Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. V. Chernov, On totally global solvability of controlled second kind operator equation, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2020, Volume 30, Issue 1, 92–111

DOI: <https://doi.org/10.35634/vm200107>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.87.193.239

April 26, 2023, 06:14:11

УДК 517.957, 517.988, 517.977.56

© А. В. Чернов

О ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Рассматривается нелинейное эволюционное операторное уравнение второго рода $\varphi = \mathcal{F}[f[u]\varphi]$, $\varphi \in W[0; T] \subset L_q([0; T]; X)$, в произвольном банаховом пространстве X , с эволюционными (вольтерровыми) операторами $\mathcal{F}: L_p([0; \tau]; Y) \rightarrow W[0; T]$, $f[u]: W[0; T] \rightarrow L_p([0; T]; Y)$ общего вида, Y — произвольное банахово пространство, $u \in \mathcal{D}$ — управляющий параметр. Для указанного уравнения доказываются теорема единственности решения, а также теорема о достаточных условиях тотально (по множеству допустимых управлений) глобальной разрешимости при варьировании управления. При некоторых естественных предположениях, связанных с поточечными по времени t оценками, заключение об однозначной тотально глобальной разрешимости делается, исходя из факта глобальной разрешимости системы сравнения, в качестве которой выступает система функционально-интегральных неравенств (можно заменить ее системой уравнений аналогичного типа, а в некоторых случаях — системой обыкновенных дифференциальных уравнений) относительно функций одного переменного $t \in [0; T]$ со значениями в пространстве $\mathbb{R}$. В качестве примера устанавливаются условия однозначной тотально глобальной разрешимости управляемой нелинейной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса.

Ключевые слова: нелинейное эволюционное операторное уравнение второго рода, тотально глобальная разрешимость, система Навье–Стокса.

DOI: [10.35634/vm200107](https://doi.org/10.35634/vm200107)

Введение

Тотально глобальная разрешимость (ТГР) — это свойство управляемой системы (с распределенными или сосредоточенными параметрами) сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений. Ранее автором в аналогичном смысле использовался термин *тотальное сохранение глобальной разрешимости*, введенный в [1]. Нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы, связанной с дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением, весьма вероятно, когда порядок роста правой части этого уравнения по фазовой переменной превышает линейный — см. примеры в [2, пример к теореме 2.2, с. 87–88; § 4, с. 95–100], [3, § 1], [4, введение, п. 2], [5]. Об актуальности проблемы сохранения глобальной разрешимости и истории вопроса см. подробные обзоры в [6, 7]. Обзор [6] посвящен тем возможностям, которые в теории оптимального управления открывает свойство ТГР управляемых систем. Обзор в [7] касается, в основном, получения достаточных условий *устойчивости* (при «малом» возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) таких систем методом функциональных вольтерровых уравнений. Метод был предложен В. И. Суминым и развит в его работах и работах его учеников, в том числе совместных. Разносторонние обзоры по условиям УСГР содержатся в [8–10]. В [9] см. также обзор работ автора по условиям ТГР до 2014 г.

Ранее при исследовании ТГР управляемых распределенных систем автором применялся метод, основанный на их сведении к функционально-операторному (операторному) уравнению типа Гаммерштейна в банаховом идеальном (в частности, лебеговом) пространстве измеримых функций и его мажоризации, см., например, [1, 11–13]. В [14] предложен подход,

имеющий ряд принципиальных отличий: описание управляемой распределенной системы в виде эволюционного операторного уравнения первого рода с управляемым приращением в банаховом пространстве; применимость не только к полулинейным, но и к существенно нелинейным уравнениям; отказ от требований, аналогичных требованию изотонности линейного оператора правой части уравнения типа Гаммерштейна; использование задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения при мажоризации исследуемого абстрактного уравнения; использование пространства $C([0; T]; X)$, где X — некоторое банахово пространство, в качестве пространства решений. Подход [14] позволил исследовать операторное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве, псевдопараболическое уравнение, систему уравнений Осколкова. Данная статья — результат существенного переосмысления работы [14].

Во-первых, результат [14] сформулирован для эволюционного операторного уравнения первого рода. Но в контексте изучаемой проблематики более естественно рассматривать эволюционное операторное уравнение второго рода. Поясним это на следующем простом примере. Пусть X — гильбертово пространство, $W[0; T] = C_w([0; T]; X)$ — пространство слабо непрерывных функций, $z \in Z[0; T] = L_2([0; T]; X)$, $x_0 \in X$, $G: X \rightarrow X$ — инфинитезимальный производящий линейный оператор сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, $t \geq 0$. Многие линейные начально-краевые задачи сводятся к задаче Коши

$$x'(t) = (Gx)(t) + z(t), \quad t \in (0; T], \quad x(0) = x_0, \quad (0.1)$$

обладающей единственным слабым решением в $W[0; T]$ вида

$$x(t) = \theta(t) + A[z](t) = \mathcal{F}[z](t), \quad \theta(t) = S(t)x_0, \quad A[z](t) = \int_0^t S(t-s)z(s) ds, \quad t \in [0; T].$$

Для определенного таким образом оператора $\mathcal{F}: Z[0; T] \rightarrow W[0; T]$, фактически, той же формулой, но для $t \in [0; \tau]$ определяется естественное сужение на подотрезок, а именно, $\mathcal{F}_\tau: Z[0; \tau] \rightarrow W[0; \tau]$. И по свойствам интеграла Бохнера и свойству равномерной ограниченности сильно непрерывной полугруппы, при некотором $M > 0$ получаем:

$$\|\mathcal{F}[z](t)\|_X \leq \|\theta(t)\|_X + M \int_0^t \|z(s)\|_X ds, \quad t \in [0; T]. \quad (0.2)$$

Рассмотрим теперь управляемый полулинейный аналог задачи (0.1):

$$x'(t) = (Gx)(t) + f(t, x(t), u(t)), \quad t \in (0; T], \quad x(0) = x_0.$$

Решение здесь естественно понимать как решение операторного уравнения второго рода:

$$x = F[x], \quad F[x] \equiv \mathcal{F}[f(., x, u)], \quad x \in W[0; T]. \quad (0.3)$$

А специальный вид оператора правой части $F[x] = \theta + A[f(., x, u)]$, проистекающий из линейности задачи (0.1), позволяет называть его операторным уравнением типа Гаммерштейна. Между тем, в проведенных построениях задача (0.1) может быть и нелинейной (с нелинейным оператором G); важно только, чтобы для произвольно фиксированного $z \in Z[0; T]$ было определено решение $x \in W[0; T]$ (обозначим его $x = \mathcal{F}[z]$). Тогда аналогичным образом конструируется уравнение (0.3) с оператором $\mathcal{F}: Z[0; T] \rightarrow W[0; T]$.

Во-вторых, пространство $C([0; T]; X)$ может оказаться не подходящим на роль пространства $W[0; T]$ решений уравнения (см. пример выше: $W[0; T] = C_w([0; T]; X)$). Для приложений может также понадобиться оценка решения уравнения вида (0.3) по норме

пространства $W[0; T] \neq C([0; T]; X)$; помимо поточечной (по $t \in [0; T]$) оценки решения могут потребоваться оценки его обобщенных производных.

В-третьих, априорные поточечные (при $t \in [0; T]$) оценки $\mathcal{F}[z]$ могут быть доступны не в виде (0.2) (см. [14]), а в виде функции от нормы пространства $L_p([0; t]; Y)$, $t \in [0; T]$.

В-четвертых, в [14] не предусматривается, что правая часть управляемого уравнения может содержать, помимо функции состояния, ее обобщенные производные.

В данной статье для уравнения (0.3) с оператором $\mathcal{F}$ произвольного вида устанавливаются достаточные условия ТГР и единственности решения, а фактически, результаты [14] дорабатываются в соответствии со сделанными замечаниями. В качестве приложения в § 3 исследуется управляемая нелинейная нестационарная система уравнений Навье–Стокса, аналогичная рассмотренной в [15], но с тем отличием, что в функцию плотности внешних сил добавляется зависимость от управления и от состояния. Для указанной управляемой системы, при условии разрешимости на $[0; T]$ задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве $\mathbb{R}$ (выступающей в качестве системы сравнения), устанавливаются: 1) однозначная ТГР; 2) поточечные по времени оценки нормы решения и его обобщенных производных первого порядка в соответствующих лебеговых пространствах; 3) равномерная оценка решений по норме соответствующего пространства Соболева. Результаты [14] здесь неприменимы.

Как и в [14], теорема о ТГР доказывается путем последовательного продолжения решения уравнения вдоль временной шкалы. Возможность продолжения решения основана на предположении о вольтерровости операторов $\mathcal{F}$ и f , определяющих правую часть уравнения, в духе А. Н. Тихонова [16]. Но при следующих отличиях: рассматриваются операторы, действующие в классах функций со значениями в банаховых пространствах; свойство вольтерровости относится не к отдельно взятому оператору, а к семейству операторов, каждый из которых действует в пространстве функций, определенных на своем подотрезке $[0; \tau] \subset [0; T]$. Эта конструкция представляется автору более удобной, так как позволяет не определять специально такой важный инструмент как естественное сужение вольтеррова оператора на подотрезок (преподнося его как отдельный оператор семейства) и не заботиться о том, чтобы сужение всякой функции из $W[0; T]$ на $[0; \tau] \subset [0; T]$ принадлежало пространству $W[0; \tau]$ (см. условие G_1) далее).

§ 1. Формулировка основных результатов

Пусть X, Y, Y_i — вещественные банаховы пространства, $i = \overline{1, \ell}$; $T > 0$, $p, q, p_i \in [1, \infty)$ — заданные константы, $i = \overline{1, \ell}$; $L_p^+[0; T]$ — конус неотрицательных функций в пространстве $L_p[0; T]$; $W_0[0; T]$ — замкнутое множество в банаховом пространстве $W[0; T] \subset C([0; T]; X)$. Точнее говоря, мы предполагаем, что задана шкала банаховых пространств $W[0; \tau] \subset L_q([0; \tau]; X)$ и соответственно, замкнутых подмножеств $W_0[0; \tau] \subset W[0; \tau]$, $\tau \in (0; T]$. В приложениях часто $W_0[0; T]$ — это совокупность функций из $W[0; T]$, которые удовлетворяют некоторому начальному условию, записанному в той или иной конкретной форме. Пусть, далее, задано семейство операторов $\mathcal{F}_\tau: L_p([0; \tau]; Y) \rightarrow W_0[0; \tau]$, $\tau \in (0; T]$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, удовлетворяющее следующим условиям.

