однако это не влияет на

величину интеграла Римана–Стилтьеса $\int_c^d f(t) dg_c(t);$

г) $(*)$ -интеграл аддитивен в естественном смысле: если $a < c < b$, то

$$(*) \int_a^b f(t) dg(t) = (*) \int_a^c f(t) dg(t) + (*) \int_c^b f(t) dg(t) \quad (3.2)$$

(аддитивность интеграла как функции отрезка); этот факт нуждается в более подробном обосновании. Как уже отмечалось в п. в), можно считать, что в интегралах Римана–Стилтьеса

$$\int_a^b f(t) dg_c(t), \quad \int_a^c f(t) dg_c(t), \quad \int_c^b f(t) dg_c(t)$$

одна и та же интегрирующая функция (на самом деле в последнем интеграле интегрирующая функция отличается на константу m , но это на величину интеграла не влияет); поэтому

$$\int_a^b f(t) dg_c(t) = \int_a^c f(t) dg_c(t) + \int_c^b f(t) dg_c(t);$$

а так как $\sigma_c(g) = \sigma_c^+(g) + \sigma_c^-(g)$, то

$$\sum_{t \in T(g)} f(t) \sigma_t(g) = \sum_{t \in T(g), t \leq c} f(t) \sigma_t(g) + \sum_{t \in T(g), t \geq c} f(t) \sigma_t(g);$$

два выделенных равенства и означают справедливость утверждения (3.2).

Теорема 6. Пусть $f \in \mathbf{N}$, $g \in \mathbf{BV}$. Тогда $\Phi(t) \doteq (*) \int_a^t f(s) dg(s)$ — функция ограниченной вариации; $\Phi(t+) = f(t) \sigma_t^+(g)$, $\Phi(t-) = f(t) \sigma_t^-(g)$, $\sigma_t(\Phi) = f(t) \sigma_t(g)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного разбиения $\{t_k\}_{k=0}^n$ в силу утверждения 2 б)

$$\sum_{k=1}^n |\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| (*) \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) dg(t) \right| \leq \|f\|_{\mathbf{N}} \sum_{k=1}^n \bigvee_{t_{k-1}}^{t_k} (g) = \|f\|_{\mathbf{N}} \bigvee_a^b (g).$$

Пусть $h > 0$; в силу (3.2) и (3.1)

$$\begin{aligned} \Phi(t+h) - \Phi(t) &= (*) \int_t^{t+h} f(t) dg(t) = \int_t^{t+h} f(t) dg_c(t) + \\ &+ f(t)(g(t+) - g(t)) + \sum_{s \in T(g) \cap (t, t+h)} f(s)(g(s+) - g(s-)) + f(t+h)(g(t+h) - g(t+h-)); \end{aligned}$$

первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ в силу утверждения 3 § 2; слагаемое $\sum$ во второй строке при $h \rightarrow 0+$ стремится к 0; это очевидно, если t — изолированная точка множества $T(g)$; в случае, если t — предельная точка этого множества, то в силу предложения 1 $\sum$ стремится к $f(t)(g(t+) - g(t)) = 0$ (первый сомножитель хотя и не имеет предела, но является ограниченным); по этой же причине стремится к нулю и последнее слагаемое во второй строке; таким образом, получаем: $\Phi(t+) = f(t)(g(t+) - g(t))$; рассмотрев разность $\Phi(t) - \Phi(t-h)$, убедимся, что $\Phi(t-) = f(t)(g(t) - g(t-))$. $\square$

§ 4. Формула интегрирования по частям

Пусть $f \in \mathbf{HC}$, $g \in \mathbf{BV}$; тогда существует интеграл

$$(*) \int_a^b g(t) df(t) \doteq \int_a^b g(t) df_c(t) + \left(g(a) \sigma_a^+(f) + \sum_{t \in T(f) \cap (a,b)} g(t) \sigma_t(f) + g(b) \sigma_b^-(f) \right). \quad (4.1)$$