(G_1) (вольтерровость). Для любых $0 < \tau \leq \xi \leq T$, $z_\tau \in L_p([0; \tau]; Y)$, $z_\xi \in L_p([0; \xi]; Y)$, и образов $\varphi_\tau = \mathcal{F}_\tau z_\tau$, $\varphi_\xi = \mathcal{F}_\xi z_\xi$, из условия $z_\xi(t) = z_\tau(t)$ при п. в. $t \in [0; \tau]$, вытекает равенство $\varphi_\xi \Big|_{[0; \tau]} = \varphi_\tau$ в пространстве $W[0; \tau]$. Тем самым, $\forall z \in L_p([0; T]; Y)$, $\tau \in (0; T]$ существует единственное решение уравнения: $\varphi = \mathcal{F}_\tau[z \Big|_{[0; \tau]}]$, $\varphi \in W_0[0; \tau]$. Указанное решение естественно понимать как локальное решение уравнения

$$\varphi = \mathcal{F}[z], \quad \varphi \in W_0[0; T]. \quad (1.1)$$

(G₂) Для каждого $\tau \in (0; T]$ определены линейные ограниченные операторы

$$D_{\tau,i}: W[0; \tau] \rightarrow L_{p_i}([0; \tau]; Y_i), \quad i = \overline{1, \ell},$$

такие, что $\|(D_{\tau,i}\varphi)(t)\|_{Y_i} \leq \mathcal{N}_i(t, \|z\|_{L_p([0;t]; Y)}) \in L_{p_i}[0; \tau]$, $i = \overline{1, \ell}$, $\forall z \in L_p([0; \tau]; Y)$, $\varphi = \mathcal{F}_\tau[z]$, где функции $\mathcal{N}_i(t, \omega): [0; T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ не убывают по ω .

(G₃) Для всех $0 \leq \tau < \xi \leq T$, $z_j \in L_p([0; \xi]; Y)$, $\|z_j\|_{L_p([0;\xi]; Y)} \leq \omega$, $z_1 \Big|_{[0;\tau]} = z_2 \Big|_{[0;\tau]}$ при $\tau > 0$, и $\varphi_j = \mathcal{F}_\xi[z_j]$, $j = 1, 2$, имеем: $\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W[0;\xi]} \leq \mathcal{N}(\omega)\alpha_0(\xi - \tau)\|z_1 - z_2\|_{L_p([\tau;\xi]; Y)}$, где $\mathcal{N}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — неубывающая, $\alpha_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная функции.

Теперь в правую часть уравнения (1.1) добавим зависимость от фазовой переменной и от управления. А именно, будем рассматривать управляемый аналог уравнения (1.1):

$$\varphi = \mathcal{F}[f[u](\varphi)], \quad \varphi \in W[0; T]. \quad (1.2)$$

Здесь $u \in U$ — управление из произвольного множества U , и предполагается, что для каждого $u \in U$ определен оператор $f[u] = f_T[u]$, соотнесенный с семейством операторов $f_\tau[u]: W[0; \tau] \rightarrow L_p([0; \tau]; Y)$, $\tau \in (0; T]$, обладающим следующими свойствами.

(F₁) Для любых $\tau, \xi \in (0; T]$, $\tau \leq \xi$, и $\psi_\xi \in W[0; \xi]$, $\psi_\xi \Big|_{[0;\tau]} = \psi_\tau \in W[0; \tau]$, имеем:

$$f_\xi[u](\psi_\xi)(t) = f_\tau[u](\psi_\tau)(t) \text{ для п. в. } t \in [0; \tau].$$

(F₂) Для всех $\tau \in (0; T]$, $\psi \in W[0; \tau]$, $\|(D_{\tau,i}\psi)(\cdot)\|_{Y_i} \leq M_i(\cdot)$ п. в. на $[0; \tau]$, $M_i \in L_{p_i}[0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$, имеем:

$$\|f_\tau[u](\psi)(t)\|_Y \leq \mathcal{N}_0(t, M_1(t), \dots, M_\ell(t)) \in L_p[0; T] \text{ для п. в. } t \in [0; \tau].$$

(F₃) Для всех $0 \leq \tau < \xi \leq T$, $\psi_1, \psi_2 \in W_0[0; \xi]$, $\|(D_{\xi,i}\psi_j)(t)\|_{Y_i} \leq M_i(t)$, п. в. $t \in [0; \xi]$, где $M_i \in L_{p_i}^+[0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$, $j = 1, 2$, при некоторых $\widetilde{M}_i \in L_{p_i}^+[0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$, имеем:

$$\|f_\xi[u](\psi_1) - f_\xi[u](\psi_2)\|_{L_p([\tau;\xi]; Y)} \leq \alpha_1(\xi - \tau)K\left(\max_{i=\overline{1,\ell}} \|M_i + \widetilde{M}_i\|_{L_{p_i}[\tau;\xi]}\right) \|\psi_1 - \psi_2\|_{W[0;\xi]},$$

где $K: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\alpha_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывные функции.

(F₄) Существуют $\rho_i \in L_{p_i}[0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$, дающие решение системы сравнения вида: $\mathcal{N}_i(t, \|\mathcal{N}_0(\cdot, \rho_1, \dots, \rho_\ell)\|_{L_p[0;t]}) \leq \rho_i(t)$, для п. в. $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$ (ясно, что можно усилить это условие: « $\leq$ » заменить на « $=$ » или потребовать, чтобы $\rho_i = \rho \in \text{AC}[0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$).

Теорема 1. Пусть выполнены условия (G₁)–(G₃), (F₁), (F₃), $\alpha_0(0)\alpha_1(0)K(0) = 0$. Тогда, каково бы ни было $u \in U$, уравнение (1.2) не может иметь более одного решения.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (G₁)–(G₃), (F₁)–(F₄), $\alpha_0(0)\alpha_1(0)K(0) = 0$. Тогда $\forall u \in U$ уравнение (1.2) имеет единственное решение $\varphi \in W[0; T]$. Более того, $\|(D_{T,i}\varphi)(t)\|_{Y_i} \leq \rho_i(t)$ при п. в. $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$, $\|\varphi - \mathcal{F}[0]\|_{W[0;T]} \leq \mathcal{N}(\gamma)\alpha_0(T)\gamma$, где $\gamma = \|\mathcal{N}_0(\cdot, \rho_1, \dots, \rho_\ell)\|_{L_p[0;T]}$.

Доказательства теорем 1, 2 см. в § 2.

§ 2. Доказательство основных результатов

Для любых $\tau, \xi \in (0; T]$, $\tau \leq \xi$, $\varphi \in W_0[0; \tau]$, $M_i \in L_{p_i}[0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$, $\vec{M} = \{M_i\}_{i=\overline{1, \ell}}$, определим $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ как множество всех $\eta \in W_0[0; \xi]$ таких, что $\|(D_{\xi, i}\eta)(t)\|_{Y_i} \leq M_i(t)$ для п. в. $t \in [0; \xi]$, $i = \overline{1, \ell}$, $\inf_{\psi} \|\psi - \eta\|_{W[0; \xi]} = 0$, где $\inf$ берется по всем $\psi \in W_0[0; \xi]$ таким, что $\|(D_{\xi, i}\psi)(t)\|_{Y_i} \leq M_i(t)$, п. в. $t \in [0; \tau]$, $i = \overline{1, \ell}$, $\psi|_{[0; \tau]} = \varphi$ в пространстве $W[0; \tau]$.

Лемма 1. Для любых $\tau, \xi \in (0; T]$, $\varphi \in W_0[0; \tau]$, $M_i \in L_{p_i}[0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$, $\vec{M} = \{M_i\}_{i=\overline{1, \ell}}$ множество $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ замкнуто в пространстве $W[0; \xi]$.

Доказательство. В случаях $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi] = \emptyset$, а также конечного множества утверждение тривиально. Будем предполагать, что множество $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ бесконечно.

Пусть $\{\eta_m\} \subset \Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$, $\|\eta_m - \eta_0\|_{W[0; \xi]} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Поскольку $W_0[0; \xi]$ замкнуто в $W[0; \xi]$, то $\eta_0 \in W_0[0; \xi]$. Зафиксируем произвольно индекс $i \in \overline{1, \ell}$. В силу ограниченности оператора $D_i = D_{\xi, i}$ получаем: $\|D_i(\eta_m - \eta_0)\|_{L_{p_i}([0; \xi]; Y_i)} \leq c_i(\xi)\|\eta_m - \eta_0\|_{W[0; \xi]} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, следовательно, $\|D_i\eta_m - D_i\eta_0\|_{L_{p_i}([0; \xi]; Y_i)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$;

$$\|(D_i\eta_0)(t)\|_{Y_i} \leq \|(D_i\eta_m)(t)\|_{Y_i} + \|(D_i\eta_0 - D_i\eta_m)(t)\|_{Y_i} \leq M_i(t) + \|(D_i\eta_0 - D_i\eta_m)(t)\|_{Y_i},$$

и по доказанному, последовательность $\|(D_i\eta_0 - D_i\eta_m)(t)\|_{Y_i} \rightarrow 0$ по норме $L_{p_i}[0; \xi]$, а стало быть, и по мере. По теореме Ф. Рисса найдется подпоследовательность, сходящаяся п. в. Поэтому, без ограничения общности рассуждений, $\|(D_i\eta_0 - D_i\eta_m)(t)\|_{Y_i} \rightarrow 0$ п. в. $t \in [0; \xi]$. Переходом к пределу при $m \rightarrow \infty$ получаем:

$$\|(D_i\eta_0)(t)\|_{Y_i} \leq M_i(t) \quad \text{для п. в. } t \in [0; \xi], \quad i = \overline{1, \ell}. \quad (2.1)$$

Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$ и найдем $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|\eta_m - \eta_0\|_{W[0; \xi]} < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall m \geq m_\varepsilon$. По определению множества $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ найдется $\psi_\varepsilon \in W_0[0; \xi]$ такое, что

$$\|(D_i\psi_\varepsilon)(t)\|_{Y_i} \leq M_i(t), \quad t \in [0; \xi], \quad i = \overline{1, \ell}, \quad \psi_\varepsilon|_{[0; \tau]} = \varphi, \quad \|\psi_\varepsilon - \eta_{m_\varepsilon}\|_{W[0; \xi]} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим $\|\psi_\varepsilon - \eta_0\|_{W[0; \xi]} \leq \|\psi_\varepsilon - \eta_{m_\varepsilon}\|_{W[0; \xi]} + \|\eta_{m_\varepsilon} - \eta_0\|_{W[0; \xi]} < \varepsilon$. В силу (2.1), произвольности выбора $\varepsilon > 0$, и замкнутости $W_0[0; \xi]$ это означает, что $\eta_0 \in \Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$. $\square$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (F_1) , (F_3) . Тогда для всех $\tau, \xi \in (0; T]$, $\varphi \in W_0[0; \tau]$, $M_i \in L_{p_i}[0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$, $\vec{M} = \{M_i\}_{i=\overline{1, \ell}}$, и соответственно, $\psi_1, \psi_2 \in \Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$, имеем:

$$\|f_\xi[u](\psi_1) - f_\xi[u](\psi_2)\|_{L_p([0; \tau]; Y)} = 0 \quad \text{для всех } u \in U.$$

Доказательство. Выберем произвольно $u \in U$ и число $\varepsilon > 0$, и в соответствии с определением множества $\Phi[\xi, \vec{M}, \varphi]$ найдем $\tilde{\psi}_s \in W_0[0; \xi]$ такие, что

$$\|(D_i\tilde{\psi}_s)(t)\|_{Y_i} \leq M_i(t) \quad \text{п. в. } t \in [0; \xi], \quad i = \overline{1, \ell}, \quad \tilde{\psi}_s|_{[0; \tau]} = \varphi,$$

$$\delta_s = \|\tilde{\psi}_s - \psi_s\|_{W[0; \xi]} \leq 1, \quad \alpha_1(\xi)K\left(\max_{i=\overline{1, \ell}} \|M_i\|_{L_{p_i}[0; \xi]}\right)\delta_s \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad s = 1, 2.$$

Положим $f_\xi = f_\xi[u]$, $f_\tau = f_\tau[u]$. Пользуясь условиями (F_1) , (F_3) , имеем:

$$\begin{aligned} \|f_\xi(\psi_1) - f_\xi(\psi_2)\|_{L_p([0;\tau];Y)} &\leq \|f_\xi(\tilde{\psi}_1) - f_\xi(\tilde{\psi}_2)\|_{L_p([0;\tau];Y)} + \sum_{s=1}^2 \|f_\xi(\tilde{\psi}_s) - f_\xi(\psi_s)\|_{L_p([0;\tau];Y)} \leq \\ &\leq \|f_\tau(\varphi) - f_\tau(\varphi)\|_{L_p([0;\tau];Y)} + \alpha_1(\xi)K\left(\max_{i=\overline{1,\ell}} \|M_i\|_{L_{p_i}[0;\xi]}\right) \sum_{s=1}^2 \delta_s \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться произвольностью выбора числа ε . $\square$

Далее во избежание излишней громоздкости индекс τ в обозначениях $D_{\tau,i}$ и $f_\tau[u]$ будем опускать (его значение будет легко понять из контекста). Кроме того, будем считать, что в условии (F_3) $\widetilde{M}_i \equiv 0$, $i = \overline{1,\ell}$; соответствующие изменения в доказательствах для общего случая очевидны: свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега надо использовать не в отношении функций ρ_i , а в отношении суммы $\rho_i + \widetilde{M}_i$, $i = \overline{1,\ell}$.

Доказательство теоремы 1. Предположим, от противного, что управлению $u \in U$ отвечают два решения $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ уравнения (1.2). Обозначим

$$f = f[u], \quad z_j = f(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \quad \omega = \max_{j=1,2} \|z_j\|_{L_p([0;T];Y)}, \quad \aleph_s = \max_{t \in [0;T]} \alpha_s(t), \quad s = 0, 1;$$

$$\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N}(\omega), \quad \rho_i(t) = \mathcal{N}_i\left(t, \max_{j=1,2} \|z_j\|_{L_p([0;t];Y)}\right), \quad i = \overline{1,\ell}.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем: $\max_{i=\overline{1,\ell}} \|\chi_h \rho_i\|_{L_{p_i}[0;T]} \rightarrow 0$ при $\text{mes } h \rightarrow 0$, $h \subset [0;T]$. По условию $\alpha_0(0)\alpha_1(0)K(0) = 0$. В случае $K(0) = 0$ проведем следующее построение. По непрерывности $\lim_{\tau \rightarrow +0} K(\tau) = 0$. Тогда существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$: $\mathcal{N}_\omega \aleph_0 \aleph_1 K\left(\max_{i=\overline{1,\ell}} \|\chi_h \rho_i\|_{L_{p_i}[0;T]}\right) \leq \frac{1}{2} \forall h = [t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1,m}$. В случае $K(0) > 0$ для непрерывной функции $\alpha = \alpha_0(\delta)\alpha_1(\delta)$ имеем: $\alpha(0) = 0$. Поэтому найдется $\bar{\delta} > 0$ такое, что $\mathcal{N}_\omega \alpha(\delta) K\left(\max_{i=\overline{1,\ell}} \|\rho_i\|_{L_{p_i}[0;T]}\right) \leq \frac{1}{2}$ для всех $\delta \in (0; \bar{\delta})$. Таким образом, в любом случае существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ такое, что

$$\mathcal{N}_\omega \alpha(t_j - t_{j-1}) K\left(\max_{i=\overline{1,\ell}} \|\rho_i\|_{L_{p_i}[t_{j-1}, t_j]}\right) \leq \frac{1}{2}, \quad j = \overline{1,m}. \quad (2.2)$$

Рассмотрим отрезок $[0; t_1]$. Определим функцию $\tilde{z}_s \in L_p([0; t_1]; Y)$ как сужение функции z_s на $[0; t_1]$, и положим $\tilde{\varphi}_s = \mathcal{F}_{t_1}[\tilde{z}_s]$, $s = 1, 2$. Согласно условию (G_1) , $\varphi_s \Big|_{[0; t_1]} = \tilde{\varphi}_s$ в пространстве $W[0; t_1]$, $s = 1, 2$. Таким образом, если мы докажем, что $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ в пространстве $W[0; t_1]$, то это будет означать, что $\varphi_1 \Big|_{[0; t_1]} = \varphi_2 \Big|_{[0; t_1]}$ в пространстве $W[0; t_1]$.

Обозначим $\tilde{\eta} = \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1$. Согласно условию (G_3) , $\|\tilde{\eta}\|_{W[0; t_1]} \leq \mathcal{N}_\omega \alpha_0(t_1) \|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|_{L_p([0; t_1]; Y)}$, где по условию (G_2) $\|(D_i \tilde{\varphi}_s)(t)\|_{Y_i} \leq \mathcal{N}_i\left(t, \max_{j=1,2} \|z_j\|_{L_p([0;t]; Y)}\right) = \rho_i(t)$ для п. в. $t \in [0; t_1]$, $i = \overline{1,\ell}$, $s = 1, 2$. Теперь по условиям (F_1) , (F_3)

$$\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|_{L_p([0; t_1]; Y)} = \|f(\tilde{\varphi}_2) - f(\tilde{\varphi}_1)\|_{L_p([0; t_1]; Y)} \leq \alpha_1(t_1) K\left(\max_{i=\overline{1,\ell}} \|\rho_i\|_{L_{p_i}[0; t_1]}\right) \|\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1\|_{W[0; t_1]}.$$

И в силу выбора разбиения, $\|\tilde{\eta}\|_{W[0; t_1]} \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\eta}\|_{W[0; t_1]}$, то есть $\frac{1}{2} \|\tilde{\eta}\|_{W[0; t_1]} \leq 0$.

Действуя по индукции, предположим, мы уже доказали, что $\varphi_1|_{[0;t_{j-1}]} = \varphi_2|_{[0;t_{j-1}]}$ в пространстве $W[0; t_{j-1}]$, $j \in \overline{2, m}$. Исходя из этого, докажем, что $\varphi_1|_{[0;t_j]} = \varphi_2|_{[0;t_j]}$ в пространстве $W[0; t_j]$. Определим функцию $\tilde{z}_s \in L_p([0; t_j]; Y)$ как сужение функции z_s на $[0; t_j]$, и положим $\tilde{\varphi}_s = \mathcal{F}_{t_j}[\tilde{z}_s]$, $s = 1, 2$. Согласно условию $(\mathbf{G}_1)$, $\varphi_s|_{[0;t_j]} = \tilde{\varphi}_s$ в пространстве $W[0; t_j]$, $s = 1, 2$. Таким образом, если мы докажем, что $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ в пространстве $W[0; t_j]$, то это будет означать, что $\varphi_1|_{[0;t_j]} = \varphi_2|_{[0;t_j]}$ в пространстве $W[0; t_j]$.

Обозначим $\tilde{\eta} = \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1$. По условию $(\mathbf{F}_1)$ (с учетом предположения индукции),

$$\tilde{z}_1|_{[0;t_{j-1}]} = f(\varphi_1|_{[0;t_{j-1}]}) = f(\varphi_2|_{[0;t_{j-1}]}) = \tilde{z}_2|_{[0;t_{j-1}]}.$$

Поэтому согласно условию $(\mathbf{G}_3)$ $\|\tilde{\eta}\|_{W[0;t_j]} \leq \mathcal{N}_\omega \alpha_0(t_j - t_{j-1}) \|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|_{L_p([t_{j-1}; t_j]; Y)}$, где по условию $(\mathbf{G}_2)$ $\|(D_i \tilde{\varphi}_s)(t)\|_{Y_i} \leq \mathcal{N}_i(t, \max_{j=1,2} \|z_s\|_{L_p([0;t]; Y)}) = \rho_i(t)$ для п. в. $t \in [0; t_j]$, $i = \overline{1, \ell}$, $s = 1, 2$. Теперь по условиям $(\mathbf{F}_1)$, $(\mathbf{F}_3)$, $\|\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1\|_{L_p([t_{j-1}; t_j]; Y)} = \|f(\tilde{\varphi}_2) - f(\tilde{\varphi}_1)\|_{L_p([t_{j-1}; t_j]; Y)}$, $\|f(\tilde{\varphi}_2) - f(\tilde{\varphi}_1)\|_{L_p([t_{j-1}; t_j]; Y)} \leq \alpha_1(t_j - t_{j-1}) K(\max_{i=\overline{1, \ell}} \|\rho_i\|_{L_{p_i}[t_{j-1}; t_j]}) \|\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1\|_{W[0;t_j]}$.

И в силу выбора разбиения, $\|\tilde{\eta}\|_{W[0;t_j]} \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\eta}\|_{W[0;t_j]}$, то есть $\frac{1}{2} \|\tilde{\eta}\|_{W[0;t_j]} \leq 0$. По индукции, делаем вывод, что $\varphi_1 = \varphi_2$ в пространстве $W[0; T]$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Основываясь на функциях, заданных условиями $(\mathbf{F}_2)$, $(\mathbf{F}_4)$, определим функцию $\tilde{\mathcal{N}}_0 \in L_p[0; T]$ формулой $\tilde{\mathcal{N}}_0(t) = \mathcal{N}_0(t, \rho_1(t), \dots, \rho_\ell(t))$, $t \in [0; T]$. Обозначим $\omega = \|\tilde{\mathcal{N}}_0\|_{L_p[0; T]}$, $\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N}(\omega)$. Повторяя дословно соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1, заключаем, что существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ такое, что выполнено (2.2). Зафиксируем любое $u \in U$ и обозначим для краткости $f = f[u]$. Будем рассматривать локальные аналоги уравнения (1.2):

$$\varphi(t) = \mathcal{F}_{t_j}[f(\varphi)](t), \quad t \in [0; t_j]. \quad (\mathcal{E}_j).$$

Разрешимость уравнений $(\mathcal{E}_j)$ в пространствах $W[0; t_j]$ установим индукцией по $j = \overline{1, m}$.