Теорема 7. Пусть $f \in \mathbf{HC}$, $g \in \mathbf{BV}$; тогда имеет место равенство (формула интегрирования по частям)

$$(*) \int_a^b f(t) dg(t) + (*) \int_a^b g(t) df(t) = f(t)g(t) \Big|_a^b.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ниже (на протяжении всего доказательства) доопределим все функции для $t < a$ их значениями в точке a , а для $t > b$ — значениями в точке b ; тогда

$$\sigma_a^+(x) = \sigma_a(x), \quad \sigma_b^-(x) = \sigma_b(x);$$

с учетом этого внеинтегральные слагаемые в (3.1) и (4.1) могут быть записаны соответственно в виде

$$\sum_{t \in T} f(t) \sigma_t(g), \quad \sum_{t \in T} g(t) \sigma_t(f), \quad (4.2)$$

где положено $T \doteq T(f) \cup T(g)$ (причиной, по которой эти упрощения в записи не были сделаны сразу при определениях (3.1), (4.1), является необходимость рассматривать интегралы с переменными пределами, см., например, теорему 6).

Из определений (3.1), (4.1) (с учетом записи (4.2)) и представлений (1.3) имеем

$$(*) \int_a^b f(t) dg(t) + (*) \int_a^b g(t) df(t) = F + G + H,$$

где обозначено (см. утверждение 1 § 2):

$$F \doteq \int_a^b f_c(t) dg_c(t) + \int_a^b g_c(t) df_c(t) \left(= g_c(t) f_c(t) \Big|_a^b \right), \quad G \doteq \int_a^b f_d(t) dg_d(t) + \int_a^b g_d(t) df_d(t),$$

$$H \doteq \sum_{t \in T} f(t) \sigma_t(g) + \sum_{t \in T} g(t) \sigma_t(f);$$

В силу утверждения 1 § 2 и формулы для вычисления интеграла Римана–Стилтьеса [12, с. 53]

$$\int_a^b f_d(t) dg_c(t) = f_d(t) g_c(t) \Big|_a^b - \int_a^b g_c(t) df_d(t) = f_d(b) g_c(b) - \sum_{t \in T} g_c(t) \sigma_t(f);$$

аналогично

$$\int_a^b g_d(t) df_c(t) = g_d(t) f_c(t) \Big|_a^b - \int_a^b f_c(t) dg_d(t) = g_d(b) f_c(b) - \sum_{t \in T} f_c(t) \sigma_t(g).$$

Складывая два последних равенства, получаем

$$\begin{aligned} F + G &= g_c(t) f_c(t) \Big|_a^b + f_d(t) g_c(t) \Big|_a^b + g_d(t) f_c(t) \Big|_a^b - \int_a^b g_c(t) df_d(t) - \int_a^b f_c(t) dg_d(t) = \\ &= g(t) f(t) \Big|_a^b - g_d(b) f_d(b) - \sum_{t \in T} g_c(t) \sigma_t(f) - \sum_{t \in T} f_c(t) \sigma_t(g) = g(t) f(t) \Big|_a^b - H + S, \end{aligned}$$

где

$$S \doteq \sum_{t \in T} (g_d(t) \sigma_t(f) + f_d(t) \sigma_t(g)) - g_d(b) f_d(b) = 0$$

в силу того же утверждения 1 § 2, примененного к функциям g_d и f_d . Таким образом, окончательно

$$(*) \int_a^b f(t) dg(t) + (*) \int_a^b g(t) df(t) = F + G + H = f(t) g(t) \Big|_a^b.$$

□

Теорема 6 позволяет распространить определение $(*)$ -интеграла на случай, когда интегрируемая функция $f \in \mathbf{BV}$, а интегрирующая $g \in \mathbf{N}$. А именно, в этом случае полагаем

$$(*) \int_a^b f(t) dg(t) \doteq f(t) g(t) \Big|_a^b - (*) \int_a^b g(t) df(t). \quad (4.3)$$

§ 5. Перемена порядка интегрирования

Теорема 8. Пусть выполнено одно из условий:

$$I) \quad f \in \mathbf{BV}[a, b], \quad g \in \mathbf{BV}[c, d], \quad h(\cdot, s) \in \mathbf{R}[a, b], \quad h(t, \cdot) \in \mathbf{R}[c, d];$$

или

$$II) \quad f \in \mathbf{R}[a, b], \quad g \in \mathbf{R}[c, d], \quad h(\cdot, s) \in \mathbf{BV}[a, b], \quad h(t, \cdot) \in \mathbf{BV}[c, d] \quad (t \in [a, b], \quad s \in [c, d]).$$

Тогда

$$(*) \int_a^b \left((*) \int_c^d h(t, s) dg(s) \right) df(t) = (*) \int_c^d \left((*) \int_a^b h(t, s) df(t) \right) dg(s). \quad (5.1)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия I. Если f и g — непрерывные функции ограниченной вариации, то согласно [12, с. 64] имеет место равенство

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(t, s) dg(s) \right) df(t) = \int_c^d \left(\int_a^b h(t, s) df(t) \right) dg(s) \quad (5.2)$$

(в этом случае оба интеграла трактуются в смысле Римана–Стилтьеса).

Из условий теоремы в силу предложения 2 следует существование $M > 0$ такого, что $|h(t, s)| \leq M$ ($t \in [a, b]$, $s \in [c, d]$). Пусть выполнены условия I. Тогда

а) абсолютно сходится двойной ряд

$$S \doteq \sum_{s \in T(g), t \in T(f)} h(t, s) \sigma_s(g) \sigma_t(f) \quad \text{и} \quad |S| \leq M \bigvee_a^b(f) \bigvee_c^d(g),$$

так как частичные суммы двойного ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{s \in T(g), t \in T(f)} |h(t, s)| \cdot |\sigma_s(g)| \cdot |\sigma_t(f)|$$

ограничены числом $M \bigvee_a^b(f) \bigvee_c^d(g)$;

б) по теореме Прингсгейма (см., например [15, с. 43]), абсолютно сходятся соответствующие повторные ряды, причем

$$\sum_{t \in T(f)} \sum_{s \in T(g)} h(t, s) \sigma_t(f) \sigma_s(g) = \sum_{s \in T(g)} \sum_{t \in T(f)} h(t, s) \sigma_s(g) \sigma_t(f).$$

в) абсолютно и равномерно относительно t (s) сходится ряд $\sum_{s \in T(g)} h(t, s) \sigma_s(g)$ (соответственно $\sum_{t \in T(f)} h(t, s) \sigma_t(f)$) (ряды мажорируются сходящимися числовыми рядами), поэтому его можно почленно проинтегрировать по непрерывной функции ограниченной вариации $f_c(t)$ ($g_c(s)$).

Обозначим

$$H_g(t) \doteq \int_c^d h(t, s) dg_c(s), \quad H_f(s) \doteq \int_a^b h(t, s) df_c(t),$$

$$\mathcal{H}_g(t) \doteq (*) \int_c^d h(t, s) dg(s) = H_g(t) + \sum_{s \in T} h(t, s) \sigma_s(g),$$

$$\mathcal{H}_f(s) \doteq (*) \int_a^b h(t, s) df(t) = H_f(s) + \sum_{t \in T} h(t, s) \sigma_t(f).$$

В этих обозначениях утверждение теоремы выглядит так:

$$(*) \int_a^b \mathcal{H}_g(t) df(t) = (*) \int_c^d \mathcal{H}_f(s) dg(s). \quad (5.3)$$

Докажем равенство (5.3).