1. Докажем существование функции $\varphi = \varphi_1 \in W_0[0; t_1]$, решающей уравнение $(\mathcal{E}_1)$ и такой, что $\|(D_i \varphi_1)(t)\|_{Y_i} \leq \rho_i(t)$ для п. в. $t \in [0; t_1]$, $i = \overline{1, \ell}$. Определим Ψ_1 как множество всех $\psi \in W_0[0; t_1]$ таких, что $\|(D_i \psi)(t)\|_{Y_i} \leq \rho_i(t)$ для п. в. $t \in [0; t_1]$, $i = \overline{1, \ell}$.

а) Покажем, что $\Psi_1 \neq \emptyset$. Положим $\eta = \mathcal{F}_{t_1}[0] \in W_0[0; t_1]$. По условиям $(\mathbf{G}_2)$, $(\mathbf{F}_4)$,

$$\|(D_i \eta)(t)\|_{Y_i} \leq \mathcal{N}_i(t, 0) \leq \mathcal{N}_i(t, \tilde{\mathcal{N}}_0(t)) \leq \rho_i(t) \quad \text{для п. в. } t \in [0; t_1], \quad i = \overline{1, \ell} \Rightarrow \eta \in \Psi_1.$$

б) Как показано при доказательстве леммы 1, множество Ψ_1 замкнуто в $W[0; t_1]$.

в) Определим оператор $F_1: \Psi_1 \rightarrow W_0[0; t_1]$ формулой $\eta = F_1[\varphi] = \mathcal{F}_{t_1}[z]$, где $z = f(\varphi)$, $\varphi \in \Psi_1$. По условию $(\mathbf{F}_2)$ $\|z(t)\|_Y = \|f[\varphi](t)\|_Y \leq \tilde{\mathcal{N}}_0(t)$ для п. в. $t \in [0; t_1]$. По условию $(\mathbf{G}_2)$,

$$\|(D_i \eta)(t)\|_{Y_i} \leq \mathcal{N}_i \left(t, \left\{ \int_0^t \|z(\tau)\|_Y^p d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \right) \leq \mathcal{N}_i \left(t, \left\{ \int_0^t (\tilde{\mathcal{N}}_0(\tau))^p d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \right).$$

Отсюда, в силу $(\mathbf{F}_4)$, $\|(D_i \eta)(t)\|_{Y_i} \leq \rho_i(t)$ для п. в. $t \in [0; t_1]$, $i = \overline{1, \ell}$, то есть $F_1: \Psi_1 \rightarrow \Psi_1$.

г) Докажем, что оператор F_1 является сжимающим на множестве Ψ_1 . Выберем любые $\psi_1, \psi_2 \in \Psi_1$ и положим $z_s = f(\psi_s)(t)$, $t \in [0; t_1]$, $\eta_s = F_1[\psi_s] = \mathcal{F}_{t_1}[z_s]$, $s = 1, 2$. В силу $(\mathbf{F}_2)$

$$\|z_s(t)\|_Y = \|f[\psi_s](t)\|_Y \leq \tilde{\mathcal{N}}_0(t), \quad t \in [0; t_1] \Rightarrow \|z_s\|_{L_p([0; t_1]; Y)} \leq \omega, \quad s = 1, 2.$$

По условию $(\mathbf{G}_3)$ $\|\eta_1 - \eta_2\|_{W[0;t_1]} \leq \mathcal{N}_\omega \alpha_0(t_1) \|z_1 - z_2\|_{L_p([0;t_1];Y)}$, где, согласно условию $(\mathbf{F}_3)$

$$\|z_1 - z_2\|_{L_p([0;t_1];Y)} = \|f(\psi_1) - f(\psi_2)\|_{L_p([0;t_1];Y)} \leq \alpha_1(t_1) K \left(\max_{i=1,\ell} \|\rho_i\|_{L_{p_i}[0;t_1]} \right) \|\psi_1 - \psi_2\|_{W[0;t_1]}.$$

И в силу выбора разбиения, $\|\eta_1 - \eta_2\|_{W[0;t_1]} \leq \frac{1}{2} \|\psi_1 - \psi_2\|_{W[0;t_1]}.$

д) Согласно принципу сжимающих отображений, заключаем, что уравнение $(\mathcal{E}_1)$ имеет единственное решение φ_1 в множестве Ψ_1 .

2. Действуя по индукции, предположим, что мы уже доказали существование решения $\varphi_{j-1} \in W_0[0; t_{j-1}]$ уравнения $(\mathcal{E}_{j-1})$ и оценки $\|(D_i \varphi_{j-1})(t)\|_{Y_i} \leq \rho_i(t)$ для п. в. $t \in [0; t_{j-1}]$, $i = \overline{1, \ell}$. Исходя из этого, докажем существование решения $\varphi_j \in W_0[0; t_j]$ уравнения $(\mathcal{E}_j)$, удовлетворяющего оценкам $\|(D_i \varphi_j)(t)\|_{Y_i} \leq \rho_i(t)$ для п. в. $t \in [0; t_j]$, $i = \overline{1, \ell}$. Определим множество $\Psi_j = \Phi[t_j, \vec{\rho}, \varphi_{j-1}]$.

а) Покажем, что $\Psi_j \neq \emptyset$. Положим $z(t) = \{f(\varphi_{j-1})(t), t \in [0; t_{j-1}]; 0, t \in [t_{j-1}; t_j]\}$, $\psi = \mathcal{F}_{t_j}[z] \in W_0[0; t_j]$. Тогда, согласно условию $(\mathbf{G}_1)$, имеем:

$$\psi \Big|_{[0; t_{j-1}]} = \mathcal{F}_{t_{j-1}}[z \Big|_{[0; t_{j-1}]}] = \mathcal{F}_{t_{j-1}}[f(\varphi_{j-1})] = \varphi_{j-1}. \quad (2.3)$$

По условиям $(\mathbf{G}_2)$, $(\mathbf{F}_2)$, предположению индукции, $(\mathbf{F}_4)$ при п. в. $t \in [0; t_{j-1}]$ имеем:

$$\|(D_i \psi)(t)\|_{Y_i} \leq \mathcal{N}_i(t, \|f(\varphi_{j-1})\|_{L_p([0; t]; Y)}) \leq \mathcal{N}_i \left(t, \left\{ \int_0^t \tilde{\mathcal{N}}_0^p(\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \right) \leq \rho_i(t), \quad i = \overline{1, \ell}.$$

Аналогично, при п. в. $t \in [t_{j-1}; t_j]$ имеем:

$$\begin{aligned} \|(D_i \psi)(t)\|_{Y_i} &\leq \mathcal{N}_i(t, \|z\|_{L_p([0; t_{j-1}]; Y)}) = \mathcal{N}_i(t, \|f(\varphi_{j-1})\|_{L_p([0; t_{j-1}]; Y)}) \leq \\ &\leq \mathcal{N}_i \left(t, \left\{ \int_0^{t_{j-1}} \tilde{\mathcal{N}}_0^p(\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \right) \leq \mathcal{N}_i \left(t, \left\{ \int_0^t \tilde{\mathcal{N}}_0^p(\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \right) \leq \rho_i(t), \quad i = \overline{1, \ell}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (2.3), получаем, что $\psi \in \Psi_j$.

б) Замкнутость множества Ψ_j в $W[0; t_j]$ следует непосредственно из леммы 1.

в) Определим оператор $F_j: \Psi_j \rightarrow W_0[0; t_j]$ формулой $\eta = F_j[\varphi] = \mathcal{F}_{t_j}[z]$, где $z = f(\varphi)$, $\varphi \in \Psi_j$. Покажем, что $\eta \in \Psi_j$. Совершенно аналогично пункту 1, в),

$$\|(D_i \eta)(t)\|_{Y_i} \leq \rho_i(t) \quad \text{для п. в. } t \in [0; t_j], \quad i = \overline{1, \ell}. \quad (2.4)$$

Выберем любое $\xi > 0$. Поскольку $\varphi \in \Phi[t_j, \vec{\rho}, \varphi_{j-1}]$, найдется $\psi_\xi \in W_0[0; t_j]$ такой, что

$$\begin{aligned} \|(D_i \psi_\xi)(t)\|_{Y_i} &\leq \rho_i(t) \quad \text{для п. в. } t \in [0; t_j], \quad i = \overline{1, \ell}, \\ \psi_\xi \Big|_{[0; t_{j-1}]} &= \varphi_{j-1}, \quad \mathcal{N}(\omega) \alpha_0(t_j) \alpha_1(t_j) K \left(\max_{i=1,\ell} \|\rho_i\|_{L_{p_i}[0; t_j]} \right) \|\psi_\xi - \varphi\|_{W[0; t_j]} \leq \xi. \end{aligned}$$

Пусть $\eta_\xi = F_j[\psi_\xi] = \mathcal{F}_{t_j}[\zeta_\xi]$, $\zeta_\xi = f(\psi_\xi)$. Ясно, что $\psi_\xi \in \Phi[t_j, \vec{\rho}, \varphi_{j-1}]$, и аналогично (2.4),

$$\|(D_i \eta_\xi)(t)\|_{Y_i} \leq \rho_i(t) \quad \text{для п. в. } t \in [0; t_j], \quad i = \overline{1, \ell}. \quad (2.5)$$

Учитывая, что $z = f(\varphi)$, $\zeta_\xi = f(\psi_\xi)$ и пользуясь условием $(\mathbf{F}_2)$, оценим

$$\|z\|_{L_p([0; t_j]; Y)} \leq \|\tilde{\mathcal{N}}_0\|_{L_p[0; t_j]} \leq \omega; \quad \|\zeta_\xi\|_{L_p([0; t_j]; Y)} \leq \|\tilde{\mathcal{N}}_0\|_{L_p[0; t_j]} \leq \omega.$$

Согласно условиям $(\mathbf{G}_1)$, $(\mathbf{F}_1)$

$$\eta_\xi \Big|_{[0;t_{j-1}]} = \mathcal{F}_{t_{j-1}}[\zeta_\xi \Big|_{[0;t_{j-1}]}] = \mathcal{F}_{t_{j-1}}[f(\varphi_{j-1})] = \varphi_{j-1}. \quad (2.6)$$

При этом по условиям $(\mathbf{G}_3)$, $(\mathbf{F}_3)$, и учитывая, что $\varphi, \psi_\xi \in \Phi[t_j, \vec{\rho}, \varphi_{j-1}]$,

$$\begin{aligned} \|\eta - \eta_\xi\|_{W[0;t_j]} &= \|\mathcal{F}_{t_j}[z] - \mathcal{F}_{t_j}[\zeta_\xi]\| \leq \mathcal{N}(\omega)\alpha_0(t_j)\|f(\varphi) - f(\psi_\xi)\|_{L_p([0;t_j];Y)} \leq \\ &\leq \mathcal{N}(\omega)\alpha_0(t_j)\alpha_1(t_j)K\left(\max_{i=1,\ell}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[0;t_j]}\right)\|\varphi - \psi_\xi\|_{W[0;t_j]} < \xi. \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора числа $\xi > 0$, отсюда, с учетом (2.4)–(2.6), получаем, что $\eta \in \Phi[t_j, \vec{\rho}, \varphi_{j-1}] = \Psi_j$. Таким образом, $F_j: \Psi_j \rightarrow \Psi_j$.