$$\begin{aligned} (*) \int_a^b \mathcal{H}_g(t) df(t) &= \int_a^b \mathcal{H}_g(t) df_c(t) + \sum_{t \in T(f)} \mathcal{H}_g(t) \sigma_t(f) = \\ &= \int_a^b \left(H_g(t) + \sum_{s \in T(g)} h(t, s) \sigma_s(g) \right) df_c(t) + \sum_{t \in T(f)} \left(H_g(t) + \sum_{s \in T(g)} h(t, s) \sigma_s(g) \right) \sigma_t(f) = \\ &= \int_a^b \int_c^d h(t, s) dg_c(s) df_c(t) + \int_a^b \left(\sum_{s \in T(g)} h(t, s) \sigma_s(g) \right) df_c(t) + \\ &\quad + \sum_{t \in T(f)} \left(\int_c^d h(t, s) dg_c(s) \right) \sigma_t(f) + \sum_{t \in T(f)} \sum_{s \in T(g)} \sigma_s(g) \sigma_t(f) \end{aligned}$$

Согласно (5.2) первое слагаемое в правой части может быть записано в виде

$$\int_c^d \int_a^b h(t, s) df_c(t) dg_c(s);$$

в силу утверждения в) второе (третье) слагаемое запишется в виде

$$\sum_{s \in T(g)} \left(\int_a^b h(t, s) df_c(t) \right) \sigma_s(g) \quad \left(\int_c^d \left(\sum_{t \in T(f)} h(t, s) \sigma_t(f) \right) dg_c(s) \right);$$

наконец, последнее слагаемое в силу утверждения б) запишется так: $\sum_{s \in T(g)} \sum_{t \in T(f)} \sigma_t(f) \sigma_s(g)$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} (*) \int_a^b \mathcal{H}_g(t) df(t) &= \int_c^d \int_a^b h(t, s) df_c(t) dg_c(s) + \int_c^d \left(\sum_{t \in T(f)} h(t, s) \sigma_t(f) \right) dg_c(s) + \\ &\quad + \sum_{s \in T(g)} \left(\int_a^b h(t, s) df_c(t) \right) \sigma_s(g) + \sum_{s \in T(g)} \sum_{t \in T(f)} \sigma_t(f) \sigma_s(g) = (*) \int_c^d \mathcal{H}_f(s) dg(s). \end{aligned}$$

Пусть теперь выполнены условия II. Покажем, что и в этом случае равенство (5.1) верно.

Пусть

$$\mathcal{G}_g(t) \doteq (*) \int_c^d h(t, s) dg(s), \quad \mathcal{G}_f(s) \doteq (*) \int_a^b h(t, s) df(t);$$

Согласно определению (4.3)

$$\begin{aligned} (*) \int_a^b \left((*) \int_c^d h(t, s) dg(s) \right) df(t) &= (*) \int_a^b \mathcal{G}_g(t) df(t) = \mathcal{G}_g(t)f(t) \Big|_a^b - (*) \int_a^b f(t) d\mathcal{G}_g(t) = \\ &= f(b) \left(h(b, d)g(d) - h(b, c)g(c) - (*) \int_c^d g(s) d_s h(b, s) \right) - \\ &- f(a) \left(h(a, d)g(d) - h(a, c)g(c) - (*) \int_c^d g(s) d_s h(a, s) \right) - \\ &- (*) \int_a^b f(t) d_t \left(h(t, d)g(d) - h(t, c)g(c) - (*) \int_c^d g(s) d_s h(t, s) \right), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (*) \int_c^d \left((*) \int_a^b h(t, s) df(t) \right) dg(s) &= (*) \int_c^d \mathcal{G}_f(s) dg(s) = \mathcal{G}_f(s)g(s) \Big|_c^d - (*) \int_c^d g(s) d\mathcal{G}_f(s) = \\ &= g(d) \left(h(b, d)f(b) - h(a, d)f(a) - (*) \int_a^b f(t) d_t h(t, d) \right) - \\ &- g(c) \left(h(b, c)f(b) - h(a, c)f(a) - (*) \int_a^b f(t) d_t h(t, c) \right) - \\ &- (*) \int_c^d g(s) d_s \left(h(b, s)f(b) - h(a, s)f(a) - (*) \int_a^b f(t) d_t h(t, s) \right). \end{aligned}$$

Сравнивая два последних равенства, видим, что доказательство равенства (5.1) сводится к доказательству равенства

$$(*) \int_a^b f(t) d_t \left((*) \int_c^d g(s) d_s h(t, s) \right) = (*) \int_c^d g(s) d_s \left((*) \int_a^b f(t) d_t h(t, s) \right),$$

а если рассмотреть функции ограниченной вариации (см. предложение 3)

$$\widehat{H}_g(t) \doteq (*) \int_c^d g(s) d_s h(t, s), \quad \widehat{H}_f(s) \doteq (*) \int_a^b f(t) d_t h(t, s),$$

то, к равенству

$$(*) \int_a^b f(t) d\widehat{H}_g(t) = (*) \int_c^d g(s) d\widehat{H}_f(s),$$

которое вполне идентично равенству (5.3) для первого случая. Таким образом, равенство (5.1) доказано и в рассматриваемом случае. $\square$

Замечание 2. В условиях I и II теоремы пространства правильных функций (R) могут быть заменены пространствами σ -непрерывных функций (N), если предварительно потребовать существование такого $M > 0$, что $|h(t, s)| \leq M$ ($t \in [a, b]$, $s \in [c, d]$).

§ 6. Предельные теоремы

Для $(*)$ -интеграла справедлива «первая» предельная теорема (ср. [12, с. 51]).

Теорема 9. Пусть $f_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \Rightarrow f(t)$ ($n \rightarrow \infty$), $g \in \mathbf{BV}$; тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (*) \int_a^b f_n(t) dg(t) = (*) \int_a^b f(t) dg(t). \quad (6.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим: в силу предложения 5 условия теоремы означают, что $f \in \mathbf{N}$, $f_n \rightarrow f$ в пространстве $\mathbf{N}$ и $\|f_n\| \leq M$ ($n \in \mathbf{N}$) при некотором $M \geq 0$. Поэтому интегралы справа и слева в (6.1) существуют. Сходимость

$$\int_a^b f_n(t) dg_\zeta(t) \rightarrow \int_a^b f(t) dg_\zeta(t) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6.2)$$

следует из теоремы 2. В силу равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ ряд $\sum_{t \in T(g) \cap (a,b)} f_n(t) \sigma_t(g)$ сходится равномерно относительно $n \in \mathbf{N}$, поэтому под его знаком можно совершить предельный переход при $n \rightarrow \infty$, и следовательно,

$$\sum_{t \in T(g) \cap (a,b)} f_n(t) \sigma_t(g) \rightarrow \sum_{t \in T(g) \cap (a,b)} f(t) \sigma_t(g) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (6.3)$$

□

Следствие 1. Пусть $g_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, $g_n(t) \Rightarrow g(t)$ ($n \rightarrow \infty$), $f \in \mathbf{BV}$; тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (*) \int_a^b f(t) dg_n(t) = (*) \int_a^b f(t) dg(t). \quad (6.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательно применяем (5.1), (6.1) и снова (5.1).

Аналог предельной теоремы Лебега также имеет место.

Теорема 10. Пусть $f_n, f \in \mathbf{N}$, $\|f_n\| \leq M$, $n \in \mathbf{N}$, $f_n(t) \rightarrow f(t)$, $t \in [a, b]$ ($n \rightarrow \infty$), $g \in \mathbf{BV}$. Тогда имеет место предельное соотношение (6.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы Лебега (см., например [12, с. 129]) следует сходимость (6.2). Так как равномерная ограниченность последовательности $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ теперь постулируется, то имеет место и сходимость (6.3). □

Следствие 2. Пусть

$$g_n \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}, g_n(t) \rightarrow g(t), t \in [a, b] \quad (n \rightarrow \infty), g \in \mathbf{N}, \|g_n\| \leq M, f \in \mathbf{BV}.$$

Тогда имеет место предельное соотношение (6.4).

Наконец, справедлив аналог теоремы Хелли для $(*)$ -интеграла.