г) Докажем, что оператор F_j — сжимающий на множестве Ψ_j . Выберем любые $\psi_1, \psi_2 \in \Psi_j$ и положим $z_s = f(\psi_s)(t)$, $t \in [0; t_j]$, $\eta_s = F_j[\psi_s] = \mathcal{F}_{t_j}[z_s]$, $s = 1, 2$. Подобно тому, как это было сделано для оценки z в пункте 2, в), получаем: $\|z_s\|_{L_p([0;t_j];Y)} \leq \omega$, $s = 1, 2$. По лемме 2 и условию $(\mathbf{F}_1)$, $z_1 \Big|_{[0;t_{j-1}]} = f(\psi_1) \Big|_{[0;t_{j-1}]} = f(\psi_2) \Big|_{[0;t_{j-1}]} = z_2 \Big|_{[0;t_{j-1}]}$. Поэтому согласно условию $(\mathbf{G}_3)$ $\|\eta_1 - \eta_2\|_{W[0;t_j]} \leq \mathcal{N}_\omega\alpha_0(t_j - t_{j-1})\|z_1 - z_2\|_{L_p([t_{j-1};t_j];Y)}$, где по условию $(\mathbf{F}_3)$ $\|z_1 - z_2\|_{L_p([t_{j-1};t_j];Y)} \leq \alpha_1(t_j - t_{j-1})K\left(\max_{i=1,\ell}\|\rho_i\|_{L_{p_i}[t_{j-1};t_j]}\right)\|\psi_1 - \psi_2\|_{W[0;t_j]}$.

И в силу выбора разбиения, $\|\eta_1 - \eta_2\|_{W[0;t_j]} \leq \frac{1}{2}\|\psi_1 - \psi_2\|_{W[0;t_j]}$.

д) По принципу сжимающих отображений, уравнение $(\mathcal{E}_j)$ имеет решение $\varphi_j \in \Psi_j$.

3. По индукции, аналогичное утверждение справедливо и при $j = m$, т.е. уравнение (1.2) имеет решение $\varphi \in W_0[0; T]$ такое, что $\|(D_i\varphi)(t)\|_{Y_i} \leq \rho_i(t)$ для п.в. $t \in [0; T]$, $i = \overline{1, \ell}$. Отсюда, в силу $(\mathbf{G}_3)$, $(\mathbf{F}_2)$, $\|\varphi - \mathcal{F}[0]\|_{W[0;T]} \leq \mathcal{N}(\gamma)\alpha_0(T)\gamma$, $\gamma = \omega = \|\tilde{\mathcal{N}}_0\|_{L_p[0;T]}$.

Единственность решения в пространстве $W[0; T]$ следует из теоремы 1. $\square$

§ 3. Пример: начально-краевая задача для системы Навье–Стокса

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega = S \in \mathbb{C}^2$, $T > 0$, $p, r \geq 1$, $Q_T = \Omega \times [0; T]$. Помимо пространств Лебега $L_p(\Omega)$, $L_p(Q_T)$ и анизотропных пространств Лебега $L_{p,r}(Q_T) = L_r([0; T]; L_p(\Omega))$ с нормами $\|\cdot\|_{p,Q_T} = \|\cdot\|_{L_p(Q_T)}$, $\|\cdot\|_{p,r,Q_T} = \|\cdot\|_{L_{p,r}(Q_T)}$, следуя [15], будем использовать следующие пространства (в [15] обозначения $L_p^3(\Omega)$ — пространство вектор-функций и $L_p(\Omega)$ — пространство скалярных функций не различаются; мы тоже будем использовать это соглашение):

(1) пространство Соболева $W[0; T] = W_p^{2,1}(Q_T)$, $\|\varphi\|_{W[0;T]} = \sum_{|\mu| \leq 2} \|\partial^\mu \varphi\|_{p,Q_T} + \|\partial_t \varphi\|_{p,Q_T}$,

$$\text{где } \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \text{ — мультииндекс, } |\mu| = \sum_{i=1}^3 \mu_i, \partial^\mu \varphi = \frac{\partial^{|\mu|} \varphi}{\partial x_1^{\mu_1} \partial x_2^{\mu_2} \partial x_3^{\mu_3}}, \partial_t \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

(2) $J_p^{\circ 2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ — замыкание множества гладких финитных соленоидальных векторов в норме пространства $W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ (см. [15, с. 177]); эквивалентной нормой в пространстве $J_p^{\circ 2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ является $\|\varphi\|_{p,\Omega} = \inf_{\psi} \|\psi\|_{W[0;1]}$, где $\inf$ берется по всем продолжениям $\psi(x, t)$ (которые, как устанавливается, всегда существуют) вектора $\varphi(x)$ на множество Q_1 ;

- (3) классы $G_p(\Omega)$ и $\mathring{J}_p(\Omega)$ — см. [15, с. 161]; всякий гладкий финитный вектор $f(x)$ можно представить в виде суммы двух ортогональных в $L_2(\Omega)$ слагаемых:

$$f(x) = \nabla\varphi(x) + g(x), \text{ где } \nabla \cdot g = 0, \quad g \cdot n(x) \Big|_S = 0; \quad \Delta\varphi = \nabla \cdot f(x), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_S = f \cdot n \Big|_S; \quad (3.1)$$

$$(\nabla\varphi, \nabla\Phi) = (f, \nabla\Phi), \quad (g, \nabla\Phi) = 0 \quad \forall \nabla\Phi \in L_{p'}(\Omega), \quad (3.2)$$

где $n(x)$ — вектор внешней нормали, $(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \cdot \psi \, dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \varphi_i(x) \psi_i(x) \, dx$; соответственно, через $G_p(\Omega)$ обозначается множество всех $\nabla\varphi \in L_p(\Omega)$, а через $\mathring{J}_p(\Omega)$ — множество всех векторов $g \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющих тождеству (3.2);

- (4) классы $G_p(Q_T)$ и $\mathring{J}_p(Q_T)$ — подпространства $L_p(Q_T)$, состоящие из векторов, при п. в. $t \in [0; T]$ принадлежащих $G_p(\Omega)$ и $\mathring{J}_p(\Omega)$, соответственно; соотношение (3.1) означает, что $L_p(\Omega) = G_p(\Omega) \oplus \mathring{J}_p(\Omega)$, $L_p(Q_T) = G_p(Q_T) \oplus \mathring{J}_p(Q_T)$; следуя [15], определим операторы проектирования $P_G: L_p(Q_T) \rightarrow G_p(Q_T)$, $P_J: L_p(Q_T) \rightarrow \mathring{J}_p(Q_T)$;
- (5) класс $J_p(Q_T)$ — пространство всех соленоидальных векторов из $W[0; T]$, которые обращаются в ноль на S ; аналогично, $J_p(\Omega)$ — пространство всех соленоидальных векторов из $W_p^2(\Omega)$, которые обращаются в ноль на $\partial\Omega$.

Прежде всего, следуя [15], рассмотрим линеаризованную систему Навье–Стокса:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \nu\Delta\varphi + a(x, t)\varphi + \sum_{k=1}^3 a_k(x, t)\varphi_{x_k} + \nabla\mathcal{P} = z(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0; T], \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \varphi = 0, \text{ то есть } \operatorname{div} \varphi = 0; \quad \varphi \Big|_{x \in S} = 0, \quad t \in [0; T]; \quad \varphi \Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Здесь $\varphi(x, t) = (\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t), \varphi_3(x, t))$ — поле скоростей жидкости, $\mathcal{P}(x, t)$ — давление, $\varphi, \mathcal{P}$ — неизвестные; $a(x, t), a_k(x, t)$ — заданные матрицы такие, что

$$\|a\|_{s, \sigma, Q_T} + \sum_{j=1}^3 \|a_j\|_{s_1, \sigma_1, Q_T} \leq M, \quad \|a\|_{s, \sigma, Q_T} = \max_{k, m} \|a^{k, m}\|_{s, \sigma, Q_T}, \quad \frac{3}{2s} + \frac{1}{\sigma} < 1, \quad \frac{3}{2s_1} + \frac{1}{\sigma_1} < \frac{1}{2};$$

$z = (z_1, z_2, z_3) \in L_p(Q_T)$ — плотность внешних сил, ν — коэффициент вязкости.

Решение задачи (3.3)–(3.4) понимается как пара $(\varphi, \nabla\mathcal{P}) \in J_p(Q_T) \times G_p(Q_T)$, удовлетворяющая при заданных $z \in L_p(Q_T)$, $\varphi_0 \in J_p^{\circ 2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ равенству (3.3) в пространстве $L_p(Q_T)$ (поскольку все входящие в уравнение производные существуют как обобщенные, то это достаточно очевидно и в [15] специально не оговаривается), а также начальному условию в смысле: $\|\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0\|_{p, \Omega} = 0$. При заданной функции $\varphi \in J_p(Q_T)$ функция $\nabla\mathcal{P}$ определяется непосредственно из исходного уравнения. В свою очередь, см. [15, § 5], функция φ при заданном $\varphi_0 \in J_p^{\circ 2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ может быть найдена как решение задачи Коши для операторного дифференциального уравнения в пространстве $\mathring{J}_p(\Omega)$:

$$\frac{d\varphi}{dt} + A(t)\varphi = P_J z, \quad \varphi(s) = \varphi_0; \quad (3.5)$$

где $s = 0$, $A(t)\varphi = -\nu P_J \Delta \varphi + P_J \mathcal{R}\varphi$ — оператор с плотной в $\overset{\circ}{J}_p(\Omega)$ областью определения $J_p(\Omega)$; $\mathcal{R}\varphi = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a\varphi$, $\varphi \in J_p(Q_T)$. Решение дается формулой [15, (5.5)]

$$\varphi(t) = S(t, 0)\varphi_0 + \int_0^t S(t, s)P_J z(s) ds, \quad t \in [0; T]. \quad (3.6)$$

Здесь $S(t, s)$ — оператор с областью определения $J_p(Q_T)$, сопоставляющий вектору $\varphi_0 \in \overset{\circ}{J}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ решение задачи Коши для уравнения (3.5) при $z = 0$.

Справедливо следующее утверждение [15, теорема 4.2, с. 177; следствие 2, с. 179; § 5].

Лемма 3. При сделанных предположениях для всех $z \in L_p(Q_T)$, $\varphi_0 \in \overset{\circ}{J}_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ задача (3.3)–(3.4) имеет единственное решение $\varphi \in W[0; T]$, $\nabla \mathcal{P} \in L_p(Q_T)$, и более того,

$$\|\varphi\|_{W[0; T]} + \|\nabla \mathcal{P}\|_{p, Q_T} \leq C_1(1 + e^{\gamma T}) \{ \|\varphi_0\|_{p, \Omega} + \|z\|_{p, Q_T} \},$$

где константы C_1 , $\gamma > 0$ не зависят от T , φ_0 , z .