Теорема 11. Пусть $f \in \mathbf{N}$, $g_n(t) \Rightarrow g(t)$ ($n \rightarrow \infty$) и существует константа $V > 0$ такая, что $\bigvee_a^b(g_n) \leq V$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (*) \int_a^b f(t) dg_n(t) = (*) \int_a^b f(t) dg(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точно так же, как при доказательстве теоремы Хелли (см. доказательство теоремы 5) доказывается, что $g \in \mathbf{BV}$. Полагаем $T \doteq \bigcup_{n=1}^\infty T(g_n)$; в силу (1.6) $T(g) \subset T$. Далее, так же, как при доказательстве теоремы 7, запишем определение $(*)$ -интеграла в виде (4.2). Так как частичные суммы ряда $\sum_{t \in T} |f(t) \sigma_t(g_n)|$ ограничены сверху числом $\|f\|_{\mathbf{N}} \cdot V$, то ряд $\sum_{t \in T} f(t) \sigma_t(g_n)$ сходится абсолютно и равномерно

относительно $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что под его знаком можно совершить предельный переход при $n \rightarrow \infty$. Согласно сказанному и предложению 6 $g_{n,\partial}(t) \rightarrow g_\partial(t)$, а значит, и $g_{n,c}(t) \rightarrow g_c(t)$ ($n \rightarrow \infty$). Таким образом, учитывая теорему 5 и предложение 6, получаем

$$\begin{aligned} (*) \int_a^b f(t) dg_n(t) &= \int_a^b f(t) dg_{n,c}(t) + \sum_{t \in T} f(t) \sigma_t(g_n) \rightarrow \\ &\rightarrow \int_a^b f(t) dg_c(t) + \sum_{t \in T} f(t) \sigma_t(g) = (*) \int_a^b f(t) dg(t) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

□

Замечание 3. Теорема 11 хотя и распространяется на более широкие классы функций, по сравнению с теоремой 5, однако несколько проигрывает последней, в связи с требованием равномерной сходимости $g_n(t) \Rightarrow g(t)$ ($n \rightarrow \infty$). Ограничиться поточечной сходимостью, как это сделано в теореме 5, нельзя. И дело не только в доказательстве, которое опирается на предложение 6, требующее равномерную сходимость. Суть в том, что поточечная сходимость, вообще говоря, не обеспечивает в представлении (1.3) «сохранение сходимости»:

$$g_n(t) \rightarrow g(t) \implies g_{n,c}(t) \rightarrow g_c(t), \quad g_{n,\partial}(t) \rightarrow g_\partial(t).$$

В самом деле, пусть $p_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ — непрерывные функции ограниченной вариации, $p_n(a) = 0$, $p \in \mathbf{H}$, $p(a) = 0$, $p_n(t) \rightarrow p(t)$ ($n \rightarrow \infty$); $q_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ — «ступенчатые» функции; $q_n(a) = 0$, $q_n(t) \rightarrow q(t)$ ($n \rightarrow \infty$); q — непрерывная функция ограниченной вариации, $q(a) = 0$. Пусть далее, $g_n(t) \doteq p_n(t) + q_n(t)$, $g(t) \doteq p(t) + q(t)$. Тогда $g_n(t) \rightarrow g(t)$, однако

$$g_{n,c} = p_n(t) \rightarrow p(t) = g_\partial(t), \quad g_{n,\partial}(t) = q_n(t) \rightarrow q(t) = g_c(t) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Укажем конкретный пример из этого «семейства».

Пусть $[a, b] = [0, 1]$, и последовательность $\{c_k\}_{k=0}^\infty$ такова, что $c_0 = 0$, $c_{k+1} > c_k$, $c_k \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$) полагаем

$$p_n(t) = \begin{cases} c_1 \left(\frac{t}{c_1} \right)^n & \text{для } t \in [0, c_1], \\ c_{k-1} + (c_k - c_{k-1}) \left(\frac{t - c_{k-1}}{c_k - c_{k-1}} \right)^n & \text{для } t \in (c_{k-1}, c_k], \quad k = 2, \dots, n, \\ c_n + (1 - c_n) \left(\frac{t - c_n}{1 - c_n} \right)^n & \text{для } t \in (c_n, 1], \end{cases}$$

(p_n — непрерывные строго возрастающие функции); тогда

$$p(t) = \begin{cases} c_{k-1} & \text{для } t \in [c_{k-1}, c_k), \quad k = 1, 2, \dots, \\ 1 & \text{для } t = 1; \end{cases}$$

p — возрастающая (в нестрогом смысле) функция из $\mathbf{H}$, $T(p) = \{c_1, c_2, \dots\}$. Пусть далее $q(t) = t(1-t)$, $q_n(t) = q\left(\frac{k}{n}\right)$, $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $q_n(1) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда даже $q_n(t) \Rightarrow q(t)$ ($n \rightarrow \infty$).