Из утверждения и доказательства теоремы 2.1 из [15, с. 156] и доказательства леммы 10.1 из [15, с. 221] очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть $\varphi \in W[0; T]$. Если $q, r \geq p > 1$ таковы, что $\lambda = 1 - \frac{5}{2p} + \frac{3}{2q} + \frac{1}{r} \geq 0$ (при $p = \infty$ или $r = \infty$ неравенства предполагаются строгими), то имеем:

$$\|\varphi_i\|_{q, r, Q_T} \leq c \{ \|\varphi\|_{W[0; T]} + \|\varphi(\cdot, 0)\|_{p, \Omega} \}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \|\varphi_i(\cdot, t)\|_{q, \Omega} &\leq c \int_{-1}^t \alpha(t, \tau) \mathcal{A}[\tilde{\varphi}_i](\tau) d\tau \leq \\ &\leq c \int_0^t \alpha(t, \tau) \mathcal{A}[\varphi_i](\tau) d\tau + c \int_{-1}^0 \alpha(t, \tau) \mathcal{A}[\tilde{\varphi}_i](\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\alpha(t, \tau) = (t - \tau)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}$, $\mathcal{A}[\varphi_i](t) = \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{p, \Omega} + \sum_{|\mu|=2} \|\partial^\mu \varphi_i(\cdot, t)\|_{p, \Omega}$, $i = \overline{1, 3}$, константа c не зависит от T , φ (зависит от Ω); $\tilde{\varphi}(x, t)$ — произвольное продолжение функции $\varphi(x, t)$ на $\Omega \times [-1; T]$. Аналогичные утверждения справедливы при замене λ на $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2p} + \frac{3}{2q} + \frac{1}{r}$ и $\|\varphi_i\|_{q, r, Q_T}$, $\|\varphi_i(\cdot, t)\|_{q, \Omega}$ на $\sum_{i=1}^3 \|\varphi_{x_i}\|_{q, r, Q_T}$, $\sum_{i=1}^3 \|\varphi_{x_i}(\cdot, t)\|_{q, \Omega}$.

Лемма 5. Предположим, что при условиях леммы 4 выполняется оценка

$$1 - \frac{5}{2p} + \frac{3}{2q} > 0 \quad (3.9)$$

вместо неравенства $\lambda \geq 0$. Тогда оценка (3.8) может быть преобразована к виду:

$$\|\varphi(\cdot, t)\|_{q, \Omega} \leq \tilde{c} \{ \|\varphi\|_{W[0; t]} + \|\varphi(\cdot, 0)\|_{p, \Omega} \} \text{ н. в. } t \in [0; T], \quad \tilde{c} \text{ не зависит от } t, \varphi. \quad (3.10)$$

Доказательство. С учетом неравенства Гёльдера,

$$\int_0^t \alpha(t, \tau) \mathcal{A}[\varphi_i](\tau) d\tau \leq \left(\int_0^t (t - \tau)^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})p'} d\tau \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^t \{\mathcal{A}[\varphi_i](\tau)\}^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_0 \|\varphi\|_{W[0;t]},$$

$i = \overline{1, 3}$. Здесь в силу (3.9), $p(\lambda r - 1) > 0$, то есть $\frac{3}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) p' + 1 > 0$, $p' = \frac{p}{p-1}$. Дальнейшее очевидно. $\square$

Непосредственно из лемм 4, 5 вытекает следующая лемма.

Лемма 6. Пусть $\varphi \in W[0; T]$, числа $r, r_1 \in [1; +\infty]$ — произвольны, $q, q_1 \geq p > 1$ таковы, что выполняются условия (3.9), $\frac{1}{2} - \frac{5}{2p} + \frac{3}{2q_1} > 0$. Тогда имеем: $\varphi \in L_{q,r}(Q_T)$, $\varphi_{x_i} \in L_{q_1, r_1}(Q_T)$, $i = \overline{1, 3}$, и при п. в. $t \in [0; T]$ справедливы оценки (3.10) и

$$\sum_{i=1}^3 \|\varphi_{x_i}(\cdot, t)\|_{q_1, \Omega} \leq \tilde{c} \{ \|\varphi\|_{W[0;t]} + \|\varphi(\cdot, 0)\|_{p, \Omega} \}, \quad \tilde{c} \text{ не зависит от } t, \varphi \text{ (зависит от } \Omega \text{)}.$$

Непосредственно из лемм 3, 6 вытекает следующая лемма.

Лемма 7. Пусть числа $q_1, q_2 \geq p > 1$ таковы, что $1 - \frac{5}{2p} + \frac{3}{2q_1} > 0$, $\frac{1}{2} - \frac{5}{2p} + \frac{3}{2q_2} > 0$; $r_1, r_2 \in [1; +\infty]$ — произвольные. При сделанных предположениях для каждой пары $z \in L_p(Q_T)$, $\varphi_0 \in J_p^{\circ 2 - \frac{2}{p}}(\Omega)$ задача (3.3)–(3.4) имеет единственное решение $\varphi \in W[0; T]$, $\nabla \mathcal{P} \in L_p(Q_T)$, и для п. в. $t \in [0; T]$ справедливы оценки

$$\|\varphi(\cdot, t)\|_{q_1, \Omega} \leq C_2 \{ \|\varphi_0\|_{p, \Omega} + \|z\|_{p, Q_t} \}, \quad \sum_{i=1}^3 \|\varphi_{x_i}(\cdot, t)\|_{q_2, \Omega} \leq C_2 \{ \|\varphi_0\|_{p, \Omega} + \|z\|_{p, Q_t} \},$$

с левыми частями из $L_{r_1}[0; T]$, $L_{r_2}[0; T]$, соответственно; C_2 не зависит от t , φ_0 , z .

Пусть $\tau \in (0; T]$, $\varphi_0 \in J_p^{\circ 2 - \frac{2}{p}}(\Omega)$ — произвольно фиксированы. Обозначим $Y = L_p(\Omega)$; $W_0[0; \tau]$ — множество всех $\varphi \in W[0; \tau]$ таких, что $\|\varphi(\cdot, 0) - \varphi_0\|_{p, \Omega} = 0$. Ясно, что $L_p(Q_\tau) = L_p([0; \tau]; Y)$. Числа q_1, r_1, q_2, r_2 считаем выбранными так, как указано в лемме 7. Оператор $\mathcal{F}_\tau: L_p(Q_\tau) \rightarrow W_0[0; \tau]$ определим следующим образом. Считая функцию $\varphi_0 \in J_p^{\circ 2 - \frac{2}{p}}(\Omega)$ фиксированной и пользуясь леммой 3, по заданному $z \in L_p(Q_\tau)$ находим пару $\varphi \in W_0[0; \tau]$ и $\nabla \mathcal{P} \in L_p(Q_\tau)$ как решение задачи (3.3)–(3.4) при $T = \tau$. После этого полагаем $\mathcal{F}_\tau[z] = \varphi$. В соответствии с (3.6), операторы $\mathcal{F}_\tau$ определяются формулой:

$$\mathcal{F}_\tau[z](t) = S(t, 0)\varphi_0 + \int_0^t S(t, s)P_J z(s) ds, \quad t \in [0; \tau]. \quad (3.11)$$

Отсюда ясно, что условие (G_1) выполняется. Предположения (G_2) , (G_3) выполняются согласно леммам 3, 7 при следующих параметрах:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 \varphi = \varphi, \quad D_1: W[0; \tau] \rightarrow L_{q_1, r_1}(Q_\tau), \quad Y_1 = L_{q_1}(\Omega); \\ D_i \varphi = \varphi_{x_{i-1}}, \quad D_i: W[0; \tau] \rightarrow L_{q_2, r_2}(Q_\tau), \quad Y_i = L_{q_2}(\Omega), \quad i = \overline{2, 4}; \\ \mathcal{N}_i(t, \omega) = C_2(\omega + \|\varphi_0\|_{p, \Omega}), \quad i = \overline{1, 4}, \quad \mathcal{N}(\omega) = C_1(1 + e^{\gamma T}), \quad \alpha_0 \equiv 1. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Далее рассмотрим задачу (3.4) для (сначала — неуправляемой) системы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nu \Delta \varphi + a(x, t) \varphi + \sum_{k=1}^3 a_k(x, t) \varphi_{x_k} + \nabla \mathcal{P} = f[\varphi](x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3.13)$$

где $f[\varphi](x, t) = g(x, t) - \sum_{k=1}^3 \varphi_k \varphi_{x_k}$, $g \in L_p(Q_T)$, $p \geq \frac{5}{3}$. Компоненту φ решения $(\varphi, \nabla \mathcal{P})$ можно искать как решение уравнения (1.2) с оператором $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ вида (3.11). После того, как функция φ найдена, функцию $\nabla \mathcal{P}$ можно выразить непосредственно из уравнения (3.13). Используя некоторые элементы построений [15, § 10], получим необходимые нам оценки для правой части f . Найдем числа σ , q , $r \geq 1$, исходя из условий:

$$\max \left\{ \frac{7}{2p} - \frac{3}{2}, 0 \right\} \leq \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{p}, \quad (3.14)$$

$$1 + \frac{3}{2pq} - \frac{5}{2p} > 0, \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{2pq'} - \frac{5}{2p} > 0, \quad (3.15)$$

где q' — сопряженное к q . Система (3.14), (3.15) непротиворечива. Например, при $q = 2$, и соответственно, $q' = 2$, условие (3.15) принимает вид: $p > \frac{7}{2}$; (3.14) конкретизируется как $\sigma \geq p$. Из (3.15), согласно лемме 6, следует, что для $\varphi \in W[0; \tau]$ имеем: $\varphi \in L_{pq, \sigma r}(Q_\tau)$, $\varphi_{x_k} \in L_{pq', \sigma r'}(Q_\tau)$. Обозначим $H[\varphi] = H[\varphi, \varphi]$, $H[\varphi, \psi] = \sum_{k=1}^3 \varphi_k \psi_{x_k}$, $\varphi, \psi \in W[0; \tau]$. Для $H = H[\varphi, \psi]$, пользуясь неравенством Гёльдера, оценим:

$$\|H\|_{p, Q_\tau}^p = \int_0^\tau dt \int_\Omega |H|^p dx \leq \left(\int_0^\tau 1^{\xi'} dt \right)^{\frac{1}{\xi'}} \left(\int_0^\tau \left\{ \int_\Omega |H|^p dx \right\}^\xi dt \right)^{\frac{1}{\xi}},$$

где $\xi = \frac{\sigma}{p}$, $\xi' = \frac{\xi}{\xi - 1} = \frac{\sigma}{\sigma - p}$. Следовательно, $\|H\|_{p, Q_\tau}^p \leq \tau^{1 - \frac{p}{\sigma}} \left(\int_0^\tau \|H\|_{p, \Omega}^\sigma dt \right)^{\frac{p}{\sigma}}$, откуда $\|H\|_{p, Q_\tau} \leq \tau^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\sigma}} \|H\|_{p, \sigma, Q_\tau} \leq \tau^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\sigma}} \sum_{k=1}^3 \|\varphi_k \psi_{x_k}\|_{p, \sigma, Q_\tau}$. По неравенству Гёльдера

$$\|(\varphi_k \psi_{x_k})(\cdot, t)\|_{p, \Omega}^p \leq \left(\int_\Omega |\varphi_k|^{pq} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |\psi_{x_k}|^{pq'} dx \right)^{\frac{1}{q'}},$$

следовательно, $\|(\varphi_k \psi_{x_k})(\cdot, t)\|_{p, \Omega} \leq \|\varphi_k\|_{pq, \Omega} \|\psi_{x_k}\|_{pq', \Omega}$. Таким образом,

$$\|\varphi_k \psi_{x_k}\|_{p, \sigma, Q_\tau}^\sigma \leq \int_0^\tau \|\varphi_k\|_{pq, \Omega}^\sigma \|\psi_{x_k}\|_{pq', \Omega}^\sigma dt \leq \left(\int_0^\tau \|\varphi_k\|_{pq, \Omega}^{\sigma r} dt \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^\tau \|\psi_{x_k}\|_{pq', \Omega}^{\sigma r'} dt \right)^{\frac{1}{r'}},$$

то есть справедлива следующая лемма.