Приведенные примеры обосновывают требование равномерной сходимости в теореме 11.

Теоремы 9 и 11 позволяют легко доказать следующее предельное соотношение, находящее непосредственное применение в теории уравнений с обобщенными функциями в коэффициентах (см., например, [3, 7]).

Теорема 12. Пусть $f_n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, $f_n(t) \Rightarrow f(t)$, $g_n(t) \Rightarrow g(t)$ ($n \rightarrow \infty$), $\bigvee_a^b(g_n) \leq V$, $V > 0$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (*) \int_a^b f_n(t) dg_n(t) = (*) \int_a^b f(t) dg(t).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно мало. В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ найдется такое натуральное N_1 , что для $n > N_1$ $\|f_n - f\|_{\mathbf{N}} < \frac{\varepsilon}{2V}$, а значит, в силу утверждения 2 б) из § 3 и

$$\left| (*) \int_a^b f_n(t) dg_n(t) - (*) \int_a^b f(t) dg_n(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

в силу теоремы 11 найдется такое натуральное N_2 , что для $n > N_2$

$$\left| (*) \int_a^b f(t) dg_n(t) - (*) \int_a^b f(t) dg(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

таким образом, для $n > \max\{N_1, N_2\}$

$$\begin{aligned} & \left| (*) \int_a^b f_n(t) dg_n(t) - (*) \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \\ & \leq \left| (*) \int_a^b f_n(t) dg_n(t) - (*) \int_a^b f(t) dg_n(t) \right| + \left| (*) \int_a^b f(t) dg_n(t) - (*) \int_a^b f(t) dg(t) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurzweil J. Linear differential equations with distributions as coefficients // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 1959. Vol. 7. No. 9. P. 557–560.
2. Левин А.Ю. Вопросы теории обыкновенного дифференциального уравнения. II // Вестник Ярославского университета. 1974. Вып. 8. С. 122–144.
3. Дерр В.Я. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах: обзор // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Пермь: ПНИПУ, 2018. С. 60–86.
4. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968. 749 с.
5. Schwabik S., Tvrdý M., Vejvoda O. Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints. Praha: Academia, 1979.
6. Derr V.Ya. A generalization of Riemann–Stieltjes integral // Functional Differential Equations. 2002. Vol. 9. No. 3–4. P. 325–341.
7. Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М. Альфа-интеграл типа Стильтеса // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. Вып. 1. С. 41–62. <http://mi.mathnet.ru/vuu245>
8. Родионов В.И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса // Изв. вузов. Матем. 2007. № 2. С. 79–82. <http://mi.mathnet.ru/ivm1365>
9. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
10. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
11. Толстоногов А.А. О некоторых свойствах пространства правильных функций // Матем. заметки. 1984. Т. 35. Вып. 6. С. 803–812. <http://mi.mathnet.ru/mz5823>

12. Дерр В.Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, 2008.
13. Дерр В.Я. Функциональный анализ. Лекции и упражнения. М.: Кнорус, 2013.
14. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Том 1. Общая теория. М.: Издательство иностранной литературы, 1962.
15. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Часть первая. Основные операции анализа. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию 18.03.2019

Дерр Василий Яковлевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

E-mail: derr@uni.udm.ru

V. Ya. Derr

On the extension of a Riemann–Stieltjes integral

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 2, pp. 135–152 (in Russian).

Keywords: functions of bounded variation, regulated functions, σ -continuous functions, Riemann–Stieltjes integral, $(*)$ -integral.