Лемма 8. Для любых $\varphi, \psi \in W[0; \tau]$ справедливы оценки

$$\|\varphi_k \psi_{x_k}\|_{p, \sigma, Q_\tau} \leq \|\varphi_k\|_{pq, \sigma r, Q_\tau} \|\psi_{x_k}\|_{pq', \sigma r', Q_\tau}, \quad \|H\|_{p, Q_\tau} \leq \tau^{\frac{1}{p} - \frac{1}{\sigma}} \sum_{k=1}^3 \|\varphi_k\|_{pq, \sigma r, Q_\tau} \|\psi_{x_k}\|_{pq', \sigma r', Q_\tau}.$$

Из проведенных выкладок вытекает также следующая лемма.

Лемма 9. Пусть $\varphi, \psi \in W[0; \tau]$, и при $\rho_1 \in L_{\sigma r}[0; T]$, $\rho_2 \in L_{\sigma r'}[0; T]$ имеем:

$$\|\varphi_k(\cdot, t)\|_{pq, \Omega} \leq \rho_1(t), \quad \|\psi_{x_k}(\cdot, t)\|_{pq', \Omega} \leq \rho_2(t) \text{ для п.в. } t \in [0; \tau], \quad k = \overline{1, 3}. \quad (3.16)$$

Тогда $\|H[\varphi, \psi](\cdot, t)\|_{p, \Omega} \leq \sum_{k=1}^3 \|\varphi_k(\cdot, t)\|_{pq, \Omega} \|\psi_{x_k}(\cdot, t)\|_{pq', \Omega} \leq 3\rho_1(t)\rho_2(t)$ для п.в. $t \in [0; \tau]$.

Замечание 1. Таким образом, $H[\varphi]$ удовлетворяет условию (F_2) при $\mathcal{N}_0(t, \rho_1, \rho_2) = 3\rho_1\rho_2$, $p_1 = \sigma r$, $Y_1 = L_{pq}(\Omega)$, $p_i = \sigma r'$, $Y_i = L_{pq'}(\Omega)$, $i = \overline{2, 4}$, или в смысле согласования с приведенной выше конкретизацией условия (G_2) , при $q_1 = pq$, $q_2 = pq'$, $r_1 = \sigma r$, $r_2 = \sigma r'$.

Положим $\beta_\tau[\varphi] = \{\|\varphi\|_{W[0; \tau]} + \|\varphi(\cdot, 0)\|_{p, \Omega}\}$. Непосредственно из лемм 6, 8 получаем справедливость следующей леммы.

Лемма 10. Пусть $\varphi, \psi \in W[0; \tau]$, $C_3 = \tilde{c}T^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\sigma}}$, $h \subset [0; T]$ — измеримо. Тогда

$$\|\chi_h H\|_{p, Q_\tau} \leq C_3 \beta_\tau[\varphi] \sum_{k=1}^3 \|\chi_h \psi_{x_k}\|_{pq', \sigma r', Q_\tau}, \quad \|\chi_h H\|_{p, Q_\tau} \leq C_3 \beta_\tau[\psi] \sum_{k=1}^3 \|\chi_h \varphi_k\|_{pq', \sigma r', Q_\tau}.$$

В частности, если при $\rho_1 \in L_{\sigma r}[0; T]$, $\rho_2 \in L_{\sigma r'}[0; T]$ имеют место оценки (3.16), то

$$\|\chi_h H\|_{p, Q_\tau} \leq 3C_3 \beta_\tau[\varphi] \|\chi_h \rho_2\|_{L_{\sigma r'}[0; T]}, \quad \|\chi_h H\|_{p, Q_\tau} \leq 3C_3 \beta_\tau[\psi] \|\chi_h \rho_1\|_{L_{\sigma r}[0; T]}.$$

Рассмотрим разность $H[\varphi] - H[\psi] = \sum_{k=1}^3 (\varphi_k \varphi_{x_k} - \psi_k \psi_{x_k}) = H[\varphi - \psi, \varphi] + H[\psi, \varphi - \psi]$.

Таким образом, непосредственно из леммы 10 вытекает следующая лемма.

Лемма 11. Пусть $0 \leq \xi \leq \tau \leq T$, $\varphi, \psi \in W_0[0; \tau]$, $C_4 = 3C_3$, и при $\rho_1 \in L_{\sigma r}[0; T]$, $\rho_2 \in L_{\sigma r'}[0; T]$ имеют место оценки (3.16). Тогда

$$\|H[\varphi] - H[\psi]\|_{L_p([\xi; \tau]; Y)} \leq C_4 \{\|\rho_1\|_{L_{\sigma r}[\xi; \tau]} + \|\rho_2\|_{L_{\sigma r'}[\xi; \tau]}\} \|\varphi - \psi\|_{W[0; \tau]}.$$

Замечание 2. Стало быть, $H[\varphi]$ удовлетворяет (F_3) при $\alpha_1 \equiv 1$, $K(\omega) = 2C_4\omega$.

Пусть теперь имеется управляемый оператор $g = g[u](\varphi)(x, t)$, $u \in U$, удовлетворяющий условиям (F_1) – (F_3) с параметрами $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_g$, $\alpha_1 \equiv 1$, $K = K_g$. В частности, с физической точки зрения, представляет интерес управление плотностью внешних сил по принципу линейной обратной связи: $g = u_1(x, t) + u_2(x, t)\varphi(x, t)$. Рассмотрим оператор $f[u](\varphi) = g[u](\varphi) - H[\varphi]$. Очевидно, что $f[u]$ удовлетворяет условиям (F_1) – (F_3) . Условие (F_4) будет выполнено, если существует функция $\rho(\cdot) \in \mathbf{AC}[0; T]$ такая, что

$$C_2 \left(\|\varphi_0\|_{p, \Omega} + \left[\int_0^t \{3\rho^2(\xi) + \mathcal{N}_g(\xi, \rho, \rho)\}^p d\xi \right]^{\frac{1}{p}} \right) = \rho(t), \quad t \in [0; T]. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.17) может быть преобразовано к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения; а она имеет решение при достаточно малом $T > 0$.

Рассмотрим задачу (3.4) для управляемой нелинейной системы Навье–Стокса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nu \Delta \varphi + a(x, t)\varphi + \sum_{k=1}^3 a_k(x, t)\varphi_{x_k} + \nabla \mathcal{P} = f[u](\varphi)(x, t), \quad (x, t) \in Q_T. \quad (3.18)$$

Так же как и раньше, компоненту φ решения $(\varphi, \nabla \mathcal{P})$ данной задачи можно искать как решение уравнения (1.2) с оператором $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ вида (3.11). Из проведенных выше рассуждений и теорем 1, 2, а также леммы 3 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть $p \geq \frac{5}{3}$, $Y = L_p(\Omega)$; числа $\sigma, q, r \geq 1$ удовлетворяют условиям (3.14), (3.15); $\varphi_0 \in J_p^{\circ 2-\frac{2}{p}}(\Omega)$; оператор $g = g[u](\varphi)(\cdot, t)$ для всех $u \in U$ удовлетворяет условиям $(F_1)-(F_3)$ при $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_g$, $K = K_g$, $K_g(0) = 0$, и прочими параметрами, выбранными согласно (3.12) и замечанию 1; $f[u](\varphi) = g[u](\varphi) - H[\varphi]$. Предположим, что существует функция $\rho \in AC[0; T]$, удовлетворяющая системе сравнения (3.17), где C_2 — константа из леммы 7. Тогда для всех $u \in U$ задача (3.18), (3.4) имеет единственное решение $(\varphi, \nabla \mathcal{P}) \in W_0[0; T] \times G_p(Q_T)$; это решение подчиняется оценкам:

$$\begin{aligned} \|\varphi(\cdot, t)\|_{L_{q_1}(\Omega)} &\leq \rho(t), \quad \|\varphi_{x_k}(\cdot, t)\|_{L_{q_2}(\Omega)} \leq \rho(t) \quad \text{для п. в. } t \in [0; T], \quad k = \overline{1, 3}; \\ \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{W[0; T]} &\leq \mathcal{N}(M)M, \quad \|\nabla \mathcal{P}\|_{p, Q_T} \leq C_1(1 + e^{\gamma T})\{\|\varphi_0\|_{p, \Omega} + \|f[u](\varphi)\|_{p, Q_T}\}, \end{aligned}$$

где $M = \|3\rho^2 + \mathcal{N}_g(\cdot, \rho, \rho)\|_{L_p[0; T]}$, а константы $C_1, \gamma > 0$ не зависят от T , φ_0, φ (см. лемму 3); $\bar{\varphi}$ — решение задачи (3.3)–(3.4) при $z = 0$. В частности, $\bar{\varphi} = 0$, если $\varphi_0 = 0$.

Таким образом, отрезок $[0; T]$ определяется здесь как отрезок разрешимости системы сравнения (3.17). Во многих случаях для конкретно заданной функции $\mathcal{N}_g$ решение уравнения (3.17) можно найти в явном виде, решив соответствующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения и получить $[0; T]$ как отрезок непрерывности этого решения. Таким образом, исследование разрешимости довольно сложной управляемой системы сводится к исследованию разрешимости задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения конкретного вида. В [15, § 10] однозначная разрешимость задачи (3.4) для неуправляемого уравнения вида (3.13) была доказана при условии, что финальное время T достаточно мало, что согласуется с результатом, полученным выше. Процедура доказательства [15, теорема 10.1] сводится к применению метода последовательных приближений к уравнению (1.2) с операторами $f[\varphi] = g - H[\varphi]$ и $\mathcal{F}$, заданным формулой (3.11) (при $\tau = T$). Чтобы это было возможно, оператор $F[\varphi] = \mathcal{F}[f(\varphi)]$ должен быть инвариантным относительно замкнутого множества Ψ (в [15, теорема 10.1] это — замкнутый ограниченный шар) пространства $W[0; T]$ и сжимающим на этом множестве. Это, по-существу, означает, что из доказательства теорем 1, 2 (в данном частном случае) берется лишь первый шаг индукции (с точностью до того, что вместо величины $\frac{1}{2}$ берется константа, сколь угодно близкая к 1 слева), то есть $T = t_1$; процедура продолжения решения не проводится.