MSC2010: 26B30, 26A42

DOI: [10.20537/vm190201](https://doi.org/10.20537/vm190201)

In this paper, the properties of the regular functions and the so-called σ -continuous functions (i.e., the bounded functions for which the set of discontinuity points is at most countable) are studied. It is shown that the σ -continuous functions are Riemann–Stieltjes integrable with respect to continuous functions of bounded variation. Helly's limit theorem for such functions is also proved. Moreover, Riemann–Stieltjes integration of σ -continuous functions with respect to arbitrary functions of bounded variation is considered. To this end, a $(*)$ -integral is introduced. This integral consists of two terms: (i) the classical Riemann–Stieltjes integral with respect to the continuous part of a function of bounded variation, and (ii) the sum of the products of an integrand by the jumps of an integrator. In other words, the $(*)$ -integral makes it possible to consider a Riemann–Stieltjes integral with a discontinuous function as an integrand or an integrator. The properties of the $(*)$ -integral are studied. In particular, a formula for integration by parts, an inversion of the order of the integration theorem, and all limit theorems necessary in applications, including a limit theorem of Helly's type, are proved.

REFERENCES

1. Kurzweil J. Linear differential equations with distributions as coefficients, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1959, vol. 7, no. 9, pp. 557–560.
2. Levin A.Yu. Questions on the theory of ordinary linear differential equations. II, *Vestn. Yaroslav. Univ.*, 1974, issue 8, pp. 122–144 (in Russian).
3. Derr V.Ya. Ordinary linear differential equations with generalized functions in coefficients: survey, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya: teoriya i prilozheniya* (Functional differential equations: theory and applications), Perm: Perm National Research Polytechnic University, 2018, pp. 60–86 (in Russian).

4. Atkinson F.V. *Discrete and continuous boundary problems*, New York: Academic Press, 1964.
Translated under the title *Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi*, Moscow: Mir, 1968.
5. Schwabik S., Tvrdý M., Vejvoda O. *Differential and integral equations. Boundary value problems and adjoints*, Praha: Academia, 1979.
6. Derr V.Ya. A generalization of Riemann–Stieltjes integral, *Functional Differential Equations*, 2002, vol. 9, no. 3–4, pp. 325–341.
7. Derr V.Ya., Kinzebulatov D.M. Alpha-integral of Stieltjes type, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat.*, 2006, issue 1, pp. 41–62 (in Russian). <http://mi.mathnet.ru/eng/vuu245>
8. Rodionov V.I. The adjoint Riemann–Stieltjes integral, *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, issue 2, pp. 75–79. <https://doi.org/10.3103/S1066369X07020107>
9. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*, New York–London: Academic Press, 1960.
Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow: Mir, 1964.
10. Schwartz L. *Analyse Mathématique. Vol. I*, Paris: Hermann, 1967.
Translated under the title *Analiz. Tom I*, Moscow: Mir, 1972.
11. Tolstonogov A.A. Properties of the space of proper functions, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1984, vol. 35, issue 6, pp. 422–427.
<https://doi.org/10.1007/BF01139944>
12. Derr V.Ya. *Teoriya funktsii deistvitel'noi peremennoi. Lektsii i uprazhneniya* (Theory of functions of real argument. Lectures and exercises), Moscow: Vysshaya Shkola, 2008.
13. Derr V.Ya. *Funktsional'nyi analiz. Lektsii i uprazhneniya* (Functional analysis. Lectures and exercises), Moscow: Knorus, 2013.
14. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators. Part I: General theory*, New York–London: Interscience Publishers, 1958.
Translated under the title *Lineinye operatory. Tom 1. Obshchaya teoriya*, Moscow: Inostrannaya Literatura, 1962.
15. Whittaker E.T., Watson G.N. *A course of modern analysis*, Cambridge, 1927.
Translated under the title *Kurs sovremennogo analiza*, Moscow: Fizmatgiz, 1963.

Received 18.03.2019

Derr Vasilii Yakovlevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: derr@uni.udm.ru