О возможности разрушения решения (*blow-up*) системы Навье–Стокса при подходе к некоторой критической отметке времени хорошо известно, см., например, [17]. Вообще, за исключением некоторых частных случаев (отсутствие вынуждающих сил $g = 0$, задачи с осевой симметрией и т. д.), и даже для этих частных случаев, вопросы глобальной разрешимости и единственности решений нелинейных нестационарных систем Навье–Стокса исследовались, главным образом, по отдельности (в различных классах), см., например, [18–23]. Отметим, наконец, [24, глава 3, §§ 4–5; глава 4], где рассматривалась задача (3.4) для уравнения вида (3.13) при $a = 0$, $a_k = 0$, $k = \overline{1, 3}$, в котором функция $g(t, x)$ понималась как управление. Была доказана всюду плотность множества управлений, для которых существует единственное глобальное решение (при произвольно фиксированном $T > 0$), в пространстве правых частей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернов А. В. Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2011. № 3. С. 95–107. <http://mi.mathnet.ru/ivm7249>

2. Калантаров В. К., Ладыженская О. А. О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102. <http://mi.mathnet.ru/zns11983>
3. Сумин В. И. Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21. <http://mi.mathnet.ru/zvmmf3318>
4. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Вольтерровы уравнения и управляемые начально-краевые задачи. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
5. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Разрушение решений сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 40. Дифференциальные уравнения. С. 3–138.
6. Чернов А. В. О тотальном сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с неизотонным и немажорируемым оператором // Известия вузов. Математика. 2017. № 6. С. 83–94. <http://mi.mathnet.ru/ivm9252>
7. Чернов А. В. О сохранении разрешимости полулинейного уравнения глобальной электрической цепи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 12. С. 2095–2111. <https://doi.org/10.31857/S004446690003555-1>
8. Сумин В. И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник ННГУ. Математика. 2003. Вып. 1. С. 91–107. <http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=1411>
9. Сумин В. И., Чернов А. В. Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: тр. Междунар. конф. посвященной 90-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского. Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2015. С. 293–300.
10. Сумин В. И. Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278>
11. Чернов А. В. О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73. <http://mi.mathnet.ru/ivm8446>
12. Чернов А. В. О тотально глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 230–243. <https://doi.org/10.20537/vm150207>
13. Чернов А. В. Мажорантный признак первого порядка тотально глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 4. С. 531–548. <https://doi.org/10.20537/vm180407>
14. Чернов А. В. О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью // Известия вузов. Математика. 2018. № 11. С. 60–74. <http://mi.mathnet.ru/ivm9413>
15. Солонников В. А. Оценки решений нестационарной системы Навье–Стокса // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1973. Т. 38. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 7. С. 153–231. <http://mi.mathnet.ru/zns12649>
16. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Московск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1–25. <https://zbmath.org/?q=an:0021.23404>
17. Seregina G. A. Necessary conditions of potential blow up for Navier–Stokes equations // Записки научных семинаров ПОМИ. 2010. Т. 385. С. 187–199. <http://mi.mathnet.ru/zns13904>
18. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // Acta Mathematica. 1934. Vol. 63. No. 1. P. 193–248. <https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485888078>

19. Prodi G. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes // *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1959. Vol. 48. No. 4. P. 173–182. <https://doi.org/10.1007/BF02410664>
20. Kozono H., Sohr H. Remarks on uniqueness of weak solutions to the Navier–Stokes equations // *Analysis*. 1996. Vol. 16. No. 3. P. 255–271. <https://doi.org/10.1524/anly.1996.16.3.255>
21. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // *Успехи математических наук*. 2003. Т. 58. № 2 (350). С. 45–78. <https://doi.org/10.4213/rm610>
22. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal regularity L_p – L_q class // *Journal of Differential Equations*. 2018. Vol. 264. No. 3. P. 1475–1520. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045>
23. Seregin G. A., Shilkin T. N. Liouville-type theorems for the Navier–Stokes equations // *Russian Mathematical Surveys*. 2018. Vol. 73. No. 4. P. 661–724. <https://doi.org/10.1070/RM9822>
24. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.

Поступила в редакцию 23.08.2019

Чернов Андрей Владимирович, к. ф.-м. н., доцент, Нижегородский государственный университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23;
Нижегородский государственный технический университет, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.
E-mail: chavnn@mail.ru

Цитирование: А.В. Чернов. О тотальной глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 92–111.

A. V. Chernov

On totally global solvability of controlled second kind operator equation

Keywords: nonlinear evolutionary operator equation of the second kind, totally global solvability, Navier–Stokes system.

MSC2010: 47J05, 47J35, 47N10

DOI: [10.35634/vm200107](https://doi.org/10.35634/vm200107)

We consider the nonlinear evolutionary operator equation of the second kind as follows $\varphi = \mathcal{F}[f[u]\varphi]$, $\varphi \in W[0;T] \subset L_q([0;T];X)$, with Volterra type operators $\mathcal{F}: L_p([0;\tau];Y) \rightarrow W[0;T]$, $f[u]: W[0;T] \rightarrow L_p([0;T];Y)$ of the general form, a control $u \in \mathcal{D}$ and arbitrary Banach spaces X, Y . For this equation we prove theorems on solution uniqueness and sufficient conditions for totally (with respect to set $\mathcal{D}$) global solvability. Under natural hypotheses associated with pointwise in $t \in [0;T]$ estimates the conclusion on univalent totally global solvability is made provided global solvability for a comparison system which is some system of functional integral equations (it could be replaced by a system of equations of analogous type, and in some cases, of ordinary differential equations) with respect to unknown functions $[0;T] \rightarrow \mathbb{R}$. As an example we establish sufficient conditions of univalent totally global solvability for a controlled nonlinear nonstationary Navier–Stokes system.

REFERENCES

1. Chernov A.V. A majorant criterion for the total preservation of global solvability of controlled functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 3, pp. 85–95.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X11030108>
2. Kalantarov V.K., Ladyzhenskaya O.A. The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, *Journal of Soviet Mathematics*, 1978, vol. 10, issue 1, pp. 53–70.
<https://doi.org/10.1007/BF01109723>
3. Sumin V.I. The features of gradient methods for distributed optimal control problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1990, vol. 30, no. 1, pp. 1–15.
[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(90\)90002-A](https://doi.org/10.1016/0041-5553(90)90002-A)
4. Sumin V.I. *Funktsional'nye vol'terrovyye uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami. Chast' I. Vol'terrovyye uravneniya i upravlyaemye nachal'no-kraevyye zadachi* (Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems. Part I. Volterra equations and controlled initial boundary value problems), Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 1992.
5. Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up of solutions to strongly nonlinear equations of the pseudoparabolic type, *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya*, 2006, vol. 40, Differential Equations, pp. 3–138 (in Russian).
6. Chernov A.V. On total preservation of solvability of controlled Hammerstein-type equation with non-isotone and non-majorizable operator, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 72–81.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X1706010X>
7. Chernov A.V. Preservation of the solvability of a semilinear global electric circuit equation, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 2018–2030.
<https://doi.org/10.1134/S0965542518120096>
8. Sumin V.I. The problem of global solutions existence-stability for controllable boundary-value problems and Volterra functional equations, *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta imeni N.I. Lobachevskogo. Matematika*, 2003, issue 1, pp. 91–107 (in Russian).
<http://www.vestnik.unn.ru/ru/nomera?anum=1411>
9. Sumin V.I., Chernov A.V. Volterra functional-operator equations in the theory of optimization of distributed systems, *Systems Dynamics and Control Processes (SDCP-2014): Proceedings of Int.*

- Conf. Dedicated to the 90th Anniversary of the birth of Acad. N.N. Krasovskii*, Ekaterinburg: "UMTS UPI" Publ., 2015, pp. 293–300 (in Russian).
10. Sumin V.I. Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 262–278 (in Russian).
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278>
 11. Chernov A.V. A majorant-minorant criterion for the total preservation of global solvability of a functional operator equation, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 55–65.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X12030085>
 12. Chernov A.V. On the totally global solvability of a controlled Hammerstein type equation with a varied linear operator, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, issue 2, pp. 230–243 (in Russian).
<https://doi.org/10.20537/vm150207>
 13. Chernov A.V. Majorant sign of the first order for totally global solvability of a controlled functional operator equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 4, pp. 531–548 (in Russian). <https://doi.org/10.20537/vm180407>
 14. Chernov A.V. The total preservation of unique global solvability of the first kind operator equation with additional controlled nonlinearity, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 11, pp. 53–66.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X18110063>
 15. Solonnikov V.A. Estimates for solutions of nonstationary Navier–Stokes equations, *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 1973, vol. 38, pp. 153–231 (in Russian).
<http://mi.mathnet.ru/eng/zns12649>
 16. Tikhonov A.N. On functional equations of Volterra type and their applications to some problems of mathematical physics, *Bull. Mos. Univ. Sec. A.*, 1938, vol. 1, issue 8, pp. 1–25 (in Russian).
<https://zbmath.org/?q=an:0021.23404>
 17. Seregin G.A. Necessary conditions of potential blow-up for Navier–Stokes equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 178, no. 3, pp. 345–352.
<https://doi.org/10.1007/s10958-011-0551-z>
 18. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica*, 1934, vol. 63, no. 1, pp. 193–248. <https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485888078>
 19. Prodi G. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1959, vol. 48, no. 4, pp. 173–182. <https://doi.org/10.1007/BF02410664>
 20. Kozono H., Sohr H. Remarks on uniqueness of weak solutions to the Navier–Stokes equations, *Analysis*, 1996, vol. 16, no. 3, pp. 255–271. <https://doi.org/10.1524/anly.1996.16.3.255>
 21. Ladyzhenskaya O.A. Sixth problem of the millenium: Navier–Stokes equations, existence and smoothness, *Russian Mathematical Surveys*, 2003, vol. 58, no. 2, pp. 251–286.
<https://doi.org/10.1070/RM2003v058n02ABEH000610>
 22. Saito H. Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal regularity L_p – L_q class, *Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 264, no. 3, pp. 1475–1520.
<https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.045>
 23. Seregin G.A., Shilkin T.N. Liouville-type theorems for the Navier–Stokes equations, *Russian Mathematical Surveys*, 2018, vol. 73, no. 4, pp. 661–724. <https://doi.org/10.1070/RM9822>
 24. Fursikov A.V. *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, Providence, RI: AMS, 2000. <https://zbmath.org/?q=an:1027.93500>

Chernov Andrei Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Nizhny Novgorod State University, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia;
Nizhny Novgorod State Technical University, ul. Minina, 24, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: chavnn@mail.ru

Citation: A.V. Chernov. On totally global solvability of controlled second kind operator equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 92–111.